



BÁNKI DONÁT
GÉPÉSZ ÉS BIZTONSÁGTECHNIKAI MÉRNÖKI KAR

Dr. Szlivka Ferenc

Hő- és Áramlástechnika

ÓE-BGK 3059

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Előszó	6
1. Folyadékok és gázok tulajdonságai	7
1.1 Ideális folyadék.....	7
1.2 Folyadékok és gázok legfontosabb fizikai jellemzői	7
1.3 Folyadékok és gázok tulajdonságai	9
1.3.1 A telített gőz nyomása	10
1.3.2 Általános gáztörvény	11
1.4 Egyszerű állapotváltozások ideális gázokban.....	12
1.4.1 Izotermikus állapotváltozás	12
1.4.2 Állandó térfogat melletti állapotváltozás.....	13
1.4.3 Izobár állapotváltozás.....	14
1.4.4 Adiabatikus és súrlódásmentes állapotváltozás	15
1.4.5 Politropikus állapotváltozás.....	15
1.5 Folyadékok összenyomhatósága.....	16
2. Termodinamikai alapfogalmak	17
2.1 A termodinamikai rendszer	17
2.2 A termodinamikai és kalorikus mennyiségek.....	17
2.3. A fajlagos munka és a fajlagos hő	18
2.2 A termodinamikai rendszer energiataralma, a termodinamika alaptörvényei.....	20
2.2.1 A termodinamika 0. főtétele	20
2.2.2 Az első főtétel zárt rendszerben	21
2.2.3 Az első főtétel nyitott rendszerben.....	22
A technikai munka	22
Kompresszor vizsgálata	23
A kilépési munka	23
Az entalpiaváltozás	25
Az entalpia.....	25
Gázturbina vizsgálata.....	26
2.3 Az termodinamika második főtétele	29
2.3.1 Az entrópia.....	29
2.4 A termodinamika III. főtétele	31
3. Carnot-körfolyamatok.....	33
3.1. Carnot-körfolyamat.....	33
3.1.1 Izotermikus expanzió 1-2 szakasz.....	34
3.1.2 Adiabatikus expanzió 2-3 szakasz	35
3.1.3 Izotermikus kompresszió 3-4 szakaszon	35
3.1.4 Adiabatikus kompresszió a 4-1 szakaszon	36
3.2. Carnot-körfolyamat hatásfoka	37
3.2.1. A Carnot-körfolyamat (reverzibilis) körfolyamat.....	39
3.3 Általános körfolyamatok	40
3.3 A fordított Carnot-körfolyamatok.....	40
3.4 Reverzibilis és irreverzibilis körfolyamatok.....	41
4. Különböző körfolyamatok	43
4.1. Otto körfolyamat.....	43
4.2. A Diesel körfolyamat	46
4.3. A Siegler-Sabathé-körfolyamat	48

4.4. Gőz körfolyamat és gőzdiagramok	49
4.4.1. A Rankine-Clausius körfolyamat	50
4.4.2 Clausius-Rankine körfolyamat T-s diagramban	52
4.4.3 Vízgőz h-s diagramja.....	53
5. Hűtőgépek és hőszivattyúk	55
5.1 Kompresszoros hűtőgép	57
A kompresszoros hűtőgépeken kívül alkalmaznak még abszorpció hűtőgépeket is. Ezek részleteivel itt nem foglalkozunk. Ezekről a [1] irodalomban találni részleteket.	58
5.2 A hőszivattyúk	58
5.3 Hűtőközegek.....	61
6. Nedves levegő állapotjelzői	62
6.1 Ideális gázkeverékek törvényei.....	62
6.2 Nedves levegő.....	63
6.3 A nedves levegő h-x diagramja.....	63
6.4 Légállapot vizsgálat fűtés során.....	67
6.5 Légállapot vizsgálat hűtés során	69
7. Hőterjedés	72
7.1 A hővezetés	72
7.1.1 A hővezetési tényező (λ)	73
7.1.2 Stacioner hővezetés szilárd testekben	74
Hővezetés stacioner esetben, gömbhéjban	75
7.1.3 A hőellenállás.....	77
7.1.4 Instacioner hőáramlás	77
7.2 Hőátadás	78
7.3 Hőátvitel	79
7.4 Hőátvitel többrétegű falon.....	81
8. A hőátadás, hőátadási tényező számítása.....	86
8.1 Hőátadás kényszeráramlásban	88
Hűtőborda.....	89
8.2 Hőátadás szabad áramlásban	89
9. A hőszugárzás	93
10. Nyugvó folyadék egyensúlya	97
10.1 A nyomás fogalma	97
10.2 A nyomóerő számítása a nyomásból.....	98
10.3 Hidrosztatika alapegyenlete.....	99
10.3.1 Hidrosztatika alapegyenlete nehézségi erőterben	100
10.3.2 Hidrosztatikai feladat megoldásáról általában	101
10.4 Nyomás változása az atmoszférában.....	101
10.5 Hidrosztatikai nyomásból származó erő számítása, Hoover-gát	106
10.6 Nyomásmérés és nyomásmérő eszközök	107
10.6.1 Abszolút és túlnyomás.....	108
10.6.2 Higanys barométer	108
10.6.3 U cső, mint manométer.....	109
10.6.4 Mikromanométerek	111
10.6.5 Rugós nyomásmérő műszerek	111
10.6.6 Nyomástávadók.....	111
10.7 Folyadék egyenletesen gyorsuló rendszerben	112
10.8 Folyadék forgó rendszerben	113
11. Kinematika és a folytonosság tétele	119

11.1. A folyadékmozgás leírása.....	119
11.2. Áramvonal, pálya, nyomvonal, stacioner áramlás	120
11.3 A folytonosság tétele.....	121
11.3.1 Folytonosság tétele stacioner áramlásra	121
11.3.2 A folytonosság tétele instacioner áramlásra	122
11.3.3 Kontinuitás tetőablakon.....	125
11.3.4 Kontinuitás kompresszorban.....	125
11.4 Örvényesség, cirkuláció	126
11.4.1 Az örvényesség síkáramlásban	126
11.4.2 Cirkuláció, Stokes-tétel	128
11.4.3 Potenciálos áramlás, potenciálos örvény	130
11.5 A folyadékreszecske gyorsulása	132
11.5.1 Gyorsulás konfúzorban.....	134
12. Euler- és Bernoulli-egyenlet.....	137
12.1 Euler-egyenlet.....	137
12.2 Euler-egyenlet természetes koordinátarendszerben	138
12.2.1 Szilárd testként forgó folyadék	141
12.3 A Bernoulli-egyenlet.....	142
13. A Bernoulli-egyenlet alkalmazásai.....	145
13.1 Örvény a vízfelszínen.....	145
13.2 Forgószél	148
13.3 Kiömlés tartályból.....	148
13.4 Szivornya	149
13.6 Kiömlés tartályból instacioner esetben	151
13.7 Ventilátorok, Euler-turbinaegyenlet.....	155
13.8 Radiális ventilátorok elméleti és valóságos jelleggörbéi	160
13.8.1 A radiális ventilátorok ideális jelleggörbéi.....	160
13.8.2 A ventilátorok valóságos jelleggörbéi.....	161
13.9 Forgó "S" alakú cső, mint egyszerű szivattyú	162
14. Impulzustétel és alkalmazásai	165
14.1 Szilárd test az ellenőrző felületben	167
14.2 Sík lapra ható erő	169
14.3 Pelton-turbina	171
14.3.1 Egy lapátra ható erő.....	172
14.3.2 Kerékre ható átlagos erő	173
14.3.3 A kerületi erő változása	174
14.3.4 A teljesítmény kiszámítása	174
14.4 Csővezeték hirtelen zárása	176
14.4.1 A hirtelen záráskor fellépő nyomáslengések	177
14.4.2 A vízoszlop rövidülése	177
14.4.3 A nyomásnövekedés kiszámítása	179
14.4.4 A hullámterjedés sebessége	180
14.5 Szárnyrács számítása.....	181
14.6 Légcsavar sugárelmélete	184
14.7 Az ideális szélgenerátor.....	187
15. Súrlódásos folyadékok	190
15.1 Viskozitás.....	190
15.2 Súrlódásos közeg mozgásegyenlete	193
15.3 Navier-Stokes-egyenlet megoldása két sík lap között	194

15.3 Megoldás hengeres csőben	194
16. Viszkózus folyadékok csőáramlása	198
16.1. Lamináris és turbulens áramlás.....	198
16.2 Darcy-formula.....	200
16.2.1 Turbulens megoldás	201
16.2.2 Nikuradse-diagram	202
16.2.3 A Moody-diagram	203
16.3 Csőáramlási probléma három típusa	204
16.3.1 I. feladat: Számítsuk ki a nyomásesést!	204
16.3.2 II. feladat: Keressük meg az átlagsebességet!	205
16.3.3 III. feladat: Számítsuk ki a csőátmérőt!	206
16.4 Nem körkeresztmetszetű vezetékek áramlási vesztesége.....	208
16.5 Csőidomok és szerelvények veszteségének számítása.....	210
16.5.1 Borda-Carnot átmenetet.....	210
16.5.2 Belépési veszteség.....	211
16.5.3 Diffúzor	212
16.5.4 Szelepek, csapok, tolózárak.....	214
16.5.5 Könyökök, ívek.....	216
16.5.6 Légtechnikai berendezések	216
17. Csővezeték rendszerek számítása	219
17.1 Olajzó vezeték.....	219
17.2 Víztorony	221
17.3 Tartályból tartályba áramlás	223
11. Testekre ható áramlási erők	227
18.1 A henger és gömb körüli áramlás	228
18.2 Különféle testek ellenállása	230
18.3 Szárnyra ható erők	233
19. A sebesség és térfogatáram mérés	235
19.1 A sebességmérés és eszközei.....	235
19.1.1 A Prandtl-cső	235
19.1.2 Térfogatáram mérés csőben Prandtl-csővel.....	236
19.2 Térfogatáram mérés szűkítő elemekkel.....	238
Magyar nyelvű szakirodalomból.....	240
Idegen nyelvű szakirodalomból	241

Előszó

A jegyzet elsősorban a másodéves gépészmérnök hallgatók számára a Hő- és Áramlástechnika elsajátításához és alkalmazásához nyújt segítséget. Természetesen mások számára is igen hasznos, akik az áramlástan alapjaival kívánnak megismerkedni, és az ismereteiket alkalmazni is szeretnék az ipari gyakorlatban.

A jegyzet alapja a Budapesti Műszaki Egyetemen, a Paksi Energetikai Főiskolán, a gödöllői Szent István Egyetemen és az Óbudai Egyetemen folyó hő- és áramlástechnika keretében tartott előadásaim.

A hő- és áramlástan alapegyenleteinek ismertetésekor több esetben a matematikai háttérrel is igyekeztem megvilágítani, a teljes precizitás igénye nélkül. Az alapegyenletek alkalmazását, annak egyes lépéseit példákban mutatom be. Nemcsak a műszaki alkalmazásokat, hanem egyéb jelenségeket is példaként választottam, légköri, biológiai jelenségekhez kapcsolódó magyarázatokat is beépítettem a jegyzetbe.

Az egyes fejezeteket megjelöltem a fejezetre leginkább jellemző kicsinyített ábrával, ikonnal. Az alkalmazási példákat pedig szintén kiemeltem, egy mással össze nem téveszthető ábrával. Remélhetően ezek a jelölések a gyorsabb és pontosabb eligazodást teszik lehetővé az olvasó számára az anyagban. A tananyag mélyebb elsajátításához az előadások és a gyakorlatok rendszeres látogatása feltétlenül szükséges. Az alkalmazás további példáit a [18] példatárban találhat az olvasó.

Megköszönöm az Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépészmérnöki és Biztonságtechnikai Kar kollektívájának a jegyzet elkészítésében nyújtott segítségét. Külön köszönettel tartozom Dr. Molnár Ildikó kollégámnak, aki a lektorálás során értékes észrevételeivel segített a hibák kijavításában.

Budapest 2014

Szerző

1. Folyadékok és gázok tulajdonságai

1.1 Ideális folyadék

Fizikában az anyag háromféle halmazállapotát különböztetjük meg: a szilárd a folyékony és a légnemű halmazállapotot. A szilárd testek meghatározott alakkal rendelkeznek, míg a folyékony és légnemű anyagok felveszik az azokat tartalmazó edény alakját. A folyékony anyag az edényben szabad felszín képez, míg a légnemű kitölti a rendelkezésre álló teret. Igen fontos eltérés a folyékony és a légnemű anyagok között, hogy míg a folyadékok közel összenyomhatatlanok, azaz sűrűségük igen nagy nyomásváltozás esetén is alig változik, (pl. az óceánok legmélyebb pontján is csak kb. 5%-ot változik a felszínhez képest) addig a légnemű testek sűrűsége a nyomással - állandó hőmérséklet mellett - közel arányosan változik.

A folyadékok mechanikájában a gázokat is folyadéknak szokták nevezni, az elnevezés használata azonban nem következetes. A folyadékok és gázok tulajdonságainak csak egy részét vesszük figyelembe a törvények felírásakor, idealizáljuk a tulajdonságokat.

Számunkra jelen esetben a célszerű **ideális folyadék homogén, súrlódásmentes és összenyomhatatlan.**

Az **összenyomhatatlanságról** folyadékok esetében csak ritkán kell lemondanunk -ld. Allievi-elmélet -, gázok esetében a hangsebesség megközelítéséig megengedhető elhanyagolást jelent. **Homogén** alatt azt értjük, hogy eltekintünk a molekuláris szerkezettől és a folyadékot, a teret mindenütt egyenletesen kitöltő anyagnak képzeljük. A **homogén**, vagy **kontinuum** sűrűsége megegyezik a valóságos folyadék sűrűségével.

A kontinuum elnevezés arra utal, hogy az adott anyag folyamatosan és egyenletesen, szabad felszín alkotva (a légneműek kivételével) vagy teljes egészében (légneműek) tölti ki a rendelkezésre álló teret, tehát nem bír saját alakkal. A kontinuum elnevezés mellett, elsősorban folyadékok és gázok esetében, gyakorta használatos összefoglaló, magyar elnevezés a közeg.

A valóságos folyadék sűrűségének definíciójánál csak átlagos sűrűségről beszélhetünk:

$$\rho = \lim \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

ahol " Δm " a " ΔV " térfogatban foglalt tömeg. A limes pedig úgy értendő, hogy a " ΔV " csökken egy kicsi, de a molekulák méretét még több nagyságrenddel meghaladó méretig. A kontinuum közelítés gyakorlatilag mindig fenntartható, kivételt ez alól csak a nagyon ritka gázok vizsgálata jelent.

A **súrlódásmentesség** feltételét kell leghamarabb feladnunk a valóságos folyadékok áramlásának vizsgálatakor. Az alaptörvényeket mégis a súrlódás elhanyagolásával fogalmazzuk meg, mert - mint azt látni fogjuk - a súrlódás figyelembevétele már gyakran megoldhatatlan nehézségekre vezet.

1.2 Folyadékok és gázok legfontosabb fizikai jellemzői

Mivel a hőtan és a folyadékok mechanikája folytonos közeg egy kis részével foglalkozik, ezért célszerű bevezetni az egységnyi térfogatra eső tömeg, és súly fogalmát. A fizikai mennyiségek mellett azok mértékegységét is megadjuk az (SI The International System of Units) Nemzetközi Mértékrendszerben, amelyben az alap mértékegységek a következők (számunkra szükséges mértékegységek):

hossz = méter (m)

idő = másodperc (s)
tömeg = kilogramm (kg)
hőmérséklet = Kelvin (K)

és leszámaztatott mennyiség az

erő=newton (N) vagy $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$

Sűrűség az egységnyi térfogatban foglalt tömeg mennyisége, görög betűvel ρ -val jelöljük.

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \quad 1.1$$

ahol "V" a kijelölt "m" tömeg térfogata.

Fajtérfogat az egységnyi tömeg által elfoglalt térfogat, "v"-vel jelöljük (az áramlástanban nem szívesen használjuk, mert a sebességet szintén "v" jelöli). A fajtérfogat a sűrűség reciproka:

$$v = \frac{V}{m} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \quad 1.2$$

Fajsúly az egységnyi térfogatú anyag súlya, görög betűvel γ -val jelöljük

$$\gamma = \frac{G}{V} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad 1.3$$

Hőmérséklet, amelyet "T"-vel vagy "t"-vel jelölünk és a folyadék belső energiaszintjének mértéke. Az abszolút hőmérséklet mértéke a Kelvin "K", amelynek a kapcsolata a nálunk használt Celsius fokkal a következő:

$$K = ^\circ C + 273.16 \quad 1.4$$

Nyomás az egységnyi felületre eső, a felületre merőleges nyomóerő:

$$p = \frac{F}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right] \quad 1.5$$

(Mivel a nyomás az egyik legfontosabb fizikai mennyiség a hő- és áramlástanban, ezért pontosabb definíciójára még visszatérünk.)

Hő (egységnyi tömegre vonatkozó) a rendszerrel közölt vagy attól elvont hő, nem állapotjelző.

$$q = \frac{Q}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad 1.6$$

Munka (egységnyi tömegre vonatkozó) a rendszerrel közölt vagy attól elvont munka nem állapotjelző. (W_F fizikai munka, zárt rendszerben, W_T technikai munka, nyitott rendszerben)

$$w = \frac{W}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad w_F = -\int p \cdot dv \quad ; \quad w_T = -\int v \cdot dp \quad 1.7$$

Belső energia (egységnyi tömegre vonatkozó) a zárt rendszerrel belső energiája. Ideális gáz esetén $u = c_v \cdot T$

1.8

$$u = \frac{U}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

Entalpia (egységnyi tömegre vonatkozó) a nyitott rendszer energiája. Ideális gáz esetén $u = c_p \cdot T$.

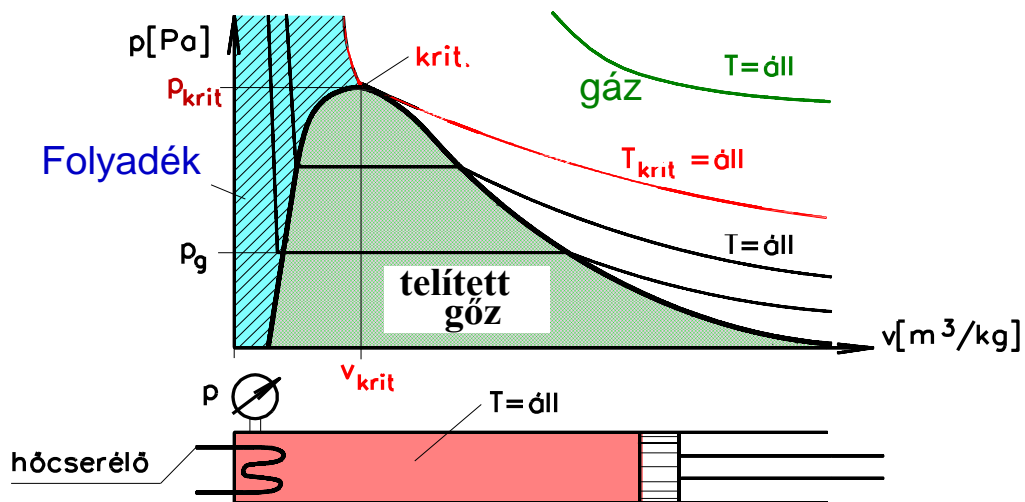
$$h(i) = \frac{H}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad h = u + p \cdot v \quad 1.9$$

Entrópia (egységnyi tömegre vonatkozó) a rendszerrel rendezetlenségének mértéke.

$$s = \frac{S}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad ds = \frac{dq}{T} \quad 1.10$$

1.3 Folyadékok és gázok tulajdonságai

A folyadékok és a gázok állapotváltozásaira legjellemzőbb a nyomás és a fajtérfogat összefüggése, a jól ismert "p-v" diagram, melyet víz esetére az **1.1 ábra** mutat. A diagramban állandó hőmérséklet-vonalak (izotermák) vannak felrajzolva.



Fázisdiagram
1.1 ábra

1.1 táblázat Gázok kritikus állapotra vonatkozó értékei

	$t_{\text{krit}} \text{ } ^\circ\text{C}$	$p_{\text{krit}} \text{ bar}$	$v_{\text{krit}} \text{ m}^3/\text{kg}$	$\rho \text{ kg/m}^3$
víz	374	225	$3.1 \cdot 10^{-3}$	322
oxigén	-119	51	$2.33 \cdot 10^{-3}$	429
nitrogén	-147	34.6	$3.20 \cdot 10^{-3}$	312
levegő	-141	38	$2.98 \cdot 10^{-3}$	335
széndioxid	31.1	73	$2.15 \cdot 10^{-3}$	464

A mozgatható dugattyúval adott tömegű gőzt zárunk a hengerbe. A dugattyú mozgatásával a gőz térfogatát változtathatjuk, miközben mérjük "p" nyomását. A "T" hőmérsékletet egy hőcserélő segítségével, hő bevezetéssel vagy elvonással állandó értéken tartjuk.

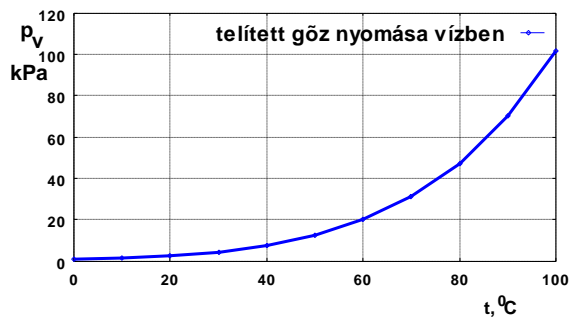
Mozgassuk állandó hőmérséklet tartása közben a dugattyút, és a mért "v" fajtérfogatot és "p" nyomást ábrázoljuk a diagramban.

Adott, állandó hőmérséklet mellett csökkentve a gőz térfogatát a nyomás kezdetben növekszik, majd állandóvá válik. Az állandó nyomású szakaszon a hengerben folyadék és gőzfázis is jelen van. A hőcserélőn keresztül folyamatosan hőt kell a rendszerből elvonni, amely a lecsapódáskor keletkező rejtett, vagy látens hő. Az összes gőz kondenzálódása után cseppfolyós fázis marad a hengerben.

Itt kis térfogatcsökkenésre nagyon nagy nyomásnövekedéssel válaszol a folyadék, az állandó hőmérsékletű görbék gyakorlatilag függőlegesen emelkednek. Az ábra jobb felső része a légnemű, bal oldali vonalkázott része a cseppfolyós halmazállapotot mutatja. A vastag vonal, határgörbe alatti rész a forrásban lévő víz és telített gőz keverékének megfelelő mező. A határgörbe felső pontja feletti hőmérsékleteken már folyékony halmazállapot (víz) nem fordulhat elő. A kritikus hőmérsékleten a lecsapódás, illetve az elpárolgás rejtett hő felszabadulása, ill. lekötése nélkül zajlik.

1.3.1 A telített gőz nyomása

A folyadékból légnemű állapotba való átalakulás, a párolgás, minden hőmérsékleten és nyomáson, ahol folyadék létezik, fellép. Bizonyos nyomáson és hőmérsékleten azonban a folyadék belsejében is gőz képződik. Ezt a nyomást telített gőznyomásnak nevezzük. A **1.1 ábrán** a határgörbe alatti területen egy adott hőmérsékletre egy adott, állandó nyomás tartozik. Értékeit a vízre vonatkozóan a **1.2 ábrában** mutatjuk be.

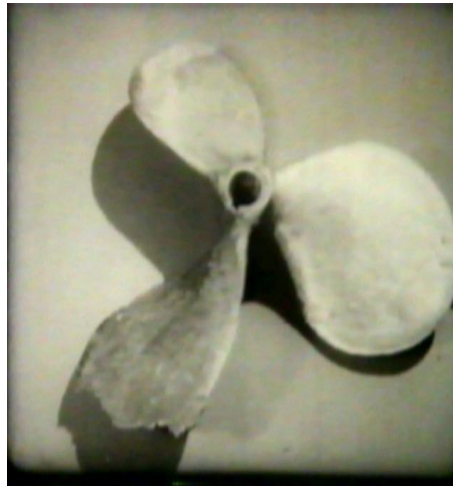
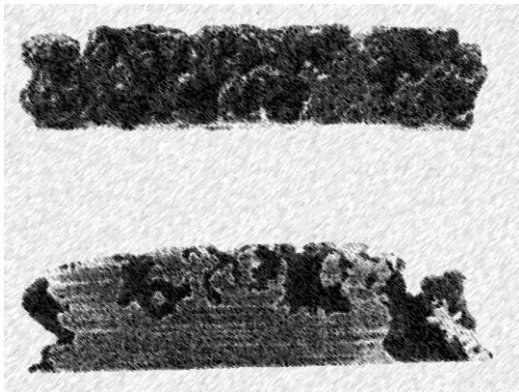


Telített gőz nyomása
1.2 ábra

A diagram szerint a víz akár nulla fokon is képes forrni, ha kellően kicsi a nyomás. A folyadékokkal működő áramlástechnikai gépekben, főként szivattyúk járókerekenél és hajócsavaroknál, a nagy sebességű áramlásban a nyomás lecsökken olyan mértékben, hogy eléri a telített gőz nyomását. Ekkor gőzbuborékok keletkeznek. Amikor e buborékok nagyobb nyomású helyre kerülnek a gőz kondenzálódik, a buborékok összeroppannak. Ha az összeroppanás szilárd fal közelében történik, jelentős roncsolást okoz.

A gőzbuborékok képződését és összeroppanását **kavitációnak** hívjuk. A szilárd falon okozott roncsolást pedig kavitációs erózióknak. Az **1.3 ábra** hajócsavar lapátjának egy darabját mutatja. Jól látható, hogy a lapát homogén acél szerkezete az erózió hatására szivacsos szerkezetűvé alakult

1.3.2 Általános gáztörvény



Kavitációs erózió egy hajócsavar lapátjának egy darabján

(a baloldali felső képen, az alsón annak csiszolata)

1.3 ábra

Az **1.1 ábrán** lévő határológörbétől jobbra, annak közelében lévő pontokkal jellemzett állapotoknál **túlhevített gőzről**, míg a határológörbétől távol, pl. $T \gg T_{krit}$ esetén, ha nem vízről van szó, akkor **gázzal** beszélünk.

Az **ideális gáz** a fizikában használt fogalom, a gázok olyan egyszerűsített modellje, amelynek termodinamikai viselkedése egyszerű matematikai eszközökkel írható le. A reális gázok többé vagy kevésbé közelítik meg az ideális állapotot (legideálisabb gáz jelenlegi tudásunk szerint a hélium).

A levegőt alkotó (O_2 és N_2 keveréke) esetén $t_{krit} = -141^\circ C$ $T_{krit} = 132K$, a szokásos hőmérsékleteknél $T \gg T_{krit}$, így a levegő gáznak tekinthető, amelyre jó közelítéssel érvényes az **ideális gázra vonatkozó gáztörvény**:

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad 1.11$$

amelyhez további kiegészítő egyenleteket is hozzá kell venni, hogy teljes legyen az ideális gázokat leíró matematikai modell.

$$c_p - c_v = R \quad 1.12$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \quad 1.13$$

izentropikus, vagy adiabatikus kitevő,

ahol "p" a gáz nyomása;
"ρ" a gáz sűrűsége;
"T" a gáz abszolút hőmérséklete;
"R" a specifikus gázállandó;

" c_p " az állandó nyomáson mért fajhő;

" c_v " az állandó térfogaton mért fajhő.

Levegőre vonatkozóan a gáztörvényben szereplő állandók:

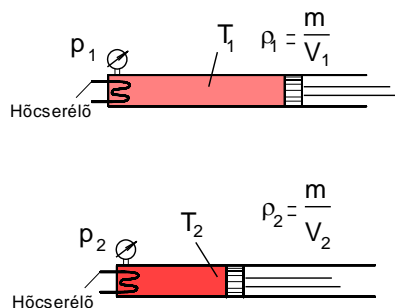
$$R_{\text{lev}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}, \quad 1.14$$

$$c_p = 1005 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad 1.15$$

$$c_v = 718 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad 1.16$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad 1.17$$

1.4 Egyszerű állapotváltozások ideális gázokban



1.4 ábra

Az **1.1 ábrán** látható hengerbe zárjunk levegőt, vagy egyéb gázt, és vizsgáljuk meg hogy, különböző állapotváltozások esetén milyen kapcsolat áll fenn az állapotjelzők között. Az állapotjelzők változásának nyomon követése az általános gáztörvény ismeretében lehetséges.

Létezik néhány egyszerű állapotváltozás, melyeknél egy-egy állapotjelzőt állandónak tartunk és a többi állapotjelző változását vizsgáljuk. Egy adott gáz állapotjelzői: a nyomás " p ", a sűrűség " ρ " és a hőmérséklet " T ". (Az " R "

nem állapotjelző.)

Vegyünk egy adott tömegű gázt az **1.4 ábra**_szerint. Az állapotváltozás során az "1" állapotból a "2" állapotba kerül a gáz miközben a tömege állandó marad és nem keveredik a környezetében lévő gázzal. Hőcserélőn keresztül fűthető, vagy hűthető.

1.4.1 Izotermikus állapotváltozás

Ha a hőmérséklet állandó $T_1 = T_2 = T = \text{const.}$, akkor izotermikus állapotváltozásról beszélünk.

Ha $p_2 > p_1$ a gáz összenyomódik, hogy állandó hőmérsékleten tartsuk közben hűteni kell a hőcserélő segítségével. Ha $p_2 < p_1$ a gáz kitágul, hogy a hőmérséklete állandó maradjon, fűteni kell. Ez a kísérlet az **1.1 ábra** izoterma vonalainak megrajzolásához használt kísérlet jóval a $T_{\text{krit.}}$ érték feletti hőmérsékleten. Behelyettesítve az általános gáztörvénybe:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = R \cdot T \quad \frac{p_2}{\rho_2} = R \cdot T \quad 1.18$$

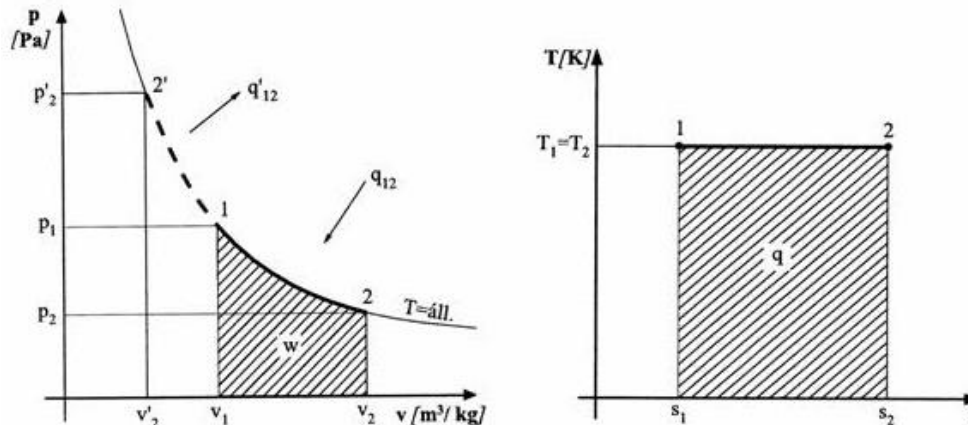
$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2}$$

Ha behelyettesítjük a $\rho = \frac{m}{V}$ kifejezést, akkor a következőt kapjuk:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

1.19

amely Boyle-Mariotte-törvény néven ismert. (**Robert Boyle 1627-1691** angol fizikus és **Edme Mariotte 1620-1684** francia fizikus egymástól függetlenül fedezték fel. Ez utóbbi tudós fedezte fel a szem vakfoltját is.) A törvény kimondja, hogy a térfogat fordítva arányos a nyomással, vagy a sűrűség egyenesen arányos a nyomással. Az **1.5 ábrán** látható az állapotváltozás p-v (nyomás- fajtérfogat) és T-s (hőmérséklet-entrópia) diagramokban.



Izoterm állapotváltozás

1.5 ábra

1.4.2 Állandó térfogat melletti állapotváltozás

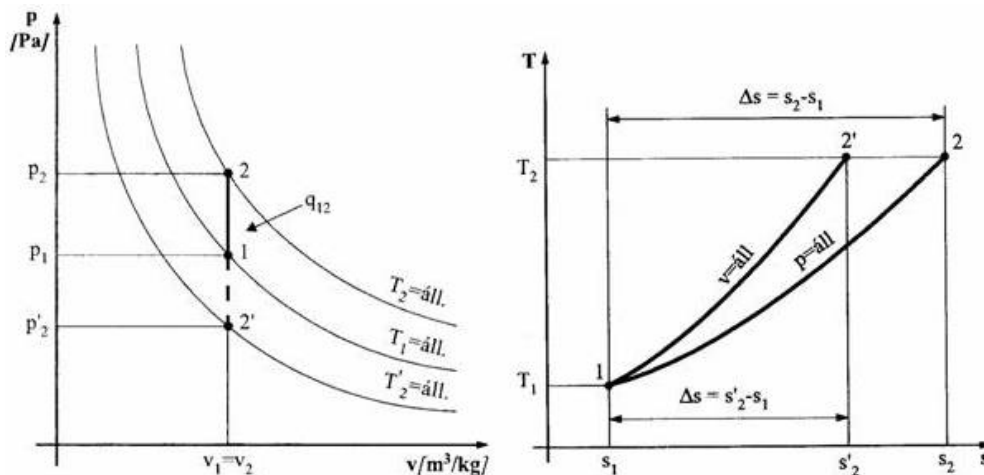
Ha a térfogat állandó, azaz $V_1 = V_2 = V = \text{const.}$, ekkor izochor állapotváltozásról beszélünk. Ezt úgy érhetjük el, hogy rögzítjük egy adott helyen a hengerben. Ha a gázt állandó térfogaton melegítjük, akkor a nyomása megnő $p_2 > p_1$, ha lehűtjük, akkor nyomása csökken $p_2 < p_1$. Helyettesítsük az általános gáztörvénybe a feltételeket:

$$\frac{p_1}{m/V} = \text{const.} \quad \text{és} \quad \frac{p_2}{m/V} = \text{const.}, \quad \text{amelyből a}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{eredményt kapjuk.} \quad 1.20$$

Ez **Gay-Lussac I. törvénye**. (**John Louis Gay-Lussac 1778-1850** francia kémikus és fizikus. A kénsvagyártásban használt ólomkamrás tornyot is ő találta fel, amit róla neveztek el.) Ez szintén egy egyszerű kapcsolat az állapotjelzők között, hisz a hőmérséklet és a nyomás egyenesen arányban változnak.

Az állapotváltozás közben az egységnyi tömegű gázból egy fok hűlés, vagy melegedés közben elvont, vagy bevitt hőt az állandó térfogaton mért fajhő, " c_v " adja meg.



Izochor állapotváltozás

1.6 ábra

1.4.3 Izobár állapotváltozás

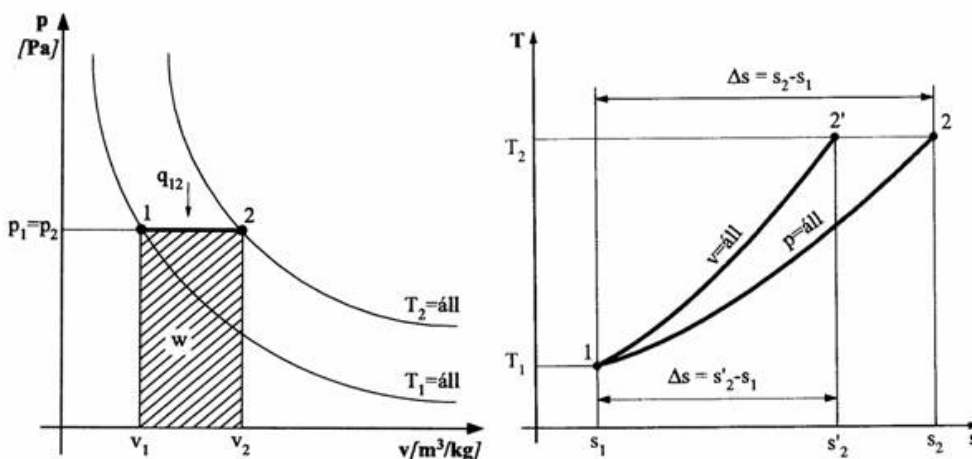
Ha a nyomás állandó $p_1 = p_2 = p = \text{constans}$, akkor izobár állapotváltozásról beszélünk. A kísérlet során a dugattyút engedjük elmozdulni (vagy toljuk befelé) egy állandó erő ellenében. Állandó nyomáson melegítve a gázt, a térfogata megnő $V_2 > V_1$, ha lehűtjük, akkor térfogata csökken $V_2 < V_1$. Helyettesítsük az általános gáztörvényt a feltételeket:

$$\frac{p}{\frac{m}{V_1}} = R \cdot T_1 \quad \text{és} \quad \frac{p}{\frac{m}{V_2}} = R \cdot T_2, \quad \text{amelyből a}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{eredményt kapjuk.} \quad 1.21$$

Ez **Gay-Lussac II. törvénye**, amely szerint a hőmérséklet és a térfogat egyenesen arányban változnak az állapotváltozás során.

Az állapotváltozás közben az egységnyi tömegű gázból egy fok hűlés, vagy melegedés közben elvont, vagy bevitt hőt az állandó nyomáson mért fajhő, " c_p " adja meg.



Izobár állapotváltozás

1.7 ábra

1.4.4 Adiabatus és súrlódásmentes állapotváltozás

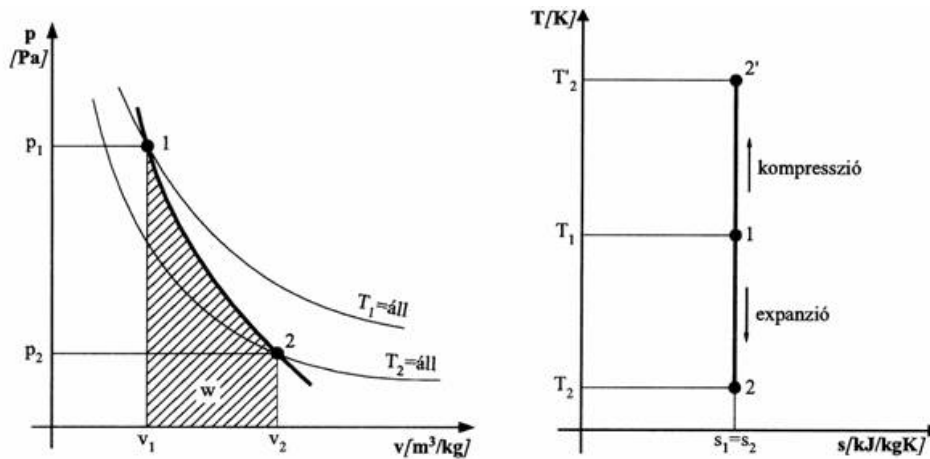
Amennyiben a nyomást is és a térfogatot is változtatjuk, de a rendszert a környezettől elszigeteljük, akkor adiabatus állapotváltozás játszódik le a gázban. Ekkor a dugattyú gyors ki-, vagy befelé mozgásával hozzuk létre az állapotváltozást. A hőközlésre nem hagyunk időt. Ezt izentropikus (adiabatus és súrlódásmentes) állapotváltozásnak is nevezik, mert az entrópia nem változik az állapotváltozás során, ha nincs belső súrlódás a közegben. Minden állapotjelző változik, de az állapotjelzők között fennáll a következő kapcsolat:

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} \quad 1.22$$

Behelyettesítve a gáztörvénybe és egyszerűsítve a

$$\frac{p_1}{T_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{p_2}{T_2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \text{ kifejezést kapjuk,} \quad 1.23$$

ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ az adiabatus, vagy izentropikus kitevő. (kétatomos gázokra $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$



Izentropikus állapotváltozás
1.8 ábra

1.4.5 Politropikus állapotváltozás

Tulajdonképpen ez egy teljesen általános állapotváltozás is lehet, mert mind a három állapotjelző változhat, sőt a környezetbe történhet hőleadás, vagy onnan hőfelvétel is. Ilyen esetben az állapotjelzők között a kapcsolatot a következő összefüggések adják:

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}, \quad 1.24$$

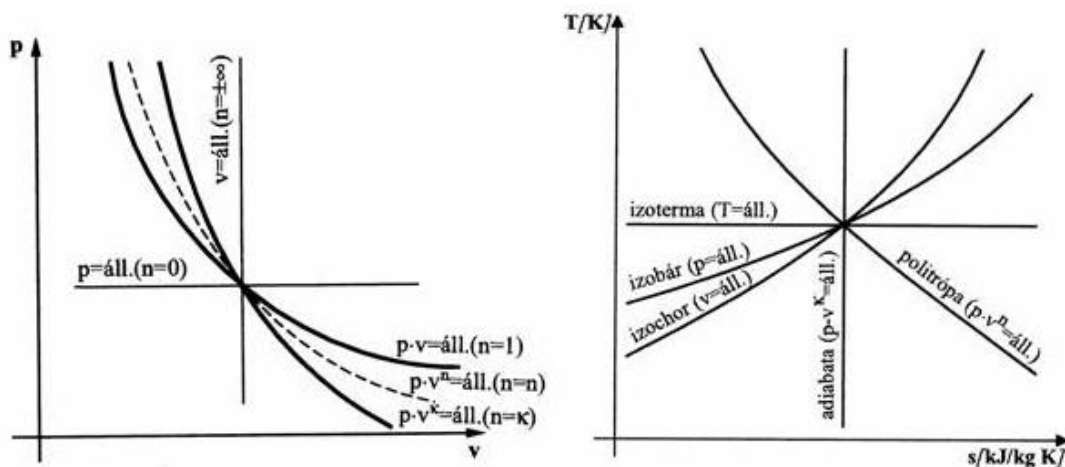
behelyettesítve a gáztörvénybe, akkor a nyomások és a hőmérsékletek közötti kapcsolatot itt is megkapjuk

$$\frac{p_1}{T_1^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{p_2}{T_2^{\frac{n}{n-1}}}, \quad 1.25$$

ahol "n" a politropikus kitevő. Ha összenyomódik a gáz és közben hűtjük is, akkor $n < \kappa$. Ha nincs hűtés, vagy még melegítjük is a gázt, akkor $n \geq \kappa$. Hasonló megfontolásokkal lehet az expanziónál az "n" és a "κ" kapcsolatát megadni.

Az adiabatikus és a politrópikus állapotváltozás kifejezései azonosak, kivéve a kitevő nagyságát.

Ha $n=1$, akkor a politrópikus állapotváltozás azonos az izotermikus állapotváltozással.



1.9 ábra Politropikus állapotváltozás

1.5 Folyadékok összenyomhatósága

1.2 táblázat

Folyadék	Rugalmassági modulus "E"
	Mpa
Etil alkohol	896
Benzin	1 062
Gépolaj	1 303
Víz	2 179
Glicerin	4 509
Higany	24 750
Acél	200 000

A folyadékok áramlásban szempontból majdnem minden esetben összenyomhatatlannak tekinthetők. A "p-v" diagramban az izotermák a folyadék területen közelítőleg $v=const.$, függőleges egyenesek. Az összenyomhatóság, vagy rugalmassági modulus a következő összefüggéssel adható meg:

$$E = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} \quad 1.26$$

Néhány folyadék rugalmassági modulusát a **1.2 táblázatban** foglaltuk össze. (A szilárdságtanban a

"nyomás" negatív előjelet kap, hogy az eredmény pozitív legyen, ezért szükséges a negatív előjel.) Az acél rugalmassági modulusát is feltüntettük, az összehasonlíthatóság kedvéért.

Például a víz térfogatának 0.5%-val történő összenyomásához 10.89 MPa nyomás szükséges, amely a normál légköri nyomásnak kereken százszorosa. A Föld legmélyebb helyén a Csendes óceánban lévő Marianna-árokban, ahol a tenger 11034 m mély, a nyomás a légköri 1 bar nyomásnak kereken 1100 szorososa. A víz relatív összenyomódása itt is csak 5%.

A folyadékok egyéb, fontos tulajdonságait, mint pl. a felületi feszültséget és a viszkozitást külön fejezetekben tárgyaljuk.



2. Termodinamikai alapfogalmak

2.1 A termodinamikai rendszer

A termodinamikai vizsgálatok a termodinamikai rendszerre vonatkoznak. A termodinamikai rendszer a tér egy, általunk kiválasztott, elhatárolt része. Az elhatárolás történhet egy valóságos fallal vagy egy képzelt elhatároló felülettel. A határoló falon belüli rész a termodinamikai rendszer. A termodinamikai rendszeren kívüli részt környezetnek nevezzük.

A rendszer és a környezet között a határoló falak tulajdonságaitól függően többféle kölcsönhatás jöhet létre. A legismertebb a **mechanikai kölcsönhatás**. A rendszer **mechanikai munkát** (W) végezhet a környezeten vagy a környezet a rendszeren. A **termikus kölcsönhatás** során hőmennyiség (Q) áramlik a rendszerből a környezetbe, vagy a környezetből a rendszerbe. A **tömegátadás** (m) során a rendszer és a környezet anyagot cserélhet. További kölcsönhatások is lejátszódhatnak a rendszer és környezete között, pl.: elektromos, mágneses stb. folyamatok, ezek végső soron a mechanikai kölcsönhatással analóg folyamatokat jelentenek. A továbbiakban a hangsúlyt az előzőleg felsorolt három kölcsönhatás vizsgálatára helyezzük.

A termodinamika rendszert a környezettől elválasztó falakat a felsorolt kölcsönhatások alapján a következő csoportokba soroljuk:

1. **Merev fal** mely minden mechanikai kölcsönhatást meggátol, ill. **deformálódó fal**, mely lehetővé tesz.
2. **Nem áteresztő** vagy **félleg áteresztő fal**, mely minden anyag, ill. csak egyes anyagok áthatolását akadályozza meg.
3. **Diatermikus** fal, mely lehetővé teszi vagy **adiatermikus** fal, mely megakadályozza a hőhatás formájában jelentkező (termikus) kölcsönhatást.

Az **adiatermikus** és nem áteresztő falakat, melyek tehát csak a mechanikai kölcsönhatást engedik meg, **adiabatikus falaknak**, az ilyen falakkal határolt rendszert pedig adiabatikus rendszernek, a bennük lejátszódó folyamatokat pedig adiabatikus folyamatoknak nevezzük.

A zárt rendszer amelynek falán nincs tömeg áramlás (magára hagyva nincs semmilyen kölcsönhatás)

A nyitott rendszer amelynek falán van tömeg áramlás.

Homogén rendszer az, amelyben az intenzív változók nem függenek a hely és az idő koordinátáktól.

2.2 A termodinamikai és kalorikus mennyiségek

A rendszer állapotának egyértelmű (egyértékű) függvényei, csak a rendszer pillanatnyi állapotától függenek, és függetlenek a rendszer előző állapotától és az állapotváltozástól, melyen keresztül a rendszer az adott állapotba jutott.

Az állapotjelzők lehetnek:

- skalár-,
- vektor-,
- tenzor mennyiségek.

Az állapotjelzők fajtái: – extenzív, – intenzív mennyiségek.

Extenzív állapotjelzők: a termodinamikai rendszer, tömegével, térfogatával arányos állapotjelzők. A termodinamikai rendszer egyes részeiben mért mennyiségek összegei jellemzik a teljes rendszerre. Ilyen pl.: a tömeg, az entrópia, az energia, stb.

Intenzív állapotjelzők: kiegyenlítő állapotjelzők. A termodinamikai rendszer egyes részeiben a teljes rendszerre jellemző mennyiség mérhető. Ilyen pl.: a nyomás, a hőmérséklet, stb.

Fajlagosított állapotjelzők: két extenzív állapotjelző hányadosa. Ilyen pl.: a sűrűség, a fajtérfogat, fajsúly stb.

Fázisjellemző mennyiségek: anyagjellemzők, pl. fajhő, hőtágulási együttható, hővezetési tényező, dinamikus viszkozitás.

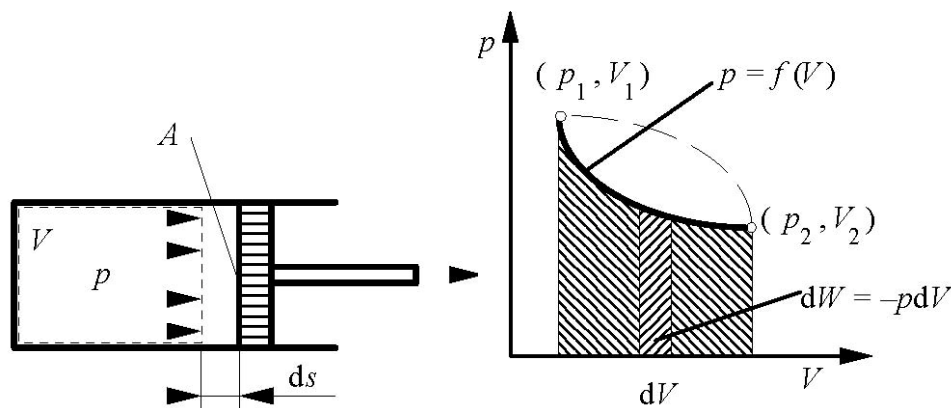
Nem állapotjelző, de igen fontos kalorikus jellemző a fajlagos hőmennyiség (q , [J/kg]) és a fajlagos munka (w , [J/kg]), mert megváltozásuk nagysága függ az állapotváltozás módjától.

2.3. A fajlagos munka és a fajlagos hő

Belső energia (U): A tömegközépponthez viszonyítva a rendszer mikroszkopikus elemei a legkülönbözőbb sebességgel mozognak, és az egymás közötti kölcsönhatásokból származó potenciális energiával rendelkeznek. Ez a mozgás a makroszkopikus rendszer nyugalma estén sem szűnik. Ezt az energiát, mely a rendszer mikroszkopikus építőelemeinek tömegközéppontra vonatkoztatott kinetikus és potenciális energiájának összegeként adódik, **belső energiának** nevezzük. Ideális gázok esetében a fajlagos belső energiát a $u = c_v \cdot T$ kifejezéssel számíthatjuk ki.

Munka (W): az erő és az elmozdulás vektor skaláris szorzata:

A munka a rendszer határfelületén fellépő energiáttranszport-mennyiség, melyet mechanikai kölcsönhatás vagy a hőmérséklet különbség vagy egyéb intenzív állapotjelzők inhomogenitása hoz létre.



A fizikai munka

2.1 ábra

$$dW = -p \cdot A \cdot ds$$

$$dW = -p \cdot dV$$

2.1

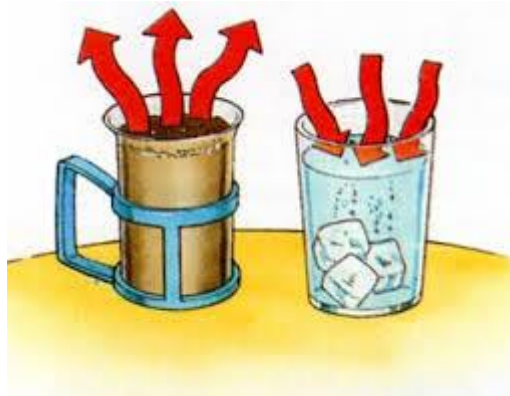
A fizikai munka (W)

A fizikai munka magában foglal mindenfajta, a rendszeren, illetve a rendszer által végzett munkát. Ez lehet kémiai, elektromos, mágneses, stb. munka, valamint lehet térfogati munka:

$$dW = -p \cdot A \cdot ds \quad 2.2$$

A rendszer szempontjából vizsgáljuk a munka előjelét. Ha pozitív, akkor a rendszer nyer munkát, ha negatív, akkor a rendszer ad le munkát a környezetnek. A rendszer által végzett (expanzió) munkája.

A hő (Q): a rendszer határfelületén fellépő, tömeg-kölcsönhatás nélküli energiatranszport-mennyiség, melyet a hőmérséklet-eloszlás inhomogenitása indukál. Nem állapotjelző, és nem azonosítható a rendszerben tárolt energiával. Például a **2.2. ábrán** a meleg kávécsészéből a környezetbe adódik át a hő, a kávé lassan lehűl, de mennyisége nem változik (a kevés párolgás elhanyagolható). Vagy a hideg jeges ital lassan felmelegszik, mert a környezetből hő áramlik a pohárba, de tömeg mennyisége itt sem változik.



A hő
2.2 ábra

A hő átlépve a rendszer határát a rendszert alkotó elemi részek (atomok, molekulák, szubatomi részecskék) potenciális és/vagy kinetikus energiáját növeli, vagy éppen az említett energiák csökkenése a forrása annak a hőnek, mely a rendszerből kilép. Annak a hőnek az előjelét tekintjük pozitívnak, amely az adott rendszer felé áramlik és negatívnak a rendszerből távozót. Az adott rendszerrel kapcsolatos összes hő jelölésére a Q-t használjuk, a tömegegységre fajlagosított mennyiségét q-val jelöljük, a szokásos nagybetű-kisbetű használatnak megfelelően.

A munka és a hő közös tulajdonságai:

- A munka, és a hő a rendszer határfelületén fellépő, a rendszer és környezete közötti kölcsönhatáshoz tartozó jellemző.
- A munka és a hő is a termodinamikai rendszer két állapota közötti átmenetet (tranzienst) jellemzi és nem a rendszert.
- Mindkettő az átmeneti folyamathoz tartozó jellemző, azaz folyamatjellemzők és **nem állapotjelzői** a rendszernek.
- A munka és a hő is függvénye az állapotváltozás módjának, azaz útfüggők, ebből következően nem állapotjelzői a rendszernek.

2.2 A termodinamikai rendszer energiataralma, a termodinamika alaptörvényei

2.2.1 A termodinamika 0. főtétele

A magára hagyott (minden kölcsönhatással szemben tökéletesen szigetelt) termodinamikai rendszer akkor van egyensúlyban, ha benne semmilyen makroszkopikus változás nem észlelhető, ebben az esetben az intenzív állapotjelzők a rendszeren belül homogén eloszlásúak. Ha két vagy több egyensúlyban lévő termodinamikai rendszer egymással kölcsönhatásban van, vagyis nincsenek egymástól minden kölcsönhatással szemben elszigetelve, akkor a vizsgált rendszereknek annyi olyan, minden rendszerben **azonos értékű intenzív tulajdonsága** van, mint ahány kölcsönhatással szemben a határoló falak átjárhatók. A főtétele egy más megfogalmazásban is kimondható: A kölcsönhatásban álló rendszerek egyensúlyának szükséges és elegendő feltétele a lehetséges kölcsönhatásokhoz tartozó intenzív állapotjelzők - empirikus intenzitás paraméterek - egyenlősége. Például, ha van két rendszer, amelyeket egy hőátteresztő (diatermikus), de merev fal választ el, akkor a hőmérsékletük lesz bizonyos idő múlva azonos., de a nyomásnak ellenáll, így a nyomás nem egyenlítődik ki. Másik példában, ha a fal deformálható, de hőszigetelő (adiatermikus) fal, akkor a nyomás fog kiegyenlítődni, a hőmérséklet viszont nem.

A termodinamikai egyensúly tranzitív, ez azt jelenti, hogy ha az A rendszer egyensúlyban van a B rendszerrel, a B pedig a C rendszerrel, akkor az A rendszer egyensúlyban van a C rendszerrel is. A termodinamikai egyensúly szimmetrikus, azaz ha az A rendszer egyensúlyban van a B rendszerrel, akkor a B rendszer is egyensúlyban van az A rendszerrel. Ez a tranzitivitás az alapja a hőmérsékletmérésnek. Például, ha lázat mérünk, a testünk az „A” rendszer, a lázmérő a „B” rendszer. Amikor a lázmérőt hitelesítették, akkor a „B” rendszert, a lázmérőt összehasonlították egy etalonnal, ami a „C” rendszert jelenti. Hitelesítéskor „B” és „C” rendszer volt termodinamikai egyensúlyban. Lázméréskor pedig a „A” és „B” rendszer volt termodinamikai egyensúlyban. Ebből tudjuk, hogy mekkora a lázunk. Testünk és a hiteles etalon is egyensúlyban van a 0. főtétele szerint.

Hőmérsékletmérésre olyan anyagot kell választani, melynek van olyan, egyszerűen és könnyen mérhető tulajdonsága, mely a hőmérséklettel egyértelműen változik. Hőmérséklet mérés céljára alkalmas minden olyan anyagtulajdonság, amely egyértelmű függvénye a hőmérsékletnek. Célszerűen, valamely könnyen mérhető tulajdonságot alkalmazunk. Ilyen tulajdonság lehet pl. kapilláris csőben lévő folyadékoszlop hosszúsága, állandó nyomáson a térfogat, állandó térfogat mellett a nyomás, elektromos ellenállás, termo- elektromos feszültség, kristály (pl. kvarc) rezgési frekvenciája stb. Bármely hatást is választva, szükség van jól reprodukálható alappontokra, melyekhez az adott tulajdonság, adott körülmények közötti mérőszámait hozzárendeljük. Legyen „t” a hőmérsékleti tulajdonság, és egyszerű függvény határozza meg a hőmérsékleti skálát.

A különböző kialakítású hőmérők jellemzői:

Hőmérő	Jellemző tulajdonság (t)
Folyadékoszlop üvegcső	Hosszúság, l

Állandó nyomáson tartott gáz	Térfogat, V
Állandó térfogaton tartott gáz	Nyomás, p
Villamos ellenállás	Villamos ellenállás, R
Termoelem	Villamos feszültség, U

Kalibrálásra olyan mennyiséget kell választani, amelynek meghatározása egy könnyen reprodukálható állapot segítségével történhet. Ezt a kiválasztott állapotot a hőmérsékleti skála alappontjának tekintjük. Erre a célra a víz hármaspontját választották, azt az állapotot melyen a víz három fázisa egymással termodinamikai egyensúlyban van. A Celsius skála másik pontja a víz forráspontja, 1 bar nyomáson. A Celsius skálán ez 100 °C jelent. Ezen kívül több egyéb hőmérsékleti skála is létezik. Az angolszász országokban a Fahrenheit, amely a víz fagyáspontján 32 F a víz forráspontjánál 212 F. Tehát null pontja és a skálája is eltér a Celsius skálától. A termodinamika első főtétele a termodinamikai rendszerekre kimondja az energia megmaradást, vagyis azt, hogy az energia a termodinamikai folyamatok során átalakulhat, de nem keletkezhet és nem veszhet el.

Ezt gyakran a következőképpen fogalmazzák meg: Egy rendszer belső energiájának változása egyenlő a rendszerrel közölt hő és a rendszeren végzett munka összegével, azaz

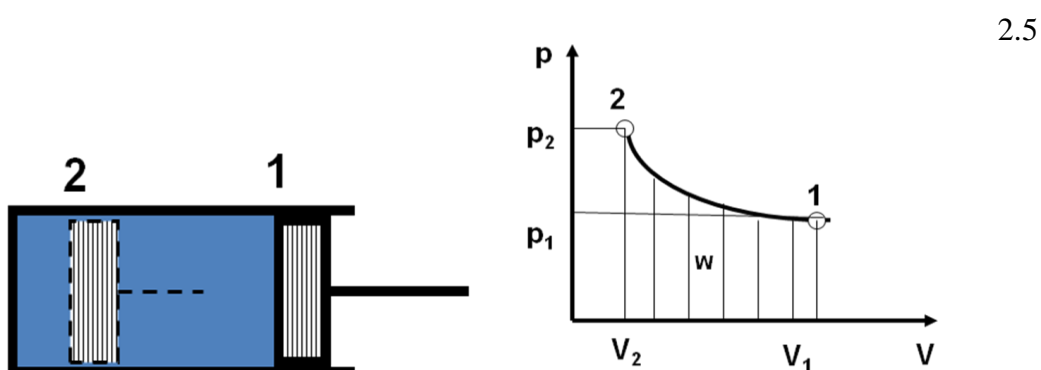
$$\Delta U = Q + W \quad 2.3$$

Ezt gyakran elemi változásokra írjuk fel, ekkor $dU = \delta Q + \delta W$, vagy gyakori az egységnyi tömegre vonatkozó felírás is, ekkor kis betűket használunk:

$$du = \delta q + \delta w \quad 2.4$$

2.2.2 Az első főtétel zárt rendszerben

Az első főtétel zárt rendszerben, vagyis, amikor nincs tömegcsere a környezettel, akkor a belső energia megváltozása két állapot között egyenlő a közölt hővel plusz a rendszeren végzett fizikai munkával. Képletekkel megfogalmazva a következő:



Fizikai munka zárt rendszerben $W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$

2.3 ábra

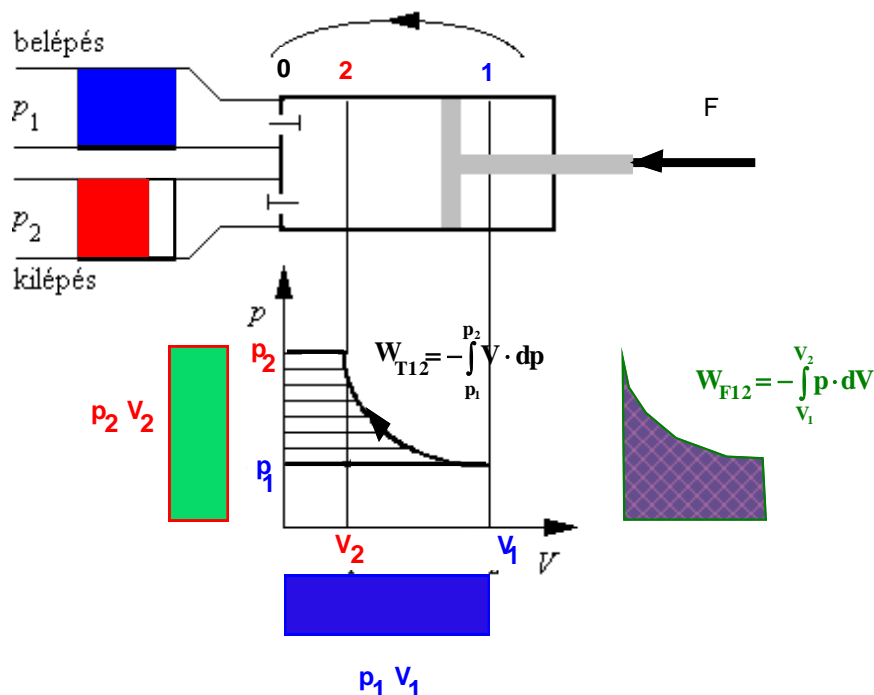
$$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \quad 2.6$$

2.2.3 Az első főtétel nyitott rendszerben

A technikai életben nagyon gyakran használunk nyitott rendszereket, amikor van tömegcsere a környezettel. Ilyen esetben célszerű bevezetni két újabb fogalmat, az **entalpiát** és a **technikai munkát**.

A technikai munka

A nyitott rendszerhatároló felületein a tömegtranszport jöhet létre. A tömegtranszport következtében a nyitott rendszer tömege az időben változhat, ekkor instacioner nyitott rendszerről beszélünk. Ha belépő és távozó anyagáramok értékei egymással időtől függetlenül megegyeznek állandósult vagy stacioner nyitott rendszerről beszélünk. Egy ilyen rendszerben vizsgáljuk a munkát. A nyitott rendszerek vizsgálatát a **2.4 ábrán** látható periodikusan működő dugattyús kompresszoron vizsgáljuk. A kompresszor a p_1 kisebb nyomású helyről szív és a p_2 nagyobb nyomású helyre nyomja a közeget. Tegyük fel, hogy a dugattyú a munkaközeget teljes egészében ki tudja szorítani a hengerből, nincsen káros tér.



Technikai munka stacioner nyitott rendszerben
2.4 ábra

Az első ütemben a dugattyú a 0-1 szakaszon mozog kifelé, a térfogat növekszik, a rendszer munkát ad le a környezetnek, a munka nagysága $W_1 = p_1 \cdot V_1$, ami negatív. A sűrítés során a

dugattyú az 1 és 2 pontok között mozog befelé, a környezet végez munkát a rendszeren, ez a fizikai munka $W_{F12} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$, ez pozitív. A 2-0 szakaszon a dugattyú tovább mozog befelé,

a környezet végez munkát a rendszeren, ez pozitív előjelű. Adjuk össze előjelhelyesen a háromféle munkát. Az előjeles összeg a technikai munka.

$$W_{T12} = p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1 - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp \quad 2.7$$

A technikai munka tehát a függőleges, nyomás tengely felőli görbe alatti területet jelenti az ábrán. Mivel p_1 kisebb, mint p_2 , ezért a dp pozitív, vagyis nyomásnövekedés történik a rendszerben a két állapot között, tehát technikai munkát kap a rendszer.

Kompresszor vizsgálata



A 2.4 ábrán látható ideális kompresszornál határozzuk meg a fizikai, a technikai munkát, a ki és betolási munkát! Tételezzük fel, hogy a kompresszornak nincs káros tere, és nincsen hőközlés a környezetre, tehát adiabatikus az állapotváltozás.

Adatok: $p_1 = 1 \text{ bar (abs)}$; $p_2 = 2 \text{ bar (abs)}$; $V_1 = 1000 \text{ cm}^3$; $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$;

$c_p = 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$; $\kappa = 1,4$; $t_1 = 20^0 \text{ C}$

Megoldás: A kompresszor a beszívott levegőt összenyomja addig a pontig, ameddig a nyomása el nem éri a nyomóoldali $p_2 = 2 \text{ bar}$ nyomást. Ekkor kinyit a nyomószelep és az összenyomott levegőt kitolja a nyomócsőnkba.

Első feladatként a V_2 térfogatot kell kiszámítanunk. Felhasználva hogy adiabatikus az állapotváltozás, felírhatjuk, hogy

$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$, amiből kifejezve a V_2 térfogatot

$$V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 609,5 \text{ cm}^3$$

Ezek után a **belépési munka**

$$W_1 = p_1 \cdot V_1 = 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,001 \text{ m}^3 = 100 \text{ Nm}$$

A **kilépési munka**

$$W_2 = p_2 \cdot V_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,000609 \text{ m}^3 = 121,9 \text{ Nm}$$

A fizikai munka egy ütem alatt $W_{F12} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$

Használjuk ki, hogy adiabatikus az állapotváltozás, vagyis a kompresszió közben fennáll, hogy $p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa$. Ebből fejezzük ki a p nyomást: $p = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa}$, amit a fizikai munka kifejezésébe helyettesítünk.

$$\begin{aligned} W_{F12} &= - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa} \cdot dV = -p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right]_{V_1}^{V_2} = -\frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{1-\kappa} \cdot [V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}] = \\ &= -\frac{10^5 \cdot 0,001^{1,4}}{1-1,4} \cdot [0,000609^{1-1,4} - 0,001^{1-1,4}] = 54,85 \text{ Nm} \end{aligned}$$

A pozitív előjel azt mutatja, hogy a rendszer munkát nyer, környezet végez munkát. Jelen esetben a dugattyú.

A technikai munka egy ütem alatt $W_{T12} = \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp$

Használjuk ki, hogy adiabatikus az állapotváltozás, vagyis a kompresszió közben fennáll, hogy $p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa$. Fejezzük ki ebből a V térfogatot $V = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, amit a technikai munka kifejezésébe helyettesítve

$$\begin{aligned} W_{T12} &= \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = \int_{p_1}^{p_2} \frac{V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{p^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot dp = V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left[\frac{p^{1-\frac{1}{\kappa}}}{1-\frac{1}{\kappa}} \right]_{p_1}^{p_2} = -\frac{\kappa \cdot V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\kappa-1} \cdot \left[p_2^{1-\frac{1}{\kappa}} - p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} \right] = \\ &= \frac{1,4 \cdot 0,001 \cdot (10^5)^{\frac{1}{1,4}}}{1,4-1} \cdot \left[(2 \cdot 10^5)^{\left(1-\frac{1}{1,4}\right)} - (10^5)^{\left(1-\frac{1}{1,4}\right)} \right] = 76,65 \text{ Nm} \end{aligned}$$

A pozitív előjel azt mutatja, hogy a rendszer munkát nyer, környezet végez munkát. Jelen esetben a dugattyú. Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény megfelel-e a fizikai és a technikai munka közötti összefüggésnek!

$$W_{T12} = W_2 - W_1 + W_{F12}$$

$$76,65 = 121,9 - 100 + 54,85$$

$$76,65 \cong 76,75 \text{ Nm}$$

A különbség a számításkor végzett kerekítések miatt jött létre.

Az entalpiaváltozás

A következő fejezet részben megadjuk az entalpia pontos definícióját, itt előzetesen kiszámítjuk a kompresszorra, és összehasonlítjuk a technikai munkával. A kompresszoron áthaladó levegő entalpia változását akkor tudjuk legegyszerűbben kiszámítani, ha kiszámítjuk a hőmérséklet emelkedését és a tömegét.

Elsőként számítsuk ki a kompresszorba jutó levegő tömegét, ehhez a belépő levegő sűrűségére lesz szükségünk. Ezt az általános gáztörvény, szolgáltatja:

$$\frac{p}{\rho} = RT. \text{ Alkalmazva az 1 állapotra } \rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = \frac{10^5}{287 \cdot (273 + 20)} = 1,189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Így már ki tudjuk számítani a belépő levegő tömegét.

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = 1,189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001 \text{m}^3 = 0,001189 \text{kg}$$

Második lépésben ki kell számítanunk a kilépés hőmérsékletét T_2 -t.

Adiabatikus állapotváltozásnál a hőmérséklet és a nyomás kapcsolatát már korábban kiszámítottuk:

$$\frac{p_1}{T_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{p_2}{T_2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$\text{Ebből kirendezve a kilépő hőmérsékletet: } T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 357,1 \text{K}$$

Az entalpia változása:

$$H_{12} = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) = 0,001189 \text{kg} \cdot 1006 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (357,1 - 293) = 76,68 \text{J}$$

A kapott eredményünk szerint az entalpiaváltozás megegyezik a technikai munkával.

Az entalpia

Vizsgáljunk egy folyamatosan átáramlott, stacionárius nyitott rendszert, egy gőzturbinát, melyet a **2.5 ábra** mutat. Írjuk fel a belső energia megváltozását a kezdeti (1) és a végállapot (2) között. Az 1 állapotban a gőz nyomása és hőmérséklete magasabb, a 2 állapotban a gőz nyomása és hőmérséklete lecsökken. A gőzturbinán ugyanannyi tömeg áramlik be és ki. A gőzturбина a gőz energiájából mechanikai munkát állít elő. Vagyis a rendszer, a gőz folyamatosan technikai munkát veszít. Ezt a gőz energiájának rovására teszi.

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{F12}$$

Az előzőeket felhasználva a fizikai munkát fejezzük ki a technikai munkával:

$$W_{F12} = W_{T12} + W_2 - W_1$$

Írjuk be ezt a belső energia megváltozásába:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{T12} + W_2 - W_1 = Q_{12} + W_{T12} - p_2 \cdot V_2 + p_1 \cdot V_1 \quad 2.8$$

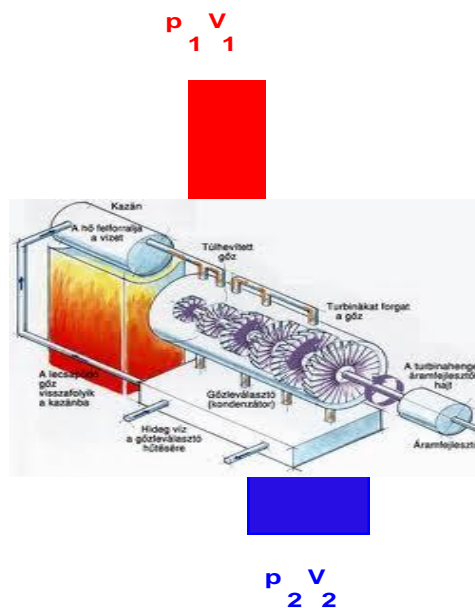
Rendezzük az azonos indexűeket egy oldalra.

Az egyenlet bal oldalán álló zárójeles tagok helyett egy új mennyiséget vezetünk be, az entalpiát. Az entalpia (H) állapotváltozó, mivel a benne szereplő jellemzők mind állapotváltozók, melyet a következő egyenlettel definiálunk:

$$H = U + p \cdot V \quad 2.9$$

Ez a termodinamika I. Főtételének nyitott rendszerre érvényes alakja. Az állapotváltozásoknak tehát a technikai és a fizikai munkáját is meg tudjuk határozni. Hogy a két munka közül melyik lesz egy adott rendszer munkájával egyenlő, az dönti el, hogy milyen a rendszer. Zárt rendszer munkája: az állapotváltozás fizikai munkája; nyitott rendszer munkája: az állapotváltozás technikai munkája. Ideális gázok esetében a fajlagos entalpiát a $h = c_p \cdot T$ kifejezéssel számíthatjuk ki.

$$(U_2 + p_2 \cdot V_2) - (U_1 + p_1 \cdot V_1) = Q_{12} + W_{T12} \quad 2.10$$



Gőzturbina stacioner nyitott rendszerben
2.5 ábra

$$H_{12} = Q_{12} + W_{T12}$$

Gázturbina vizsgálata



A 2.6 ábrán látható ideális gázturbinánál határozzuk meg a fizikai, a technikai munkát a ki és betolási munkát és az entalpia változását! Tételezzük fel, hogy nincsen hőközlés a környezettel, tehát adiabatikus az állapotváltozás. Vizsgáljunk egy adott időegység alatt be- és kiáramló gáz energia tartalmát.

Adatok: $p_1 = 6\text{bar (abs)}$; $p_2 = 1\text{bar (abs)}$; $V_1 = 1000\text{cm}^3$; $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$;

$$c_p = 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}; \kappa = 1,4; t_1 = 400^0 \text{C}$$

Megoldás: A gázturbinába a komprimált, magas hőmérsékletű levegő (égéstermék) beáramlik. A turbinán keresztül áramolva meghajtja a turbina tengelyét és közben lehűl és nyomása lecsökken, majd kiáramlik a szabadba.

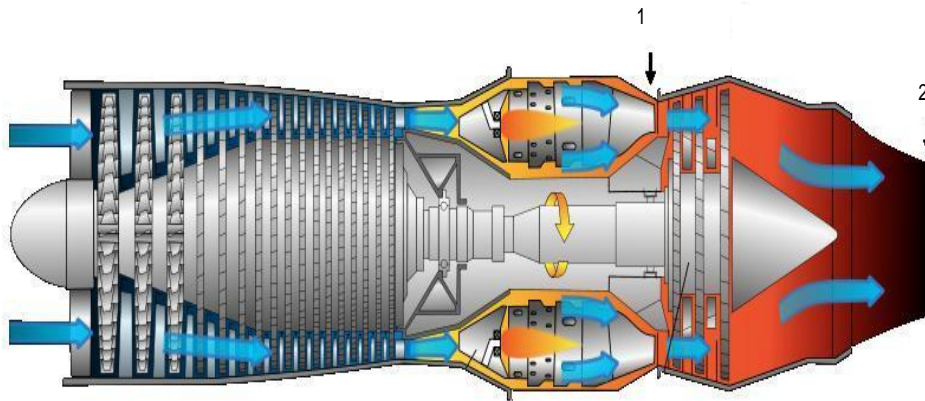
Első feladatként a V_2 térfogatot kell kiszámítanunk. Felhasználva, hogy adiabatikus az állapotváltozás, felírhatjuk, hogy

$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$, amiből kifejezve a V_2 térfogatot

$$V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1000 \cdot \left(\frac{6}{1}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 3596 \text{ cm}^3$$

Ezek után a **belépési munka**

$$W_1 = p_1 \cdot V_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,001 \text{ m}^3 = 600 \text{ Nm}$$



Gázturbina stationer nyitott rendszerben
2.6 ábra

A **kilépési munka**

$$W_2 = p_2 \cdot V_2 = 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,00359 \text{ m}^3 = 359,69 \text{ Nm}$$

A **fizikai munka** egy ütem alatt $W_{F12} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$

Használjuk ki, hogy adiabatikus az állapotváltozás, vagyis a kompresszió közben fennáll,

hogy $p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa$. Ebből fejezzük ki a p nyomást: $p = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa}$, amit a fizikai munka

kifejezésébe helyettesítünk.

$$\begin{aligned} W_{F12} &= - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa} \cdot dV = -p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right]_{V_1}^{V_2} = -\frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{1-\kappa} \cdot [V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}] = \\ &= -\frac{6 \cdot 10^5 \cdot 0,001^{1,4}}{1-1,4} \cdot [0,00359^{1-1,4} - 0,001^{1-1,4}] = -600,9 \text{ Nm} \end{aligned}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a rendszer veszít munkát, tehát a környezet számára munkát termel a folyamat.

A technikai munka egy ütem alatt $W_{T12} = \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp$

Használjuk ki, hogy adiabatikus az állapotváltozás, vagyis a kompresszió közben fennáll,

hogy $p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa$. Fejezzük ki ebből a V térfogatot $V = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, amit a technikai

munka kifejezésébe helyettesítve

$$W_{T12} = \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = \int_{p_1}^{p_2} \frac{V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{p^{\frac{1}{\kappa}}} \cdot dp = V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left[\frac{p^{1-\frac{1}{\kappa}}}{1-\frac{1}{\kappa}} \right]_{p_1}^{p_2} = -\frac{\kappa \cdot V_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\kappa-1} \cdot \left[p_2^{1-\frac{1}{\kappa}} - p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} \right] =$$

$$= \frac{1,4 \cdot 0,001 \cdot (6 \cdot 10^5)^{1,4}}{1,4-1} \cdot \left[(10^5)^{\left(1-\frac{1}{1,4}\right)} - (6 \cdot 10^5)^{\left(1-\frac{1}{1,4}\right)} \right] = -841,39 \text{ Nm}$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a rendszer veszít munkát, tehát a környezet számára munkát termel a folyamat.

Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény megfelel-e a fizikai és a technikai munka közötti összefüggésnek!

$$W_{T12} = W_2 - W_1 + W_{F12}$$

$$-841,29 \text{ J} \cong 359,69 - 600 - 600,9 = -841,39 \text{ J}$$

A különbség a számításkor végzett kerekítések miatt jött létre.

Az entalpiaváltozás

A gázturbinán áthaladó levegő entalpia változását akkor tudjuk legegyszerűbben kiszámítani, ha kiszámítjuk a hőmérséklet emelkedését és a tömegét.

Elsőként számítsuk ki a turbinába jutó levegő tömegét, ehhez a belépő levegő sűrűségére lesz szükségünk. Ezt az általános gáztörvény, szolgáltatja:

$$\frac{p}{\rho} = RT. \text{ Alkalmazva az 1 állapotra } \rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = \frac{6 \cdot 10^5}{287 \cdot (273 + 400)} = 3,106 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Így már ki tudjuk számítani a belépő levegő tömegét.

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = 3,106 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001 \text{ m}^3 = 0,003106 \text{ kg}$$

Második lépésben ki kell számítanunk a kilépés hőmérsékletét T_2 -t.

Adiabatikus állapotváltozásnál a hőmérséklet és a nyomás kapcsolatát már korábban kiszámítottuk:

$$\frac{p_1}{T_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{p_2}{T_2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

Ebből kirendezve a kilépő hőmérsékletet: $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 693 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1,4} = 403,35 \text{ K}$

Az entalpia változása:

$$H_{12} = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) = 0,003106 \text{ kg} \cdot 1006 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (403,35 - 693) = -841,8 \text{ J}$$

A kapott eredményünk azt mutatja, hogy az entalpiaváltozás megegyezik a technikai munkával. A nyitott rendszerre felírt I. főtétel szerint

$$H_{12} = Q_{12} + W_{T12}$$

ennek kell teljesülnie, ha nincsen hőközlés a környezettel.

2.3 Az termodinamika második főtétele

A második főtétel a spontán hőtani folyamatok irányát szabja meg. Több, látszólag lényegesen különböző megfogalmazása van.

Clausius-féle megfogalmazás (1850.): A természetben nincs olyan folyamat, amelyben a hő önként, külső munkavégzés nélkül hidegebb testről melegebbre menne át. Csakis fordított irányú folyamatok lehetségesek.

Kelvin-Planck-féle megfogalmazás (1851., 1903.): A természetben nincs olyan folyamat, amelynek során egy test hőt veszít, és ez a hő munkává alakulna át. Szemléletesen egy hajó lehetne ilyen, amelyik a tenger vizéből hőenergiát von el és a kivont hőenergiával hajtja magát. Ez nem mond ellent az energia megmaradásnak, mégsem kivitelezhető.

Az ilyen gépet másodfajú perpetuum mobile perpetuum mobilének nevezzük, tehát az állítás szerint nem létezik másodfajú perpetuum-mobile. A két megfogalmazás egymásból következik, de a levezetése nem teljesen egyszerű.

A második alaptörvénynek ezek és az ezekhez hasonló megfogalmazásai zavarbaejtőek, hiszen a fizika többi, összefüggéseket megállapító törvényeivel szemben valaminek a létezését tagadják. Egy jobb megfogalmazás végett egy új fogalom került bevezetésre: az entrópia. A termodinamika második alaptörvénye az entrópia felhasználásával a következőképpen fogalmazható meg: a spontán folyamatok esetében a magukra hagyott rendszerek entrópiája nem csökkenhet.

2.3.1 Az entrópia

Az entrópia elég összetett és viszonylag nehezen megérthető fogalom.

A következőkben idézek néhány megfogalmazást:

„Az entrópia a tudomány (elsősorban a hőtán és az informatika) fontos fogalma, egy rendszer rendezetlenségi fokát jellemzi. Az entrópia fogalmát Rudolph Clausius (1822–1888) vezette be, és ezzel jellemezte a termodinamikában az anyagi rendszerek molekuláris rendezetlenségét, illetve termodinamikai valószínűségének a mértékét. Ebből következtetni lehet a maguktól végbemenő folyamatok irányára: a természetben egyre valószínűbb állapotok következnek be. Például a hő a melegebb testről a hidegebb test felé áramlik. Tehát

bizonyos munkamennyiség minden spontán folyamatnál kárba vész, hővé alakul át. Emiatt a természetben a spontán folyamatok visszafordíthatatlanok. A munka, de bármely energiafajta is maradéktalanul hővé alakítható, míg a hő csak részben alakítható át másfajta energiává (ezért tartják alacsonyabb rendű energiának). Az entrópia és a rendezetlenség egyenértékűsége elvben még a termodinamikában felbukkan, de végleg Erwin Schrödinger tisztázta az életjelenségek kapcsán. Később – a formai hasonlóság alapján – Neumann János javasolta Shannonnak, hogy képletét nevezze entrópiának. De mivel negatív előjel szerepelt a képlet előtt, negentrópia lett a neve (régén antientrópia is), ami a rendszerek rendezettségének mértékét fejezi ki.

„Az esetleges félreértések minimalizálása érdekében összefoglalom, hogy mit értek a Clausiusi termodinamika alatt. A Clausiusi termodinamika Clausius eredeti megfogalmazásában a termodinamika II. főtétele: "a hő soha nem megy magától a hidegebb helyről a melegebb helyre", azaz magától a hőmérséklet különbség sohasem nő, mindig csökken. Clausiusi felépítésben a hő a kitüntetett fogalom, és a termodinamika matematikai megfogalmazásában az entrópiát (S) a

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad 2.11$$

összefüggéssel vezetjük be. Azaz az elmélet építés feladata az integráló osztó létezésének és unicitásának bizonyítása. A termodinamika egyik fontos eredménye az abszolút entrópia és az abszolút hőmérséklet skála létezése, azaz T a hő integráló osztója.”

„A második főtétel ebben a megfogalmazásban igen bonyolult, de egy egyszerű formában nagyon érthetővé válik: A hőmérséklet különbségek eltűnése nagyon hétköznapi tapasztalat. Miért kell ezt kimondani? Kollégája, Gustav Zeuner, Clausius szemére is vetette, hogy a javasolt II. főtétele banalitás. Ezen az alapon természettörvényként kimondhatjuk akár azt is, hogy a folyó mindig lefele folyik. Gustav Zeunernak részben igaza volt. Természetes, hogy forró kávé lehűl a szobában, a jég elolvad. Már a gyerekek is megértik a Jean viccet:

- Jean fázom, hány fok van idebenn?

- 16

- és kint?

- 6

- Eressze be azt a 6-ot is!

A termodinamika második főtételéhez hasonló tételt tulajdonképpen megfogalmazhatnánk a mechanikában is. Például, hogy a Földön minden test (levegőnél nehezebb) lefelé esik. Ha fel akarjuk emelni, akkor munkát kell végeznünk.

De próbáljuk megérteni, hogy a bevezetett entrópiával hogyan tudjuk átfogalmazni a hőmérséklet kiegyenlítődést. „

A második főtétel másik megfogalmazása az, hogy egy zárt rendszer összentrópiája nem csökkenhet.

Vagy matematikai felírásban

$$\sum \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad 2.12$$

Jobb megvilágítás érdekében idézem a Pallas lexikon ide vonatkozó megfogalmazását: „A termodinamika II. főtétele szerint zárt rendszer entrópiája nem csökkenhet. Ha a zárt rendszerben lejátszódó folyamat megfordítható (reverzibilis), az entrópia állandó marad. Ha a folyamat meg nem fordítható (irreverzibilis), s a természetes módon zajló folyamatok ilyenek, a rendszer entrópiája nő. Az entrópia a rendezetlenség mértéke. Az entrópia növekedése a rendezetlenség fokozódása. Az entrópia maximumának elérése azt jelenti, hogy beállt a teljes nyugalmi állapot, a teljes kiegyenlítetttség, a teljes szétszórtság. Ebben a rendezetlenség foka a lehető legnagyobb, a rendszerben semmiféle csoportosulás, szervezettség nem észlelhető. A hőhalál-elmélet szerint idővel a világegyetem egésze elkerülhetetlenül a maximális entrópia, azaz a teljes kiegyenlítetttség állapotába jut. Jelenlegi ismereteink alapján azonban 1996: nem dönthető el, hogy a távoli jövőben mikorra várható, bekövetkezik-e, s egyáltalán bekövetkezik-e a világegyetem hőhalála. - A nyílt, a környezettel kölcsönhatásban álló rendszerek entrópiája állandó maradhat, „v” akár csökkenhet is, ha közben a környezet entrópiája megfelelően növekszik. Pl. az élő létét, növekedését, szaporodását entrópia csökkentő folyamatok kísérik, ezekkel egyidőben azonban környezetükben leépülést okozó, az előbbinél nagyobb mértékű entrópia-növekedéssel járó folyamatok zajlanak. Tehát az élőből és környezetéből álló rendszer entrópiája már növekszik. - Az entrópia, mint a rendezetlenség mértéke és a valószínűség fogalma igen közeli kapcsolatba hozhatók egymással. Durván szólva az entrópia annak valószínűsége, hogy a rendszer egy adott állapotban található, s ennél fogva a legkisebb entrópiája a legkevésbé valószínű állapotoknak van. Az entrópia növekedésének a leginkább valószínű állapotok felé mutató átalakulás felel meg. A valószínűségi értelmezés lehetővé teszi, hogy az ~ fogalmát az információ-elméletben is alkalmazzák.” [Pallas VI:186. - KL II:21. - LThK III:904.]

A hőtanban a bevezetett entrópia fogalomnak praktikus jelentősége van. Ez entrópia állapotjelzőként szerepel és a hőtani folyamatok lefolyását nagyon gyakran T-s diagramokban igen jól lehet szemléltetni. A következő fejezetekben ezeket fogjuk alkalmazni.

Megjegyzés: Ilyen jellegű fogalmat a mechanika tárgyalása során is be lehetne vezetni, de ott egészen jól megvagyunk nélküle. Helyette azt mondjuk: „hanyagoljuk el a súrlódást”. Sőt be lehet vezetni egyéb tudományokban is pl. az informatikában alkalmazzák is.

2.4 A termodinamika III. főtétele

Csak megemlítjük, a termodinamika III. főtételeit. A Nernst-féle hőtétel: Bármely fizikai vagy kémiai átalakulást kísérő entrópiaváltozás nullához tart, ha a hőmérséklet nullához tart: $\Delta S \rightarrow 0$, ha $\Delta T \rightarrow 0$

Ha minden elem entrópiáját $T=0$ -n stabilis állapotában nullának vesszük, akkor minden anyagnak pozitív az entrópiája, ami $T=0$ -nál nullává válhat, és biztosan nulla lesz valamennyi tökéletes kristályos anyagra, beleértve a vegyületeket is.

Összefoglalva a termodinamika főtételeit

I. Zárt rendszer belső energiája állandó, amíg azt munkavégzés vagy hőcsere nem változtatja meg.

II. Egy izolált rendszer entrópiája valamely önként lejátszódó folyamatban nő: $\Delta S_{\text{össz}} > 0$.

III. a./ Minden elem entrópiája stabilis állapotában $T=0$ fokon nulla, így minden anyag entrópiája pozitív érték. A vegyületek entrópiája is nulla lesz $T=0$ fokon, ha tökéletes kristályt alkotnak.

b./ $T=0$ abszolút zérus fok tetszőlegesen megközelíthető, de soha el nem érhető.



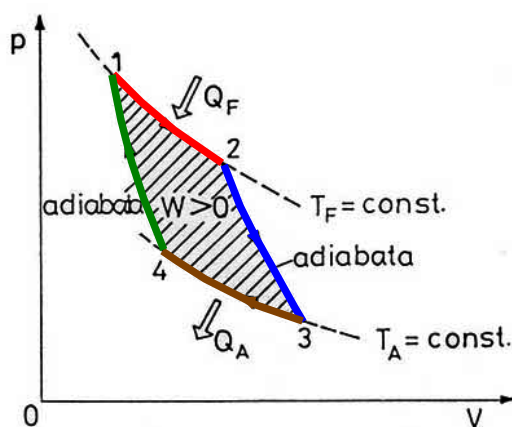
3. Carnot-körfolyamatok

3.1. Carnot-körfolyamat

A Carnot-ciklus (vagy Carnot-körfolyamat) egy speciális termodinamikai körfolyamat, melyet az elméleti (idealizált) Carnot-hőerőgép hajt végre. A termodinamika alapvető körfolyamata, amelyet Sadi Carnot francia mérnök írt le 1824-ben, miközben a gőzgép működési elvét próbálta megmagyarázni. Négy szakaszból áll: izotermikus, majd adiabatikus tágulás, amelyet izotermikus, majd adiabatikus összenyomás követ. A Carnot-gép a lehetséges legnagyobb termikus hatásfokú hőerőgép (Carnot törvénye). Ezt a fizikai modellt Nicolas Léonard Sadi Carnot javasolta 1824-ben, majd Émile Clapeyron dolgozta ki részletesebben az 1830-as és 1840-es években.

Egy termodinamikai rendszer állapotát állapotjelzők (nyomás, hőmérséklet, fajtérfogat, entalpia, entrópia) írják le. A termodinamikai körfolyamat akkor jön létre, ha a rendszer egy sor állapotváltozás után a kezdeti állapotába tér vissza. A körfolyamat végrehajtása során a rendszer munkát végezhet a környezetén, így hőerőgépként működhet. A hőerőgép működése során a környezetének egy melegebb régiójából energiát vihet át egy hidegebb régióba és az energia egy részét mechanikai munkává alakíthatja. A körfolyamat meg is fordítható. A rendszerbe külső munka bevezetése által hőenergiát képes átvinni egy hidegebb helyről egy melegebb helyre, így hőszivattyúként működhet.

A Carnot-körfolyamat a lehető legjobb hatásfokú körfolyamat, mely egy adott mennyiségű hőenergiát mechanikai munkává alakít, illetve egy adott mennyiségű mechanikai munkát hűtési célokra átalakít hőenergiává.



A Carnot-körfolyamat
3.1 ábra

Próbáljuk meg meghatározni, hogy a folyamat egyes szakaszain mennyi hőt és mennyi munkát viszünk a rendszerbe, illetve nyerünk ki. és mekkora az eredő. A folyamatban résztvevő közeg legyen ideális gáz.

3.1.1 Izotermikus expanzió 1-2 szakasz

Alkalmazzuk a hőtan első főtételét zárt rendszerre az 1-2 szakaszon. Az 1-2 szakaszon izotermikus expanzió zajlik (a belső energia nem változik.)

$$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = 0$$

$$Q_{12} = Q_F = -W_{12} \quad 3.1$$

Alkalmazzuk az ideális gázok Clapeiron-egyenletét:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

Izotermikus állapotváltozásnál a hőmérséklet nem változik, így írhatjuk, hogy $p \cdot V = \text{áll.}$ Ebből kifejezve a nyomást

$$p = \frac{\text{áll.}}{V}$$

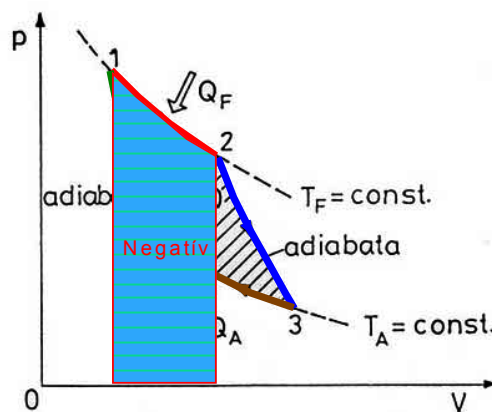
Számítsuk ki az 1-2 szakaszon végzett munkát.

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{áll.}}{V} dV = - [\text{áll.} \cdot \ln V]_{V_1}^{V_2} = -p_1 V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -m \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad 3.2$$

Itt a mínusz előjel azt jelenti, hogy a zárt rendszer ad le munkát, vagyis a rendszer veszít, a környezet, vagyis a felhasználó nyer munkát!

Mivel a rendszer által felvett hő izotermikus állapotváltozásnál megegyezik a leadott munkával így a felvett hő

3.3



Az 1-2 szakaszon leadott munka

3.2 ábra

$$Q_{12} = Q_F = -W_{12} = m \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Nézzük a körfolyamat következő szakaszát.

3.1.2 Adiabaticus expansió 2-3 szakasz

Alkalmazzuk a hőtan első főtételét zárt rendszerre a 2-3 szakaszon. A 2-3 szakaszon adiabaticus expansió zajlik (nincs közölt vagy elvont hő $Q_{23} = 0$).

$$\Delta U_{23} = Q_{23} + W_{23} = - \int_{V_2}^{V_3} p \cdot dV$$

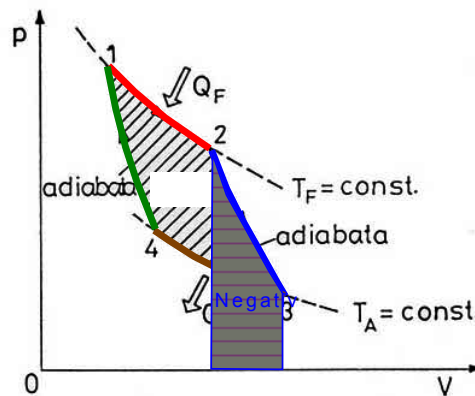
$$\Delta U_{23} = W_{23} \quad 3.4$$

Egyszerűbben jutunk eredményre, ha kihasználjuk, hogy az ideális gázok belső energia változása a hőmérséklet változással arányosan változik, tehát

$$\Delta U_{23} = m \cdot c_v \cdot \Delta T_{23}$$

$$W_{23} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) \quad 3.5$$

Itt is a rendszer veszít munkát, (a 2-es hőfok nagyobb a 3-asnál ezért az eredmény negatív lesz) környezet, vagyis a felhasználó nyer munkát!



A 2-3 szakaszon leadott munka
3.3 ábra

3.1.3 Izotermikus kompresszió 3-4 szakaszon

Alkalmazzuk itt is a hőtan első főtételét zárt rendszerre a 3-4 szakaszon. A 3-4 szakaszon izotermikus kompresszió zajlik (a belső energia nem változik.) A feladat analóg az 1-2 szakaszhoz, csak az előjelekkel kell vigyáznunk!

$$\Delta U_{34} = Q_{34} + W_{34} = Q_{34} - \int_{V_3}^{V_4} p \cdot dV = 0 \quad 3.6$$

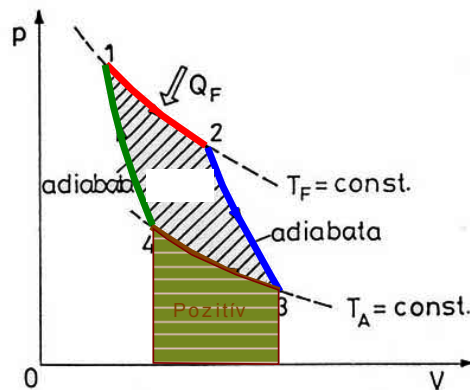
$$Q_{34} = Q_A = -W_{34} \quad 3.7$$

Q_A az alsó hőmérsékleten leadott hő.

$$W_{34} = - \int_{V_3}^{V_4} p dV = - \int_{V_3}^{V_4} \frac{\text{áll.}}{V} dV = - [\text{áll.} \cdot \ln V]_{V_3}^{V_4} = -p_3 V_4 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} =$$

$$= -m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Mivel a 4-es állapotban a térfogat kisebb, mint a 3-as állapotban, ezért az $\ln \frac{V_4}{V_3}$ értéke negatív. Így a 3-4 szakaszon a rendszer munkát nyer, és ugyanannyi mennyiségű hőt ad le!



A 3-4 szakaszon felvett munka
3.4 ábra

3.1.4 Adiabatus kompresszió a 4-1 szakaszon

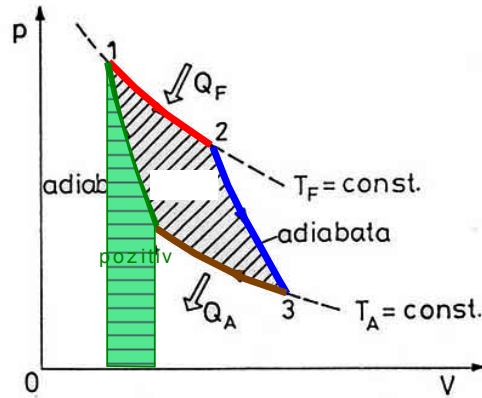
Alkalmazzuk a hőtan első főtételeét hasonlóan, mint a 2-3 szakaszon. A 4-1 szakaszon adiabatus kompresszió zajlik (nincs közölt vagy elvont hő $Q_{41} = 0$).

$$\Delta U_{41} = Q_{41} + W_{41} = - \int_{V_4}^{V_1} p \cdot dV$$

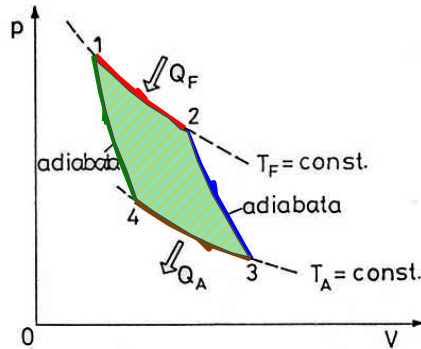
$$\Delta U_{41} = W_{41} \quad 3.8$$

$$W_{41} = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_4) \quad 3.9$$

Itt is a rendszer nyer munkát, (az 1-es hőfok nagyobb a 4-nél ezért az eredmény pozitív lesz) a környezet, vagyis a felhasználó végez munkát!



A 4.1 szakaszon felvett munka



A körfolyamat eredő munkája
3.6 ábra

Összegezzük a teljes körfolyamatra a rendszer által nyert vagy leadott rész fizikai munkákat.

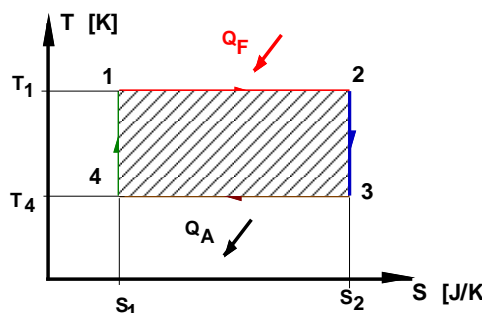
$$\sum W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = -m \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} - m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_3) + m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} + m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_4)$$

Végezzük el a műveletet grafikusán:

Összességében a rendszer munkát ad le a környezetnek. Vagyis **munka nyerhető ki a körfolyamatból hőbevitel árán. Más szóval, a hőerőgép hőenergiából képes mechanikai munkát előállítani.**

3.2. Carnot-körfolyamat hatásfoka

Az előző fejezetben bevezettük az entrópia fogalmát, amelyről kimutatható, hogy állapotjelző. A Carnot-körfolyamatot sokkal egyszerűbb ábrázolni T-s diagramban, abszolút hőmérséklet, entrópia diagramban. Mivel a két állandó hőmérsékletű és két adiabatikus állapotváltozást tartalmaz, ezért ebben a diagramban egy téglalap a körfolyamat eredménye.



A Carnot-körfolyamat eredő munkája T-s diagramban
3.7 ábra

Az entrópia definíciója, pontosabban annak elemi változása $dS = \frac{dQ}{T} \left[\frac{J}{K} \right]$. Ez annyit jelent, hogy ha nincs hőcsere, akkor az entrópia sem változik. Ezért az adiabatikus állapotváltozások függőleges vonalak a diagramban.

A Carnot körfolyamat tárgyalása sokkal látványosabb a T-S diagram alapján. Két folyamata izoterm, vagyis a képük két vízszintes vonal; két folyamata adiabatikus ($Q=0 \rightarrow \Delta S=0$), vagyis képük két függőleges vonal. A teljes körfolyamat a T-S diagramon egy téglalap. A körfolyamat során a gáz által végzett hasznos munka e téglalap területe.

Fejezzük ki az egyes szakaszokon a hőmennyiségeket. A felső hőmérsékleten, az izotermikus expanzió során bevitt hőmennyiség $Q_F = (S_2 - S_1) \cdot T_1$, amit a felső T_1 vízszintes alatti téglalap szemléltet.

Az alsó hőmérsékleten, az izotermikus kompresszió során leadott hőmennyiség $Q_A = (S_2 - S_1) \cdot T_4$, amit az alsó T_4 vízszintes alatti téglalap szemléltet.

A két téglalap területének a különbsége a végzett munka, vagy más szóval a körbezárt terület a végzett munkával arányos.

$$W = (S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_4)$$

A téglalap területe annál nagyobb lesz, minél magasabban van a hőbevitel és minél alacsonyabban van a hőelvonás hőmérséklete. A körfolyamat hatásfokát azzal szokták jellemezni, hogy milyen arányú a kinyert munka a bevitt hőmennyiséghez viszonyítva. Másnéven ez a Carnot hatásfok.

$$\eta = \frac{W}{Q_F} = \frac{(S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_4)}{(S_2 - S_1) \cdot T_1} = \frac{T_1 - T_4}{T_1} = 1 - \frac{T_4}{T_1} \quad 3.10$$

Általánosabban hatásfok kifejezése:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{alacsonyabb}}}{T_{\text{magasabb}}} \quad 3.11$$

3.2.1. A Carnot-körfolyamat (reverzibilis) körfolyamat

A termodinamika második főtétele szerint, ha a rendszerben csak reverzibilis (megfordítható) folyamatok játszódnak le, akkor a rendszer összentrópiája nem növekszik. A fenti Carnot körfolyamat esetében próbáljuk ezt bebizonyítani. Az 1-2 szakaszon hőt közlünk a rendszerrel, elvileg végtelen nagy hőcserélő felületen, így nulla hőfoklépcső mellett, emiatt lesz reverzibilis az állapotváltozás. A közölt hő mennyisége Q_1 . A 3.3 egyenlet szerint

$$Q_{12} = Q_F = -W_{12} = m \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

A 2-3 és 4-1 szakaszokon adiabatikus az állapotváltozás, így nincsen hőközlés és nincs entrópia változás sem.

A 3-4 szakaszon izotermikus kompresszió történik, és a leadott hő a 3.7 egyenlet alapján

$$Q_{34} = Q_A = -W_{34} = -m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Számítsuk ki az összentrópia változását a körfolyamat során

$$\sum \Delta S_{1234} = \frac{Q_F}{T_1} + 0 + \frac{Q_A}{T_4} + 0 = \frac{m \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1} + 0 + \frac{-m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_3} + 0 = m \cdot R \left[\ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_3}{V_4} \right] \quad 3.12$$

A kapott kifejezésről kell belátnunk, hogy valóban nullát ad.

Ehhez fel kell használnunk, hogy a 2-3 és 4-1 állapotváltozások adiabatikus változások. Tehát $p_2 \cdot V_2^\kappa = p_3 \cdot V_3^\kappa$, valamint $p_4 \cdot V_4^\kappa = p_1 \cdot V_1^\kappa$.

Fejezzük ki a V_3 térfogatot V_2 -vel és a V_4 térfogatot V_1 -el a fenti két egyenletből.

$$V_3 = V_2 \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad V_4 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_4} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Helyettesítsük ezt a 3.12 egyenletbe

$$\sum \Delta S_{1234} = m \cdot R \left[\ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_3}{V_4} \right] = m \cdot R \left[\ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \left\{ \frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right\} \right]$$

Most már csak azt kell belátni, hogy $\left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1$.

Emeljük kappaadik hatványra az egyenletet, ekkor $\frac{p_2}{p_3} \cdot \frac{p_4}{p_1} = 1$ kifejezést kapjuk.

Használjuk fel az 1.23 egyenletet 2-3 pontok között $\frac{p_2}{T_2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{p_3}{T_3^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$ és a 4-1 pontok között

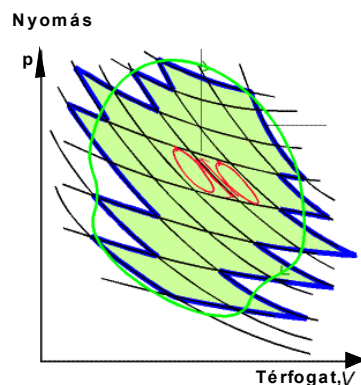
$$\frac{p_4}{T_4^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{p_1}{T_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

Behelyettesítve és rendezve: $\frac{T_2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{T_3^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \cdot \frac{T_4^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{T_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = 1$. Ez a kifejezés pedig fennáll, mert $T_1 = T_2$ és $T_3 = T_4$.

Tehát bebizonyítottuk, hogy a zárt reverzibilis körfolyamat végén az összentrópia változás zérus.

3.3 Általános körfolyamatok

A kalorikus gépek különböző körfolyamatokkal működnek. A tiszta Carnot-körfolyamatot csak megközelítik. De bizonyítható, hogy minden nagy körfolyamat felosztható kisebb Carnot-ciklusokra.



Általános körfolyamat felbontása Carnot-ciklusokra
3.8 ábra

A görbén belüli területre eső utak kiegyenlítik egymást, így csak a kerületet kell figyelembe venni. Annál jobb a nagy körfolyamat közelítése, minél több kicsi ciklusra van felosztva. Mivel az entrópiaváltozás valamennyi egyedi Carnot-ciklusban nulla, ezért a görbe mentén körbehaladva az entrópia integrálja is nulla.

3.3 A fordított Carnot-körfolyamatok

Az ideális hűtő körfolyamat

Ha a körfolyamat az ellenkező irányban zajlik le (indirekt vagy fordított körfolyamat), akkor W az a munka lesz, amit a közegen a külső erők végeznek. Ennek hatására Q_A hőt vesz fel az alacsonyabb hőmérsékletű hőtartálytól és Q_F hőt ad le a magasabb hőmérsékletű hőtartálynak. A hűtőgép hidegebb térből visz át hőt a melegebb környezetnek ezért a **jósági tényezője**, **jósági foka**: egynél nagyobb szám. A hűtőgépeknél jósági tényezőnek nevezzük azt az arányszámot, amelyet az elvitt hő ($Q_{\text{alsó}}$) és a betáplált munka (W) hányadosaként értelmezzük.

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{Alsó}}}{W} = \frac{(S_2 - S_1) \cdot T_4}{(S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_4)} = \frac{T_4}{T_1 - T_4} = \frac{T_{\text{alacsonyabb}}}{T_{\text{magasabb}} - T_{\text{alacsonyabb}}} \quad 3.13$$

Az ideális hőszivattyú körfolyamat

A hőszivattyú hidegebb térből visz át hőt a melegebb helyiségbe, ezért a jósági tényezője vagy közismerten COP (Coefficient of Performance):

$$\text{COP} = \frac{Q_{\text{Felső}}}{W} = \frac{(S_2 - S_1) \cdot T_1}{(S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_4)} = \frac{T_1}{T_1 - T_4} = \frac{T_{\text{magasabb}}}{T_{\text{magasabb}} - T_{\text{alacsonyabb}}} \quad 3.14$$

(Itt a leadott hő, amit hasznosítunk az is egyenél nagyobb szám)

A hőszivattyúk COP kifejezése és a hűtőgépek jósági foka nem független egymástól. Kapcsolatuk a következő:

$$\text{COP} = \frac{T_{\text{magasabb}} - T_{\text{alacsonyabb}} + T_{\text{alacsonyabb}}}{T_{\text{magasabb}} - T_{\text{alacsonyabb}}} = 1 + \frac{T_{\text{alacsonyabb}}}{T_{\text{magasabb}} - T_{\text{alacsonyabb}}} = 1 + \varepsilon \quad 3.15$$

A hűtőgépekről és a hőszivattyúkról bővebben az **5. fejezetben** még olvashatunk.

3.4 Reverzibilis és irreverzibilis körfolyamatok

A folyamat **reverzibilis** vagy megfordítható, ha lezajlása után a rendszerrel a folyamatot ellenkező irányban hajtva végre a rendszer ugyanazokon a közbülső állapotokon át visszajut eredeti állapotába egyéb környezeti változások nélkül.

A folyamat **irreverzibilis**, ha nem megfordítható, azaz nem reverzibilis. Ha a rendszer nem mehet át fordított irányban ugyanazokon a közbülső állapotokon úgy, hogy a környezetében sem jön létre változás.

Megjegyzések

Minden valóságos folyamat irreverzibilis.

Az idealizált folyamatok eddig említettek lehetnek reverzibilisek.

Belsőégésű motorok irreverzibilisek

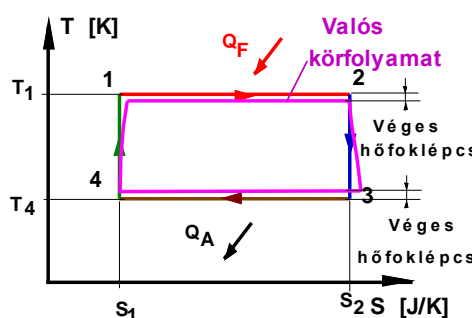
A teljesség igénye nélkül említünk néhány irreverzibilitást a Carnot körfolyamatban.

A hőcsere a környezet és a rendszerben lévő gáz között véges hőmérsékletkülönbséggel megy végbe. Ha a környezet vesz fel hőt, akkor a rendszerben lévő gáznak melegebbnek kell lennie a környezetnél. Ha a hőcsere visszafelé szeretnénk lefolytatni, vagyis ha a környezet ad le hőt a rendszerben lévő gáznak, akkor a környezetnek kell melegebbnek lenni a gáznál.

Másik gyakori irreverzibilitás az adiabatikus kompresszió vagy expanzió. Az adiabatikus, hőcsere mentes folyamatot általában jó közelítéssel meg lehet valósítani, de a súrlódás okozta melegedést rendszereint nem lehet kiküszöbölni. Ezért a súrlódás melegíti a közeget és ezáltal entrópiáját

növeli. Ez annyit jelent, hogy a sem a kompresszió, sem az expanzió nem függőleges mentén megy végbe, hanem jobbra elhajlik, ami az entrópia növekedését okozza.

Így a teljes körfolyamat mátt nem lesz reverzibilis. Ennek bizonyítását itt most mellőzzük.



Irreverzibilitások a valóságos körfolyamatban
3.8 ábra

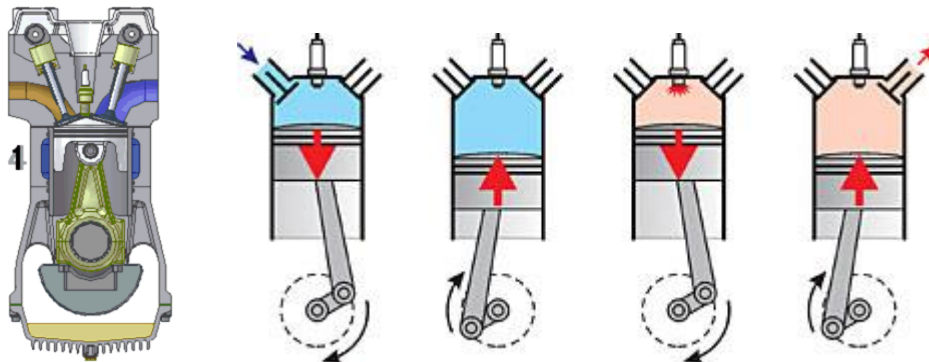
De a reverzibilitáshoz hasonlóan lehet a megállapítást belátni. A valóságos körfolyamatok mindig irreverzibilisek.



4. Különböző körfolyamatok

4.1. Otto körfolyamat

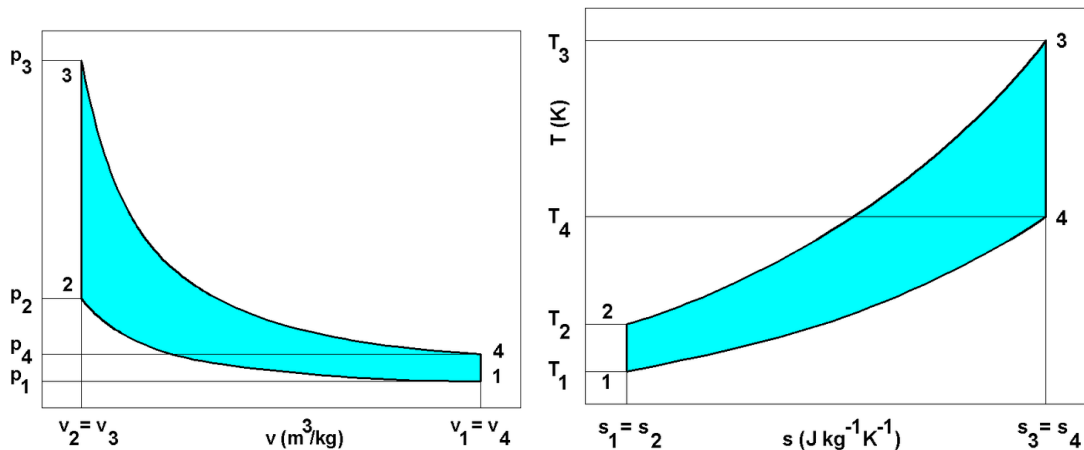
Az Otto-motor volt az első megvalósított négyütemű belsőégésű motor. Nikolaus August Otto készítette 1876-ban. Világviszonylatban ez a belsőégésű motor terjedt el leginkább és üzemanyaga miatt hívják leginkább benzinmotoroknak.



Az Otto motorműködése

4.1 ábra

A motor működése négy ütemre bontható. Az első ütem a szívás: a dugattyú a hengerben lefelé mozog, s közben a nyitott szívó szelepen keresztül levegő-üzemanyag keverék vagy a modernebb típusoknál csak levegő áramlik a hengertérbe. A második ütemnél a dugattyú felfelé mozog, sűríti a levegő benzin keveréket vagy csak a levegőt, és minden szelep zárva van. A harmadik ütem kezdetén a sűrített levegő-üzemanyag keveréket meggyújtja a gyertya (a modern motoroknál a szikra előtt fecskendezik be az égéstérbe az üzemanyagot). A gyors égéssel felhevített gáz nyomása megnő, majd elkezd a dugattyút lefelé mozgatni, ez az ütem a terjeszkedés vagy munkaütem. A negyedik ütemben a dugattyú felfelé mozog, a kipufogószelep nyitva van, s az égéstermékek távoznak a hengerből. A körfolyamat friss gázkeverékkel újraindul. Az idealizált folyamat két adiabatikus és két izochor folyamatból áll. A körfolyamat p - V diagramja a **4.2 ábrán** látható. Az első ütemnek a 0-1 szakasz felel meg. A körfolyamat tárgyalásához erre a szakaszra nincs szükség, ezért a diagramon nem is mindig tüntetik fel. A második ütem az 1-2 szakaszra felel meg, ez adiabatikus kompresszió. A harmadik ütem tartalmazza a 2-3 szakaszt állandó térfogaton zajló (izochor) állapotváltozást és a 3-4 adiabatikus expanziós szakaszt. A negyedik ütem a 4-1 állandó térfogaton zajló, izochor szakasz (hűlés) és az 1-0 szakasz (kipufogás) ezt sem mindig szokták ábrázolni a körfolyamatban. A körfolyamat során a hőfelvétel a 2-3 szakaszon történik, a hőleadás pedig a 4-1 szakaszon. Az eddigi tárgyalás során még nem ejtettünk szót a T - s diagramban az izochor, állandó térfogat mellett zajló állapotváltozásról. Ez egy meredekebb hatványfüggvény. A nyomás állandó görbék szintén hatványfüggvények, csak egy kicsit laposabbak az izochor vonalaknál. Későbbiekben ezekről is lesz szó.



Az Otto elméleti körfolyamat p-v és T-s diagramban
4.2 ábra

Vizsgáljuk meg a körfolyamatot a T-s diagramban.

A hőbevezetés a 2-3 szakaszon állandó térfogat mellett történik. Mivel nincs munkavégzés az első főtétel alapján írható, hogy a bevitt hő teljes mértékben a belső energiáját növeli a háznak. Ideális gázt feltételezve ez a következő formában írható:

$$q_{be} = \Delta u_{32} = c_v \cdot (T_3 - T_2) \quad 4.1$$

A hőelvitel 4-1 szakaszon szintén állandó térfogat mellett.

$$q_{el} = \Delta u_{41} = c_v \cdot (T_4 - T_1) \quad 4.2$$

Az 1-2 és a 3-4 szakaszok adiabatikus állapotváltozások, ott nincsen hőbevitel vagy hőelvitel. A kinyert munka a Carnot-körfolyamathoz hasonlóan a kettő különbsége. Ez a körfolyamat is felbontható elemi Carnot ciklusok összegére, ebből következik a fenti állítás.

$$q_{be} - q_{el} = c_v \cdot (T_3 - T_2) - c_v \cdot (T_4 - T_1) \quad 4.3$$

A körfolyamat hatásfokát szintén a Carnot-körfolyamathoz hasonlóan számíthatjuk.

$$\eta_{Otto} = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = \frac{c_v \cdot (T_3 - T_2) - c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad 4.4$$

Az 1-2 és 3-4 között adiabatikus állapotváltozás van, tehát

$$T_1 \cdot v_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot v_2^{\kappa-1} \quad \text{és} \quad T_4 \cdot v_4^{\kappa-1} = T_3 \cdot v_3^{\kappa-1}$$

Osszuk el a két egyenletet egymással

$$\frac{T_4}{T_1} \cdot \left(\frac{v_4}{v_1} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^{\kappa-1}$$

Használjuk fel, hogy a két izochor állapotváltozásból adódóan $v_1 = v_2$ és $v_3 = v_4$.

$$\frac{T_4}{T_1} \cdot \left(\frac{v_4}{v_1}\right)^{\kappa-1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \left(\frac{v_4}{v_1}\right)^{\kappa-1}$$

Amiből adódik, hogy

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad 4.5$$

A 4.4 egyenletet alakítsuk át úgy, hogy hőmérséklet arányok szerepeljenek benne, majd helyettesítsük be a 4.5 összefüggést.

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1}$$

A hatásfok további átalakításához vezessük be a kompresszió viszonyt:

$$\varepsilon = \frac{v_1}{v_2} \quad 4.6$$

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \quad 4.7$$

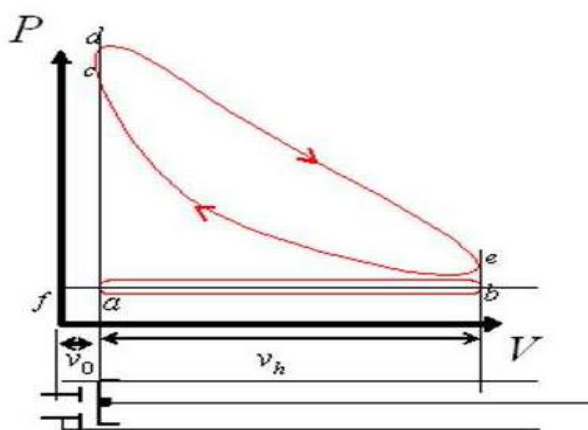
A hatásfok a kompresszióviszony növelésével nő. A 4.3 ábra mutatja az elméleti hatásfok változását a kompresszió viszony függvényében.



Az elméleti hatásfok alakulás a kompresszió viszony függvényében
4.3 ábra

Ennek határt szab az üzemanyag-levegő keverék öngyulladás, amit el kell kerülni. Benzinmotorok esetén a kompresszióviszony $1:7 - 1:12$. A valódi motorok hatásfoka kisebb, mint az számított érték. Benzinmotorok esetében a kompresszió végnyomása $12-17 \text{ bar}$, az égési csúcshőmérséklet $2000-2500 \text{ °C}$. A motorok tényleges hatásfoka $24-35\%$

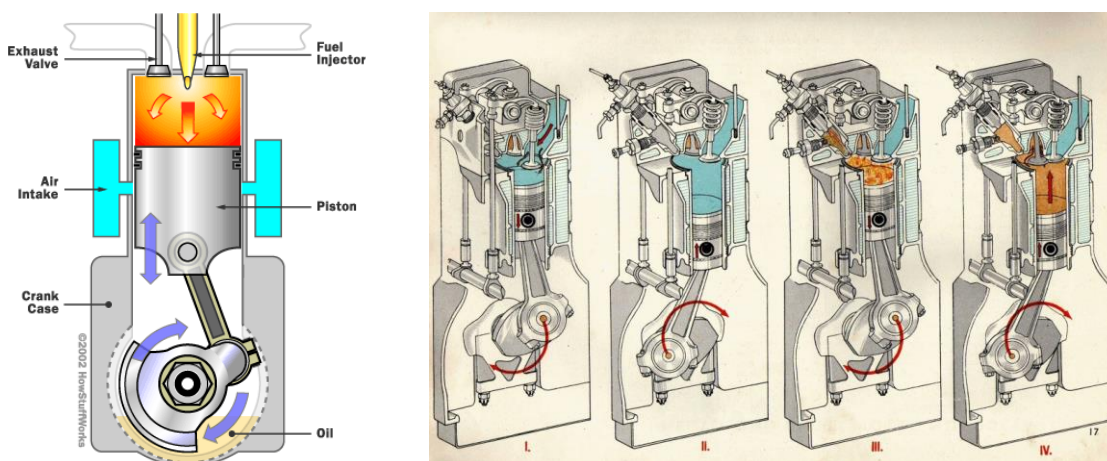
A valóságos benzinmotorok esetében a p - V diagram egy bonyolult görbe, melynek matematikai tárgyalása komplikált. A **4.4 ábra** az indikátor diagramnak is nevezett valóságos nyomásviszonyokat mutatja a löket függvényében.



A valóságos Otto körfolyamat p - V diagramban (indikátor diagram)
4.4 ábra

4.2. A Diesel körfolyamat

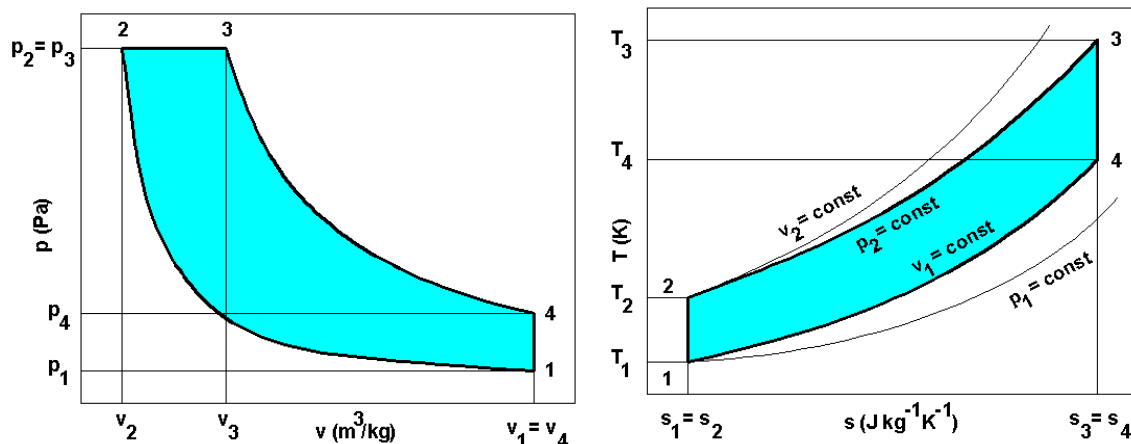
A dízelmotor (Rudolf Christian Karl Diesel, 1893) működése négy ütemre bontható.



A Diesel motor működése
4.5 ábra

Az első ütem a szívás: a dugattyú a hengerben lefelé mozog, s közben egy nyitott szelepen át levegő áramlik a hengertérbe. A második ütemnél a dugattyú felfelé mozog, sűríti és felhevíti

a levegőt, és minden szelep zárva van. A harmadik ütem kezdetén a komprimált forró levegőbe injektálják a dízelolajat, ami a forró levegő hatására meggyullad, és állandó nyomáson égve elkezd lefelé tolni a dugattyút. Az égés lassabb, mint a benzin égése a benzinmotorban. Az égés végeztével adiabatikus tágulás juttatja el a dugattyút az alsó holtpontra. A negyedik ütemben a dugattyú felfelé mozog, a kipufogószelep nyitva van, és az égéstermékek távoznak a hengerből. A körfolyamat újraindul friss levegővel. Az idealizált folyamat két adiabatikus, egy izobár és egy izochor folyamatból áll. A körfolyamat p-v diagramja a **4.6 ábrán** látható.



A Diesel elméleti körfolyamat p-v és T-s diagramban

4.6 ábra

A hatásfokot az Otto motorhoz hasonló elvek alapján lehet levezetni. Itt annyival komplikáltabb a helyzet, hogy a körfolyamat öt részfolyamatból tevődik össze. És a kompresszió viszony $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$ mellett, a

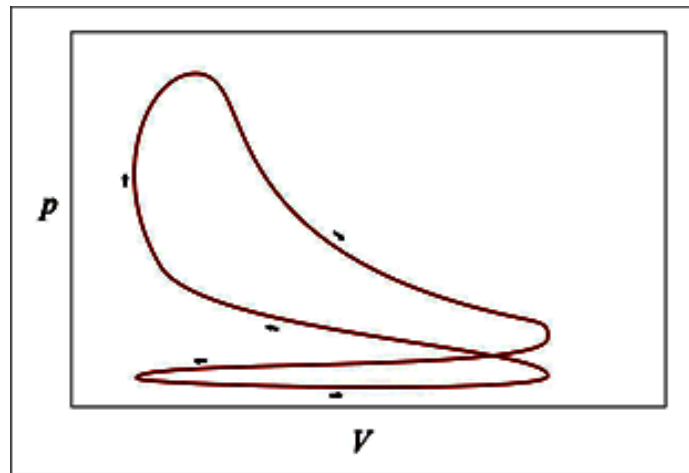
$$\varphi = \frac{v_3}{v_2} \quad 4.8$$

az égés végénél és kezdeténél érvényes fajtérfogat hányadost is bevezetjük. Ezek felhasználásával a Diesel körfolyamat elméleti hatásfoka:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varphi - 1} \quad 4.9$$

A hatásfok a kompresszió viszony növelésével nő, a fajtérfogat hányados ($\varphi < 1$) növelésével csökken. Összehasonlítva az Otto-körfolyamattal, annak hatásfoka azonos kompresszió viszony esetén meghaladja a Diesel ciklusét. Mindenki ismeri azonban azt a tényt, hogy a Diesel motorral hajtott gépkocsik üzemanyag-fogyasztása kisebb (és így az összhatásfoka jobb), mint az Otto-motorokkal hajtott gépkocsiké. Ez azért igaz, mert az Otto-motorok kompresszió viszonya lényegesen alacsonyabb, mint a dízelmotoroké. A benzin-levegő keverék ugyanis alacsonyabb hőmérsékleten (így alacsonyabb kompresszió viszony mellett) öngyulladást szenvedne. A másik ok, hogy a benzinmotort a légbeömlés fojtásával vezérlik, a fojtás pedig energiaveszteséget okoz. Harmadik ok pedig az, hogy a Diesel olaj egy literében

több energiataralom van, mint egy liter benzinében. (Fűtőérték kilogrammra számolva: dízel-olaj $43 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, benzin $43 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, vagy egy literre számolva: dízel $36 \frac{\text{MJ}}{\ell}$, benzin $30 \frac{\text{MJ}}{\ell}$). A valóságos összhatásfok természetesen a termikus, mechanikai és egyéb veszteségek miatt mindkét motornál az elméletinél lényegesen kisebb.



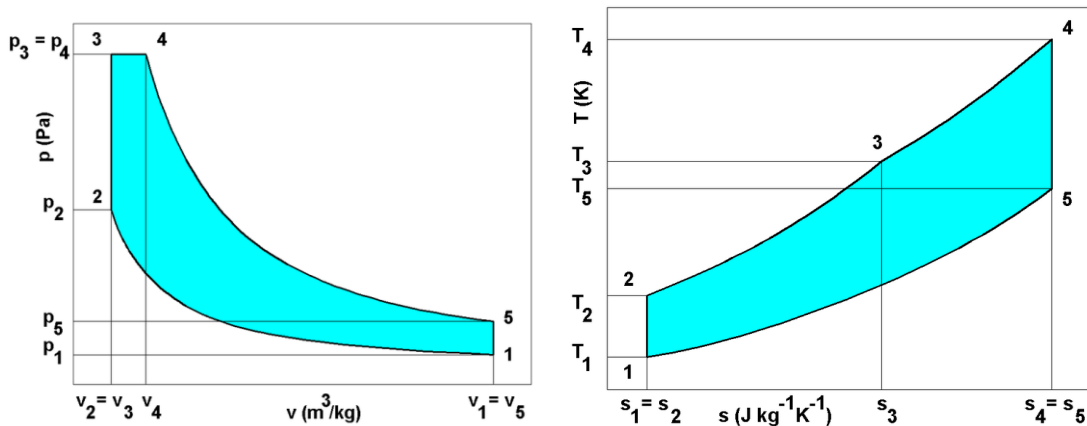
A valóságos Diesel-körfolyamat p-V diagramban (indikátor diagram)
4.7 ábra

Valóságos dízelmotorok esetében a p-V diagram hasonlít a benzinmotorok esetében kapott görbéhez, de nincs rajta kiugró csúcs, kevésbé szögletes. Dízel-motorok esetében a kompresszió viszony 1:16–1:22, a kompresszió végnyomása 30–55 bar, az égési csúcshőmérséklet 2000–2500 °C. A motorok tényleges hatásfoka 32–43%. A dízelmotorok jobb hatásfokának egyik fő oka, hogy a dízelmotorokban sokkal nagyobb kompresszió érhető el.

4.3. A Sieglér-Sabathé-körfolyamat

Mind az Ottó mind a Diesel elméleti ciklus bizonyos közelítésekkel adja csak meg a valóságos körfolyamatot. A közelítés javítására Seiliger–Sabathé-ciklust, vagy más néven kevert ciklust, kettős ciklust ajánlották a szerzők. A folyamat során az égés egyrészt állandó térfogaton, másrészt állandó nyomáson zajlik le. Ennek köszönhetően ez a ciklus modellezi legjobban az Otto-motorokban és a Diesel-motorokban lejátszódó állapotváltozásokat.

- 1 - 2 izentropikus kompresszió.
- 2 - 3 állandó térfogatú (izochor) állapotváltozás (égés első része)
- 3 - 4 állandó nyomású (izobár) állapotváltozás (égés második része)
- 4 - 5 izentropikus expanzió
- 5 - 1 állandó térfogatú (izochor) hőelvonás



A Sieglér-Sabathé elméleti körfolyamat p-v és T-s diagramban
4.8 ábra

Az elméleti hatásfok kifejezése levezetés nélkül a következő:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} \cdot \lambda - 1}{\lambda \cdot (1 + \kappa) \cdot (\varphi - 1)} \quad 4.10$$

A korábban már definiált, a kifejezésben szereplő viszonyszámok jelentése:

$\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$ a kompresszió viszony,

$\varphi = \frac{v_3}{v_2}$ az égés végénél és kezdeténél érvényes fajtérfogat hányadosa, és

$\lambda = \frac{p_3}{p_2}$ nyomásviszony, az égés végnyomásának és kezdeti nyomásának hányadosa.

4.4. Gőz körfolyamat és gőzdiagramok

A korábbi fejezetekben a körfolyamatokban a kontinuum minden állapotváltozás közben gáz, sőt ideális gáz halmazállapotban volt. A számítások ezért könnyen elvégezhetőek, mert a közegről feltételeztük, hogy többé-kevésbé megfelel az ideális gáztörvénynek. Szembe kellett azonban néznünk a gázok azon kedvezőtlen tulajdonságával, hogy mind a hőközlés, mind a hőelvonás során hőmérsékletük változik.

A jobb hatásfok elérése érdekében olyan közegeket alkalmazunk a kalorikus gépeinkben, melyek változtatják a halmazállapotukat, ugyanis a halmazállapot-változás közben a hőmérséklet nem változik, tehát adott az elvi lehetőség a Carnot-körfolyamat bizonyos mértékű megközelítésére. Mindez azt jelenti, hogy a körfolyamatot át kell helyezni arra a területre, ahol a halmazállapot-változás határait jelző ún. határgörbék találhatóak. A gyakorlatban a vizet használták elsőként ilyen célokra. A gőzgép megalkotásánál is

kihasználták a fázisátalakulás előnyeit. Az **1. fejezetben** már foglalkoztunk a víz egyensúlyi diagramjával. Az egyik leggyakrabban alkalmazott fázisátalakulást tartalmazó körfolyamat a Claiusius-Rankine- vízgőz körfolyamat.

4.4.1. A Rankine-Clausius körfolyamat

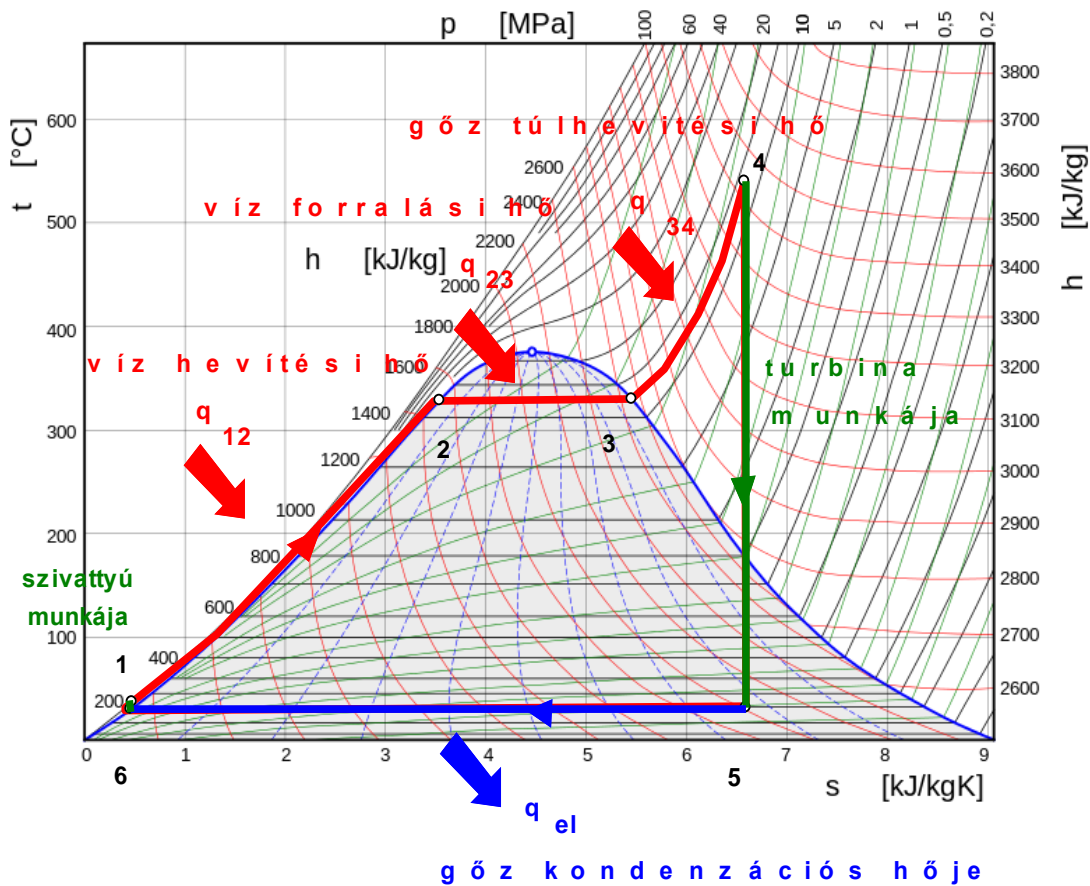
Mielőtt a körfolyamatról beszélnénk, ejtsünk néhány szót a víz T-s diagramjáról, amit a **4.9 ábrán** láthatunk, valós adatokkal. A víz még gőz halmazállapotban sem viselkedik ideális gázként, ezért a gőz fázisban is táblázatok, illetve diagramok szolgáltatják az állapotjelzőket. Hasonlóan az ideális gázokhoz, a többfázisú rendszerek esetében is célszerű azoknak a T-s diagramját megadni. A kétfázisú rendszerek T-s diagramjában a szokásos termikus és kalorikus állapotjelzők értékén kívül fel szokás tüntetni a fázisok összetételére vonatkozó arányszámot, a fajlagos gőztartalmat (x) is. Ezek az állandó összetétel vonalak. A gyakorlatban legtöbbször alkalmazott víz-vízgőz közegre vonatkozó T-s diagramban gőzmezőben, a határgörbétől távolodva a hűzőkhoz hasonló jellegűek a görbék. Ahogyan az ideális gáz viselkedését a közeg tulajdonságai megközelítik, a p és v állandó vonalak (állandó fajhőknél) exponenciálissá, a h , entalpia állandó vonalak pedig vízszintessé válnak.

A hőmérséklet-entrópia diagramban a víz és a vízgőz adatait ábrázolták, egységnyi tömegre vonatkoztatva. A függőleges tengelyen a hőmérséklet Celsius fokban a vízszintes tengelyen az egységnyi tömegre vonatkoztatott entrópiát láthatjuk. A késsel jelölt határgörbe (haranggörbe) alatt víz+gőz vegyes fázis található, a görbétől balra víz, jobbra pedig gőz. A diagram jobb oldali skáláján az entalpia látható, a diagram belsejében az entalpia vonalak pirossal vannak jelölve. A túlhevített gőz mezőben közelítenek a vízszinteshez, a nedves mezőben erősen felfelé hajlanak. A diagram felső részén a nyomás skálát láthatjuk. A mezőben ezeket fekete vonalak jelzik. A nedves mezőben vízszintesen haladnak, mint az állandó hőmérsékletű vonalak, a túlhevített gőz mezőben erősen emelkednek, hasonlóan az ideális gázok T-s diagramjához. Az állandó fajtérfogat vonalakat zölddel jelölték a diagramban, ezek meredekebben haladnak, mint az állandó nyomású vonalak.

A nedves mezőben lévő szaggatott vonalak a nedves mezőben a gőztartalmat jelzik. Balról jobbra a baloldali határgörbén 0%, vagyis még nincs gőz csak víz. Az első szaggatott vonala 10% gőzt (tömegszázalékot), a második 20%-t jelöl és így tovább. A jobb oldali határgörbén 100% gőz van, a víz teljesen elpárolgott.

A haranggörbe legfelső pontja a kritikus pont, ami víz esetében $t_{\text{kritikus}} = 374^\circ\text{C}$, $p_{\text{kritikus}} = 221 \text{ bar}$. A kritikus pont felett már nem lehet a gőzt és a vizet megkülönböztetni, nincsen fázisátalakulás. A vízgőz állapotjelzőinek kiszámítására nagyon sok számítógépes programot is készítettek, amelyekből igen pontosan meg lehet határozni az állapotjelzőket.

Ezek után vizsgáljuk meg a körfolyamatot. A Rankine-körfolyamat a Carnot-ciklus gyakorlatban is megvalósítható változata. A fő különbség abban van, hogy a folyékony víz nyomásának növelésére itt szivattyút használnak. Ez körülbelül százszor kevesebb energiát igényel, mintha gázt sűríténe kompresszorral, mint ahogy a Carnot-körfolyamatnál történik. (De ezért a Rankine-körfolyamat hatásfoka nem jobb, hanem rosszabb egy azonos hőfokhatárok között működő Carnot-körfolyamaténál.) A Rankine-körfolyamat hatásfokát általában a munkaközeg fizikai jellemzői határozzák meg. Annak érdekében, hogy a nyomás a kritikus értéket el ne érje, a hőmérséklet-határok korlátozottak víz esetében. A turbinába való belépés előtt a gőz hőmérséklete általában 565°C (ez az a hőmérséklet, melynél a rozsdamentes acélok tartós folyása még nem következik be) és a gőz hőmérséklete a kondenzátorban mintegy 30°C . Emellett az elméletileg legjobb Carnot-körfolyamat hatásfoka körülbelül 63%, míg egy korszerű széntüzelésű hőerőmű hatásfoka mintegy 42%. A viszonylag alacsony gőzhőmérséklet miatt gyakran építenek kombinált ciklusú erőműveket,



A Rankine-Clausius gőzturbina körfolyamat T-s diagramban
4.9 ábra

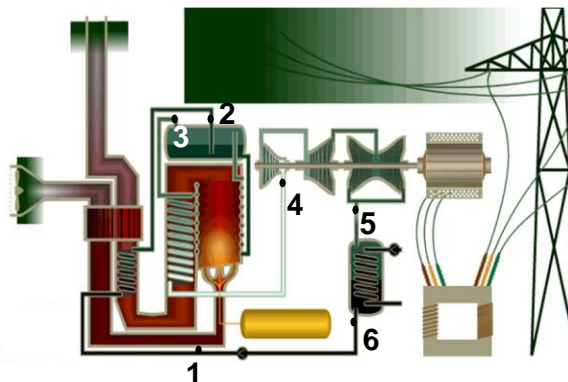
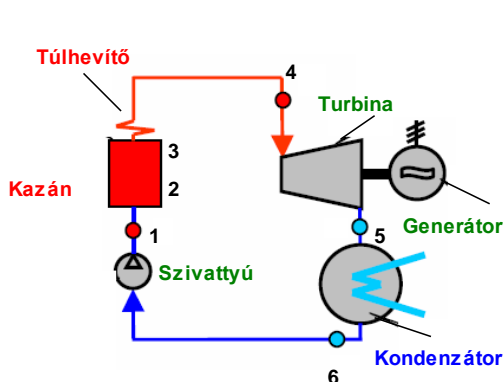
melyeknél a magasabb hőmérsékleten gőzturbina, az alacsonyabb hőmérsékleten Rankine-körfolyamat üzemel együtt.

A hőközlési folyamat a folyadék mezőben indul, a „1” ponttól. Itt a folyadék telítetlen állapotban van, azaz hőmérséklete alacsonyabb, mint a nyomásához tartozó telítési hőmérséklet. A folyadék melegedése során (állandó nyomás mellett) eléri a nyomásához tartozó telítési hőmérsékletet, megkezdődik a forrás „2”. Az „1-2” görbeszakasz alatti terület a folyadék melegítéséhez szükséges hőmennyiséggel arányos.

A „2-3” görbeszakasz a víz halmazállapot változását jelöli, itt forr fel a víz és gőz lesz belőle. A folyamat állandó nyomáson és állandó hőmérsékleten zajlik le. A görbeszakasz alatti terület a forrás közben felvett rejtett vagy idegen szóval latens hővel arányos.

A „3-4” görbeszakasz, melynek hasonló a gázok exponenciális görbéjére a keletkezett gőz túlhevítését jelzi. A görbeszakasz alatti terület a túlhevítési hő. A hőközlés során felvett hő tehát a három az „1-4” görbeszakaszok alatti terület.

A „4” ponttól indul a magas hőmérsékletű (túlhevített) gőz adiabatikusnak feltételezett expanziója, mely a felső határgörbe alá nyúlik egy kicsi, az „5” pontig. A hőelvonás a munkát végzett közeg kondenzálódásának (gőzből ismét víz halmazállapotba történő átmenet) megfelelő állandó nyomású és hőmérsékletű állapotváltozás. Az „5-6” egyenes alatti terület adja a kondenzáció során elvont rejtett hő. Végezetül a munkát végzett és lekondenzálódott, tehát ismételen folyadék halmazállapotba került közeget át kell szivattyúzni a hőközlés nyomására. „6-1” szakasz. Mivel a folyadék gyakorlatilag összenyomhatatlan (a folyadékmezőben az állandó nyomású görbék egymás közvetlen közelében futnak!), az ehhez szükséges munka mennyisége gyakorlatilag elhanyagolható az expanzió során nyert munkához képest. Az ábrán bemutatott körfolyamatot a XIX. század végén William John



A Rankine-Clausius gőzturbina körfolyamat blokkvázlata [9]
4.10 ábra

Macquorn Rankine skót mérnök és fizikus írta le először és emlékére Rankine-körfolyamatnak (a szakirodalomban helyenként Rankine-Clausius körfolyamatnak) nevezik. Valójában az eredeti Rankine-körfolyamat a túlhevítést nem tartalmazta.

4.4.2 Clausius-Rankine körfolyamat T-s diagramban



Egy valósághoz közeli Rankine-Clausius körfolyamat adatait olvassuk ki a vízgőz t-s diagramjából 4.9 ábrán.

Adatok:

$$p_1 = 165 \text{ bar} ; t_1 = 35^\circ\text{C} ; t_2 = 330^\circ\text{C} ; t_4 = 545^\circ\text{C} ; t_5 = 30^\circ\text{C} ; p_5 = 0,035 \text{ bar}$$

Kérdések:

- Határozzuk meg az diagram egyes pontjaiban az állapotjelzőket!
- Határozzuk meg az egy kilogramm gőzbe bevitt hő, elvitt hő és a turbina által termelt és a szivattyú által felvett munka nagyságát!
- Határozzuk meg a körfolyamat elvi hatásfokát!

Megoldás: A diagram alapján elvileg kiolvasható minden egyes ponthoz a következő adatsor, amit táblázatban közöltünk. (A pontosság érdekében számítógépes programból adtuk meg az adatokat)

a./

	1 pont	2 pont	3 pont	4 pont	5 pont	6 pont
p [bar]	130	130	130	130	130	0,05
t [C]	35	330	330	545	33	33
h [kJ/kg]	159	1527	2669	3456	2009	145
s [kJ/kg K]	0,5	3,55	5,44	6,59	6,59	0,5

A fenti táblázat alapján ki tudjuk számítani az egyes hőmennyiségeket és munkákat. Használjuk fel a hőtan II. törvényének nyitott rendszerre vonatkozó alakját 2.10. egyenlet $H_{12} = Q_{12} + W_{T12}$, pontosabban ennek az egységnyi tömegre vonatkozó alakját:

$$h_{12} = q_{12} + w_{T12} \quad 4.11$$

b./ Ezek alapján a

$$q_{12} = h_2 - h_1 = 1527 - 159 = 1368 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{23} = h_3 - h_2 = 2669 - 1527 = 1142 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{34} = h_4 - h_3 = 3465 - 2669 = 787 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Mind a három állapotváltozásban a technikai munka nulla, mert nincs nyomásváltozás, ezért a bevitt hő egyenlő az entalpiaváltozással.

A körfolyamatba bevitt hő nagysága a három hőbevitel összege:

$$q_{be} = q_{12} + q_{23} + q_{34} = 1368 + 1142 + 787 = 3297 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

A turbina által végzett munka a 4-5 szakaszon adiabatikus expanzió, eközben nincs hőközlés, így az entalpia változás egyenlő a turbina munkájával.

$$w_{45} = h_4 - h_5 = 3465 - 2009 = 1456 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Az 5-6 szakaszon a kondenzátorban elvont hő nagysága

$$q_{el} = h_5 - h_6 = 2009 - 145 = 1854 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{34} = h_4 - h_3 = 3465 - 2669 = 787 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

A szivattyú által felvett munka a 6-1 szakaszon szintén adiabatikus változás, de ez kompresszió.

$$w_{61} = h_1 - h_6 = 159 - 145 = 14 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

c./ A körfolyamat hatásfokát a 3.10. egyenlet alapján adhatjuk meg:

$$\eta = \frac{Q_F - Q_A}{Q_F} = \frac{Q_{be} - Q_{el}}{Q_{be}} = \frac{3297 - 1854}{3297} = 0,4376 = 43,76\%$$

A turbinán számított munka w_{45} gyakorlatilag megegyezik a $Q_F - Q_A$ hőmennyiség különbségével. Ez eltérést a szivattyú által felvett munka okozza w_{61} . De ezt legtöbbször el lehet hanyagolni a többi mennyiség mellett.

$$w_{45} - w_{61} = 1456 - 14 = 1442 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_F - Q_A = 3297 - 1854 = 1443 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

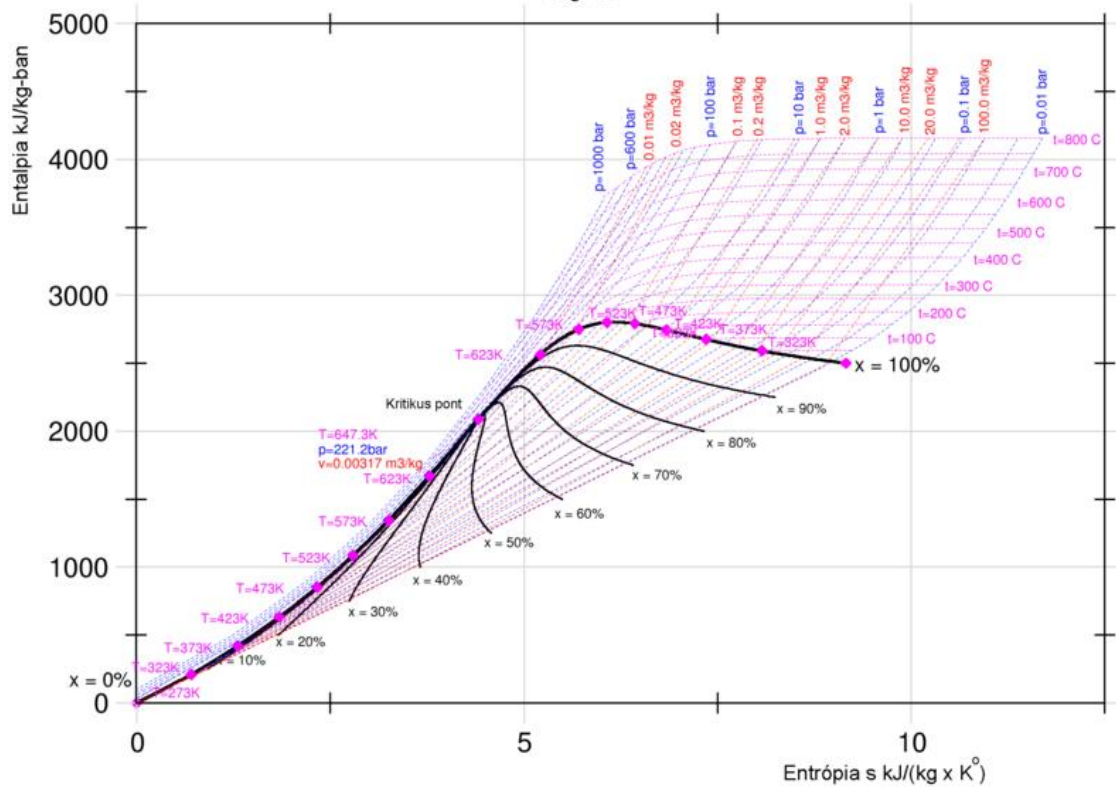
(A két mennyiség azonos, az eltérés oka kerekítési hiba!)

A valóságos körfolyamat hatásfoka kisebb az elméletinél a különböző veszteségek miatt.

4.4.3 Vízgőz h-s diagramja

A vízgőz állapotjelzőit nem csak T-s, hanem h-s diagramban is gyakran ábrázolják. A **4.11 ábrán** egy ilyen diagramot látunk. A haranggörbe kissé elfordul a T-s diagramhoz képest. A benne található vonalrendszer ugyanazokat az állapotjelzőket tartalmazza mint a T-s diagram. Itt jól láthatók az állandó nyomású (kék) és állandó fajtérfogatú (piros) vonalak menete. Itt be vannak jelölve az „x”, gőztartalom vonalak is (fekete).

Mollier h,s diagram vízgőzre



A vízgőz h-s diagramja
4.11 ábra



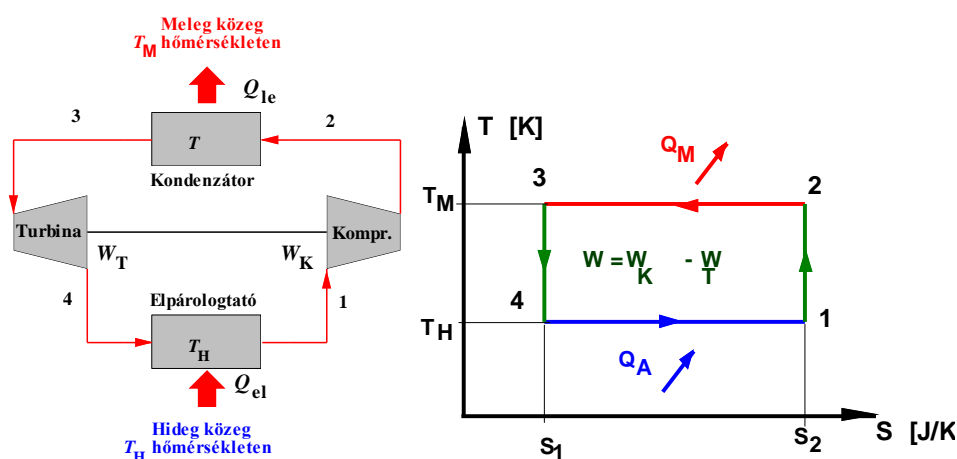
5. Hűtőgépek és hőszivattyúk

A 3.3 fejezetben már tárgyaltuk a fordított Carnot-körfolyamatot. A 4. fejezetben tárgyalt erőgépi körfolyamatok a bevezetett hő egy részét munkává alakították. Ha ezeknek a körfolyamatoknak az irányát megfordítjuk, akkor munkabefektetés révén hőt tudunk létrehozni. Az ilyen típusú körfolyamatok legfontosabb alkalmazási területe a hűtés, amikor is a környezet hőmérsékleténél alacsonyabb hőmérsékletű rendszert kell létrehoznunk és fenntartanunk.

Mivel e körfolyamatok esetében az a célunk, hogy a lehető legkisebb munkabefektetés árán a lehető legnagyobb hőtranszportot (inhomogenitást) hozzuk létre, ezért e körfolyamatok energetikai jóságának megítélésére nem a termikus hatásfokot, hanem a hűtőkörfolyamat hatásosságának nevezett tényezőt vezetjük be. Ennek értelmezése az **5.1. ábra** jelöléseinek felhasználásával:

$$\varepsilon = \frac{Q_{el}}{W_{net}} = \frac{Q_{el}}{|W_K - W_T|}.$$

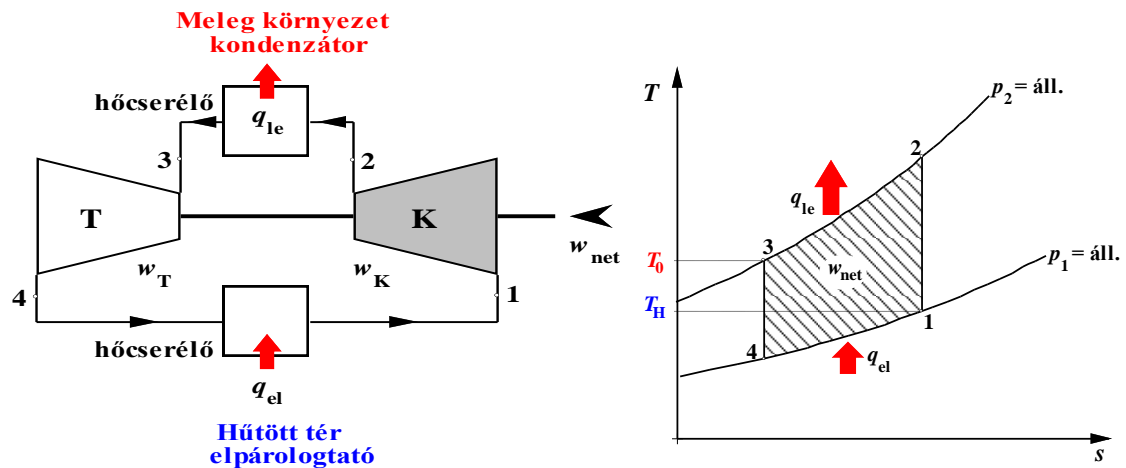
A **5.1 ábrán** feltüntettük az egyes berendezések elnevezését. A folyamat, melynek T–s diagramja a következő állapotváltozások sorozatából épül fel:



A fordított Carnot-körfolyamat elvi felépítése
5.1 ábra

- 1→2: a munkaközeg adiabatikus kompressziója,
- 2→3: izotermikus hőleadás, a munkaközeg kondenzációja,
- 3→4: a munkaközeg adiabatikus expanziója,
- 4→1: izotermikus hőfelvétel, a munkaközeg elpárolgása.

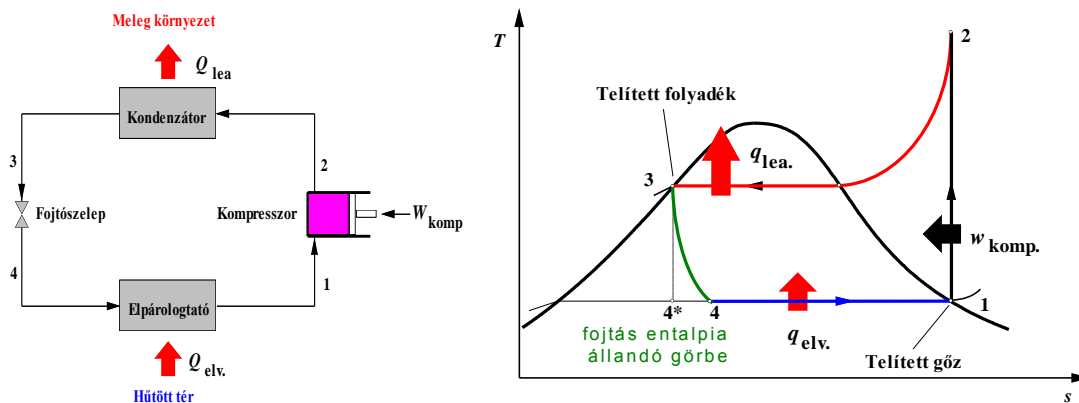
A fordított Carnot-körfolyamat szerinti hűtőgép a valóságban nem valósítható meg. A gyakorlatban a már korábban megismert gőz- vagy gáz körfolyamatoknak megfelelő fordított körfolyamatok szerinti hűtőgépek üzemelnek. A fordított Brayton-körfolyamat szerinti hűtőgép elvi felépítését az **5.2 ábra** mutatja és T–s diagramban szintén az **5.2 ábra** mutatja. Ha a hőleadás és a hőfelvétel hőmérsékletkülönbség nélkül megy végbe, akkor a hűtött tér legkisebb hőmérséklete T_H , míg a környezet hőmérséklete legfeljebb T_0 lehet.



A fordított Brayton-körfolyamat elvi felépítése és T-s diagramja
5.2 ábra

A gyakorlatban legelterjedtebb hűtőkörfolyamatok munkaközege gőz. A gőz körfolyamat hűtőgép elvi kapcsolási vázlatát és T-s diagramját az Hiba! A hivatkozási forrás nem található..3 ábra mutatja. A munkaközeg a következő állapotváltozásokon megy keresztül:

- 1→2: izotermikus hőfelvétel, a munkaközeg elpárolgása,
- 2→3: a munkaközeg adiabatikus kompressziója,
- 3→4: izotermikus hőleadás, a munkaközeg kondenzációja,
- 4→1: a munkaközeg adiabatikus expanziója.



A kompresszoros hűtőgép vázlat és körfolyamata T-s diagramban
5.3 ábra

A gőz munkaközegű hűtőkörfolyamatok esetében a turbinát, a vegyes kétfázisú közeg expanziójának nehéz megvalósíthatósága miatt az expanziót fojtással helyettesítik, minek következtében az adiabatikus reverzibilis expanzióhoz (4*), a nyomáscsökkenés utáni állapot a (4) pontba kerül. A hűtőkörfolyamat hatásossága az állapotdiagramból leolvasható entalpiaértékekkel kifejezve:

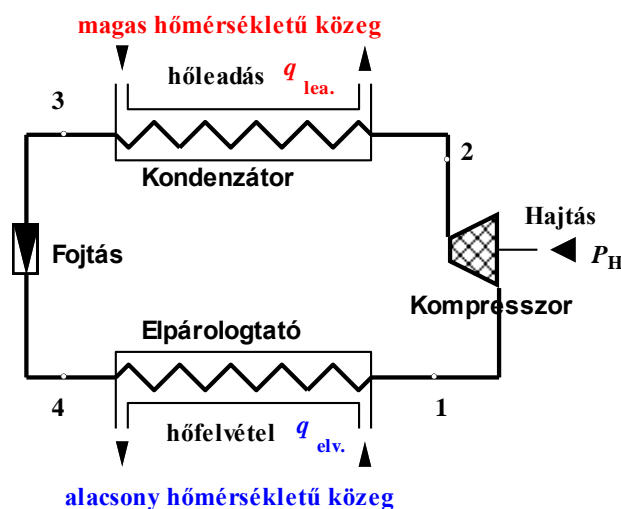
$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$$

5.1 Kompresszoros hűtőgép

A hűtőgép és hőszivattyú olyan hőerőgép, amelynek működése során a hűtőközeggel olyan folyamatokat végeztetünk, hogy hőt szállítunk alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletű helyre.

Az egykomponensű kétfázisú munkaközeg alkalmazása azzal jár, hogy ebben az esetben a hőleadás közel izotermikus, a hőfelvétel pedig izotermikus lesz. Az ezt megvalósító berendezés elvi kapcsolását az **5.4 ábra** mutatja.

A munkafolyamat a következő lépésekből áll: az elpárologtatóban megfelelően alacsony hőmérsékletszinten a munkaközeg elpárolog és hőt von el a hűtendő térből. Az elpárologtatóból kilépő gőzt a kompresszor az igényelt megfelelő magas hőmérsékletszintnek megfelelő nyomásra komprimálja, így juttatva azt a kondenzátorba, ahol a munkaközeg cseppfolyósodik. A környezetnek átadja a hőt. A folyadék halmazállapotú hűtőközeg a fojtószelepen keresztül jut az elpárologtatóba. A hűtőkörfolyamatot $T-s$ diagramjában az **5.5 ábra** mutatja, ahol bejelöltük a kapcsolási vázlaton megadott pontokat, valamint a körfolyamat irreverzibilitásait. A kompresszoros hűtőkörfolyamatokat általában $\log p-h$ diagramban szokás ábrázolni, mert ebben a diagramban a fajlagos felvett és leadott hő, valamint a befektetendő mechanikai munka szemléletesen, szakaszokkal ábrázolhatók, ahogy azt az **5.6 ábra** is mutatja.



A kompresszoros hűtőgép vázlat

5.4 ábra

A kompresszoros hűtőgép körfolyamat energiamérlegét a következő egyenletek fejezik ki. A hűtőközeg az elpárologtatóban fajlagosan

$$q_{\text{elv.}} = h_4 - h_1 \quad 5.1$$

hőt vesz fel, a kondenzátorban fajlagosan

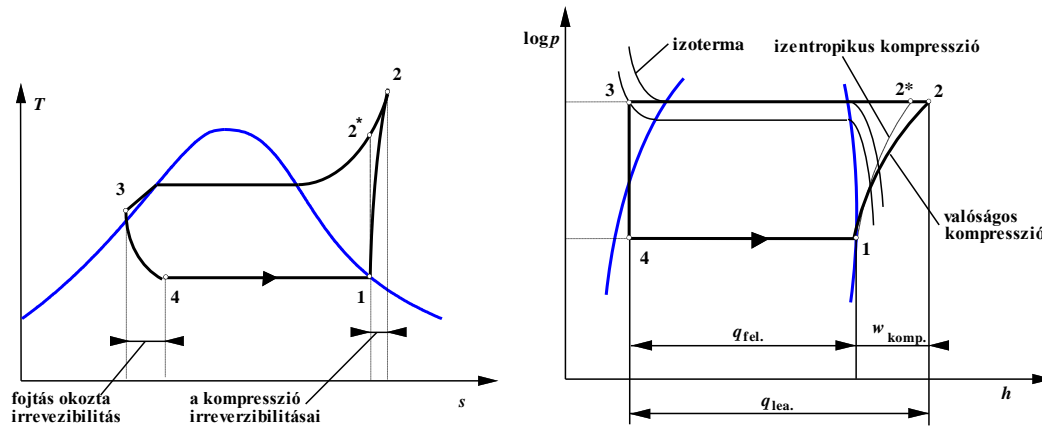
$$q_{\text{lea.}} = h_2 - h_3 \quad 5.2$$

hőt ad le, míg a kompresszió fajlagosan

$$w_{\text{komp.}} = h_2 - h_1$$

5.3

munkát igényel.

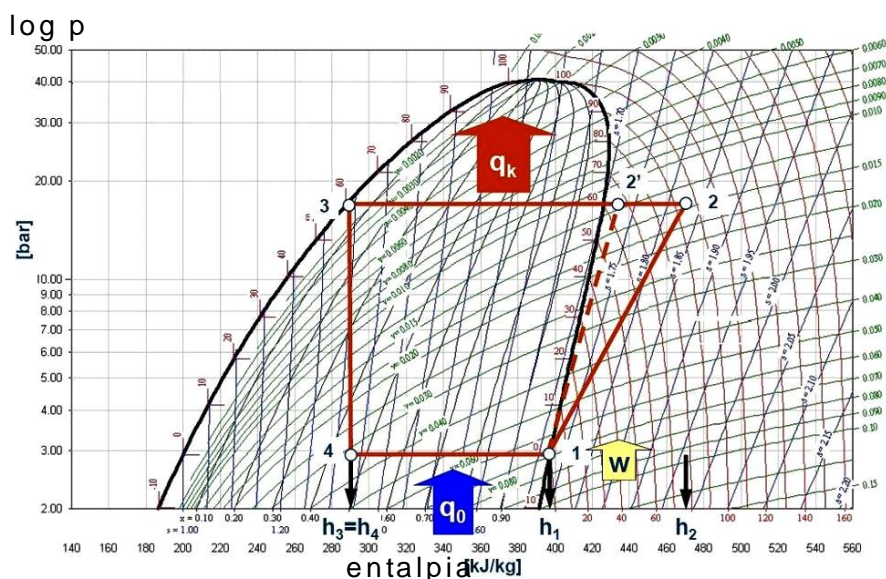


Kompressziós hűtőgép körfolyamat T-s és log p-h diagramja
5.5 ábra

A kompresszoros hűtőgépeken kívül alkalmaznak még abszorpció hűtőgépeket is. Ezek részleteivel itt nem foglalkozunk. Ezekről a [1] irodalomban találni részleteket.

5.2 A hőszivattyúk

A hőszivattyú olyan berendezés, kalorikus gép, amelyik arra szolgál, hogy az alacsonyabb hőmérsékletű környezetből hőt vonjon ki és azt magasabb hőmérsékletű helyre szállítsa. Elve teljesen hasonló a hűtőgépekhez. Használatának célja a hőenergiával való gazdálkodás, melynek során hűtési energiát fűtésben (pl. melegvíz-készítésben) fel lehet használni, illetve környezeti hőt lehet hasznosítani. A hőszivattyú elvileg olyan hűtőgép, melynél nem a hideg oldalon elvont, hanem a meleg oldalon leadott hőt hasznosítják. Minden olyan fizikai elv alapján készülnek hőszivattyúk, melyeket a hűtőgépeknél is használnak. Leggyakoribbak a gőz-kompressziós elven működő berendezések, de léteznek abszorpció hűtőgépek is.

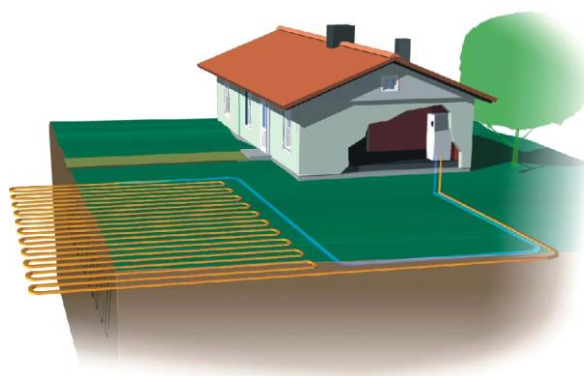


Egy hőszivattyús rendszer log p-h diagramja
5.6 ábra

Az **5.6 ábrán** egy hőszivattyú körfolyamatot látunk log p-h diagramban. A hőmérsékleteket a bal oldali határgörbén láthatjuk barna feliratokkal jelölve. Az alsó hőfok 0°C , a felső hőfok 60°C hőmérsékletű. A 2' pont jelenti a tökéletesen adiabatikus kompresszió vonalát, a 2-es pont pedig a valóságos kompresszió vonalát.

A hőszivattyúk fordított üzemmódban is működhetnek, ekkor a melegebb hely hűtésére is használhatók. A hőszivattyúk energiamérlegüket tekintve fordított üzemmódban működtetett hőerőgépeknek, „erő-hő gépeknek” is felfoghatók. [1]

Talajkollektoros rendszer esetében több száz méter hosszú speciális kemény PVC köpennyel ellátott rézcsöveket, vagy polietilén csöveket fektetnek le 1-2 méter mélyen. Hátránya, hogy nagy felületen (a fűtött alapterület 1,5-3-szorosán) kell megbontani a telket a csövek lefektetésekor, ezért leginkább új építésű házak esetén jöhet szóba. (ld. **5.7 ábra**)



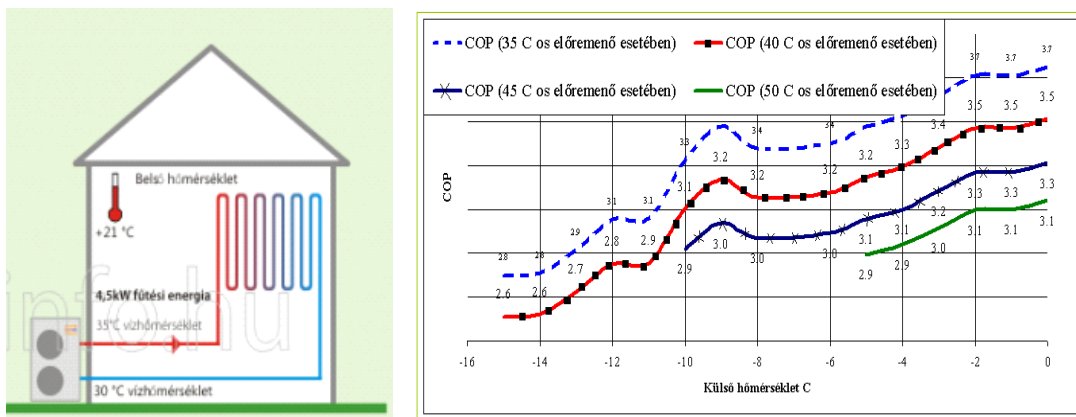
Felszín alatti talajkollektoros hőszivattyú
5.7 ábra

Talajvíz: A talajvíz-kútból búvárszivattyúval nyert víz hőjének elvonása után a vizet vagy egy másik kútba, vagy felszíni vízbe (patak, tó, folyó) vezetik, vagy elszivároztatják földbe fektetett dréncsöveken át. A talajvíz közel állandó hőmérséklete (7–12°C) és jó hővezetőképessége révén ideális hőforrás.

Levegő: A külső levegőt ventilátor(ok) szívják be, és a hőszivattyú hűti le. Előnye a könnyű telepíthetőség, hátránya viszont a külső levegőtől való függés, aminek a hőmérséklete nem állandó. Ezért a rendszer hatékonysága és hőtéljesítménye elönytelenül változó. További problémát jelenthet a ventilátor(ok) által keltett zaj. A levegő forrású hőszivattyú COP-je (Coefficient of Operation Proces) a 3.14 egyenlet szerint kinyert hőmennyiség és a befektetett kompresszor munka aránya. Vagy az 5.1 ábra szerint a kinyert hő viszonyítva a befektetett munkához.

$$\text{COP} = \frac{Q_M}{W} \quad 5.4$$

A hőszivattyú annál gazdaságosabb, minél nagyobb ez a szám. Jelentése pedig az, hogy a fűtésre felhasználható hő hányszorosa a folyamat fenntartásához szükséges munkának. Ez praktikusán annyit jelent, hogy 1 kWh befektetett villamos energiával hány kWh fűtési energiát állítunk elő. Általában akkor gazdaságos egy rendszer, ha legalább három vagy annál nagyobb ez az érték. Az **5.8 ábrán** azt látjuk, hogy a külső levegő hőmérsékletétől hogyan függ a COP egy hőszivattyús rendszernél. Az egyes görbéken a paraméter a fűtési rendszerben keringő fűtővíz hőmérsékletét jelenti. Alacsony fűtővíz hőmérsékletnél gazdaságosabb a rendszer, viszont nagyobb radiátorok szükségesek a jó működéshez. A másik, ami a görbékből látszik, hogy a külső hőmérséklet csökkenése erősen csökkenti a levegős hőszivattyús rendszer gazdaságosságát.



Levegő kollektoros hőszivattyús fűtés

5.8 ábra

Hulladékhő: Számításba jöhet hőforrásként a szennyvíz, az elhasznált termálvíz, hűtendő elektromos berendezések és ipari eszközök.

Szezonális tároló: A nyári évszakban a hűtésből származó hőt a talajnak adják át, a tárolás magában az erre kialakított jelentős térfogatú rétegben történik, majd télen a fűtési üzemben ebből a rétegből, tárolóból veszik a hőt. Hőforrás a hűtőházak, a hűtőládák és a nyári klimatizálás hulladékhője. A nyári meleget "elteszik télire".

5.3 Hűtőközegek

Az első megvalósított hűtőgépek ammóniát (NH_3) használtak, ez a hűtőközeg ma is elterjedt nagy hűtőrendszerekben. Később alkalmaztak propánt (C_3H_8), metilkloridot (CH_3Cl) kén-dioxidot (SO_2), és több más vegyületet. A Freon vegyületcsalád a halogénezett szénhidrogének kereskedelmi neve, melyet a DuPont cég kezdett gyártani majd általánosan elterjedt a hűtőgépiparban kiváló tulajdonságai miatt. Ilyenek többek között a Freon-12 difluor-diklór-metán (CF_2Cl_2), a Freon-11 trifluor-klór-metán (CF_3Cl), vagy a Freon-2 Fluor-diklór-metán (CHFCl_2). A freonokat (vagy CFC-ket) széles körben használták kiváló stabilitásuk és biztonságos használhatóságuk miatt: nem gyúlékonyak, kevésbé mérgezőek mint azok a hűtőközegek, amelyeket felváltottak. Később derült ki, hogy egy tulajdonságuk igen veszélyessé vált: ha a freon megszökött, a felső atmoszférába jutva klórtartalmuk erősen rombolta az ózonréteget, mely a Nap erős ibolyántúli sugárzásától védi a föld felszínét. A klóratomok katalizátorként elősegítik az ózon lebomlását. A klór mindaddig aktív katalizátor marad, amíg egy másik atommal kötésbe nem lép és stabil molekulát nem alkot. A CFC hűtőközegek ma is gyakoriak hűtőgépekben, de egyre csökken mennyiségük. Újabb és kevésbé környezetszennyező hűtőközegek a hidrokloro-fluorokarbonok (HCFC), ilyen például az R-22, melyet a legtöbb mai háztartási hűtőszekrényben használnak és a HFC-k (például az R134a) amelyek a gépkocsikban terjedtek el; ezek felváltották a korábbi CFC-ket. A montreali egyezmény a HCFC-ket is a fokozatosan kivonandó anyagok listájára helyezi, ezeket HFC-vel (hidrofluor-karbon) fogják helyettesíteni, például R-410A-val, mely már nem tartalmaz klórt. Napjainkban a szub- és szuperkritikus széndioxid is egyre inkább elterjedőben van hűtőközegeként, melyet R-744-gyel jelölnek.



6. Nedves levegő állapotjelzői

6.1 Ideális gázkeverékek törvényei

Az elegyek egyértelmű megadásához, mint minden többalkotós rendszer esetében, ismerni kell az egyes összetevők mennyiségét. Az alkotók mennyiségének megadására kétféle módszer terjedt el, amik viszonyítási alapjukban különböznek egymástól: tömeg (kg) vagy anyagszám (mol). A továbbiakban csak a tömegalapú vonatkoztatási rendszerrel fogunk behatóan megismerkedni. Az ideális gázkeverék viselkedését a Dalton- és Amagat-törvények írják le. A gázkeverék fontosabb jellemzői (tömegarány, mólarány) közötti kapcsolatokat taglaljuk. Bemutatjuk a kiemelt fontosságú gázkeverék, a nedves levegő viselkedését, jellemzőit és állapotváltozásait, valamint ezek kezeléséhez szükséges összefüggéseket és állapotdiagramokat.

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_i + \dots + m_N \quad 6.1$$

Tehát a keverék tömege: $m = \sum_{i=1}^N m_i$

Tekintsük az alábbi rendszert.

A rendszerben, mint látjuk N db gázkeverék van egy válaszfalakkal ellátott tartályba zárva. Azonos a nyomásuk és a hőmérsékletük is. A válaszfalak felhúzásával a gázkeverék egyes komponensei keveredni kezdenek egymással, és tömegük összeadódik.

A gázkeverék térfogata nyilván az egyes komponensek térfogatának összege

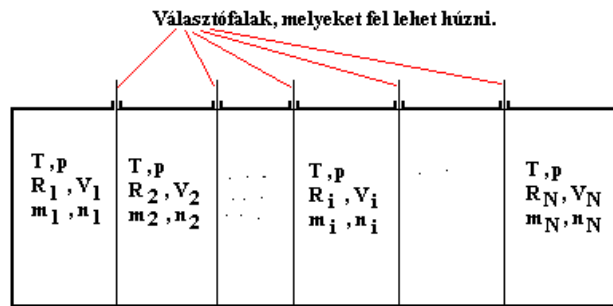
$$V = \sum_{i=1}^N V_i . \quad 6.2$$

A tömeg és egyéb jellemzők hasonlóan számolhatók. Az egyes átlagos anyagjellemzők (gázállandó, fajhő stb.) a tömegarányal súlyozva számíthatók ki.

A **parciális nyomás** nem más, mint egy adott komponens résznyomása a keverékben. Tehát az *i*-edik komponens parciális nyomását úgy kell elképzelni, hogy egy komponens mekkora nyomást hozna létre a teljes térfogatban, ha a többi komponenst eltávolítanánk. Vagyis az össznyomás hányad részét hozza létre az adott komponens.

Tehát a keverék nyomása előállítható az egyes komponensek parciális nyomásainak összegeként.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i + \dots + p_N \quad 6.3$$



**Az ideális gázkeverék
6.1 ábra**

6.2 Nedves levegő

A több összetevőből álló levegőt a gyakorlatban sokszor vízgőzből és száraz levegőből álló kétkomponensű keveréknek szokás tekinteni, és ebben az esetben nedves levegőnek nevezzük. A levegőben lévő H₂O mennyiségének, annak az egyes állapotváltozások során való megváltozásának ismerete fontos a technikai gyakorlatban. A klímatiszítás egyik igen fontos elme a hőmérséklet mellett a megfelelő légnedvesség biztosítása. A megfelelő komfort (emberek, állatok, növények részére) megteremtése nem csupán a megfelelő hőmérséklet biztosítását jelenti, hanem a megfelelő légnedvességet is. Másik fontos alkalmazás az ipari szárítás, ami a víznek különböző anyagokból (pl. festékek, élelmiszerek stb.) való eltávolítását jelenti, ez számos iparág fontos folyamata.

6.3 A nedves levegő h-x diagramja

A nedves levegő állapotváltozásainak követésére a gyakorlatban a h-x vagy (i-x) diagramot használjuk. A nedves levegő x-el jelölt abszolút nedvességtartalma az adott légtömegben lévő nedvességnek (m_v) és a száraz levegő (m_ℓ) tömegének az aránya.

$$x = \frac{m_v}{m_\ell} \quad 6.4$$

Az 1 kg száraz levegőt és x kg vizet tartalmazó keverék h_{1+x} entalpiája egyenlő a száraz levegő entalpiájának (fajhő · hőmérséklet) és az x kg víz entalpiájának az összege. Ez utóbbi entalpia a párolgáshőből (r_0) és a gáz/gőz halmazállapotú víz entalpiájának (fajhő · hőmérséklet) az összegéből áll, azaz:

$$h_{1+x} = c_p \cdot t + x \cdot (r_0 + c_{p_g} \cdot t) \quad 6.5$$

(A gyakorlatban előforduló nyomásokon és hőmérsékleteken mindkét összetevő és a keverék maga is ideális gáznak tekinthető.)

A h_{1+x} ily módon való felírásával a $t=0$ °C-hoz a $h_{1+x}=0$ kJ/kg értéket rendeljük hozzá. A levegő ($c_p=1$ kJ/kg·K) és a vízgőz ($c_{p_g}=1,86$ kJ/kg·K) fajhő értékeinek valamint a ($r_0=2501$ kJ/kg) párolgáshőnek az értékét behelyettesítve kapjuk a következő kifejezést:

$$h_{1+x} = t + x \cdot (2501 + 1,86 \cdot t) \quad 6.6$$

Az állandó hőmérséklet görbék meredeksége egy $h_{l+x}-x$ diagramban ebben az esetben $\left(\frac{\partial h_{l+x}}{\partial x}\right)_{t=\text{áll.}} = 2501 + 1,86 \cdot t$, azaz a hőmérséklet növekedésével arányosan széttartó egyenesek, amint azt a **6.2 ábra** mutatja.

Vegyük észre, hogy az izotermák meredekségének értékéhez képest magának a hőmérséklet-változás által okozott meredekség változás nagyon kicsi, az r_0 és a c_{pg} nagyságrendi viszonyainak megfelelően. Így a 0°C -hoz tartozó meredekség 2501, míg ugyanez az érték $t=100^\circ\text{C}$ esetében 2687. Ami azt jelenti, hogy a számunkra hasznos tartomány két kis meredekség-különbségű egyenes között van, ami egy adott léptékű diagramon használhatatlanul kis területet jelent. A probléma megoldása a Mollier által javasolt koordináta transzformáció, azaz az x tengelynek az α szöggel való elforgatása. (Az α szög a diagramon alkalmazott léptékek függvénye.) Az így eredményül kapott ferdeszögű koordináta rendszerben természetesen az entalpia állandó vonalak az elforgatott x_α tengellyel lesznek párhuzamosak. A hőmérséklet állandó vonalak közül a 0°C -os izoterma vízszintessé válik, a hőmérséklet növekedésével pedig enyhén széttartó egyeneseket kapunk eredményül, ahogy a **6.1 ábra** mutatja. A használatos diagramokon azután a megszokott derékszögű koordináta rendszert látjuk, melynek skáláját az elforgatott x_α tengelytől származtatjuk.

A diagram az így csak az izotermákat adja meg, a nedvességre vonatkozóan még nem tudunk semmit. Ez további megfontolást jelent. A nedves levegő össznyomása, a nedvességtartalom és a levegőben lévő gőz nyomása közötti összefüggés felírásához a komponensekre felírt ideális gáz állapotegyenleteket írjuk fel, illetve azok hányadosát:

$$\frac{V_k p_\ell}{V_k p_g} = \frac{m_\ell \frac{\mathfrak{R}}{M_\ell} T}{m_g \frac{\mathfrak{R}}{M_g} T} \quad 6.7$$

ahol: \mathfrak{R} az univerzális gázállandó ($8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$)
 M_ℓ a levegő mol tömege
 M_g a vízgőz mol tömege

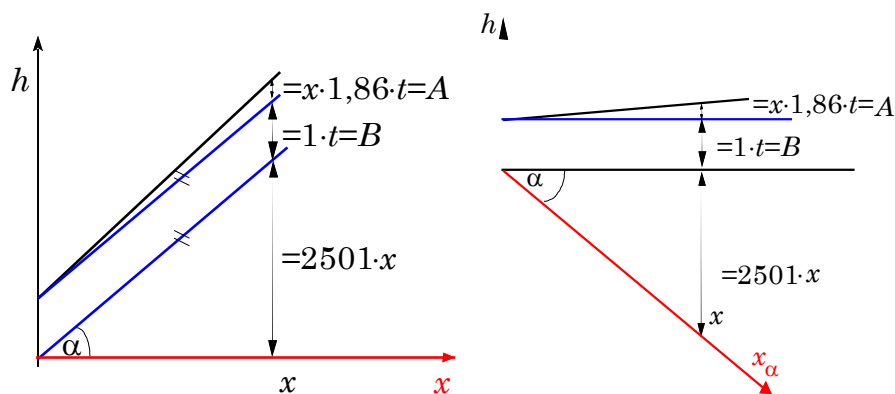
$$\frac{p_g}{p_\ell} = \frac{m_g}{m_\ell} \cdot \frac{M_\ell}{M_g} = x \cdot \frac{29}{18} = 1,61 \cdot x, \quad 6.8$$

mivel

$$p_{l+x} = p_\ell + p_g,$$

így kapjuk, hogy

$$p_g = p_{l+x} \cdot \frac{x}{0,622 + x} \quad 6.9$$



Az entalpia tengely transzformációja Mollier-diagramban
6.2 ábra

A nedvességtartalom növekedése tehát a 6.9 egyenlet szerinti gőznyomás növekedést eredményez. Az adott hőmérsékleten a hőmérséklethez tartozó telítési nyomásnál nagyobb nyomású gőz nem fordulhat elő, így a levegőben a nedvességtartalom egy adott hőmérsékleten addig növekedhet, míg a gőz résznyomása az adott hőmérséklethez tartozó telítési nyomást el nem éri. Azaz minden hőmérséklethez tartozik egy adott – a p_{1+x} -től függő – nedvességtartalom (x_s), amikor a gőz résznyomása az adott hőmérséklethez tartozó telítési nyomást eléri, így az x_s értékének meghatározására a következő kifejezést kapjuk:

$$x_s = 0,622 \frac{p_s}{p_{1+x} - p_s} \quad 6.10$$

A keverékhez adott minden további nedvesség már csak folyadék halmazállapotban lehet jelen. (A keverékben egyenletesen szétoszlott, lebegő folyadékfázis: **a köd.**)

Az entalpia ebben az esetben a következő

$$h_{\ell+x} = c_{p\ell} \cdot t + x_s \cdot (r_0 + c_{pg} \cdot t) + (x - x_s) \cdot c_{pv} \cdot t \quad 6.11$$

ahol a c_{pv} a víz folyadék állapotbeli fajhője.

A hőmérséklet állandó vonalak meredeksége pedig a $c_{pv} = 4,17 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ helyettesítéssel:

$$\left(\frac{\partial h_{\ell+x}}{\partial x} \right)_{t=\text{áll.}} = 4,17 \cdot t \quad 6.12$$

A hőmérséklet állandó vonalak menete, összefoglalva az eddigieket, tehát a következő:

A nulla nedvesség tartalomnál az entalpia egyenlő a hőmérséklet és az össznyomáson mért száraz levegő izobár fajhőjének szorzatával (1 bar esetén $c_{p\ell} = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$).

A nedvességtartalom növekedésével az izoterma a vízszintessel kis szöget bezáró egyenes, a telítési nedvességtartalmat elérve az izoterma meredeksége ugrásszerűen megváltozik és csaknem az entalpia állandó vonalakkal válik párhuzamossá.

Vezessük be a telítési fokot

6.13

$$\psi = \frac{x}{x_s}$$

A nedvességtartalmat jellemezhetjük a meteorológiai gyakorlatban szokásos *relatív nedvességgel* is.

$$\varphi = \frac{p_g}{p_s} \quad 6.14$$

Ami azt fejezi ki, hogy a levegőben lévő gőz parciális nyomása hány százaléka az adott léghőmérséklethez tartozó telítési nyomásnak. A relatív nedvességtartalom és a telítési fok közötti kapcsolat a következő.

$$\varphi = \frac{p_{\ell+x} \cdot \frac{x}{0,622+x}}{p_{\ell+x} \cdot \frac{x_s}{0,622+x_s}} = \frac{x \cdot (0,622+x_s)}{x_s(0,622+x)} = \psi \cdot \frac{(0,622+x_s)}{(0,622+x)},$$

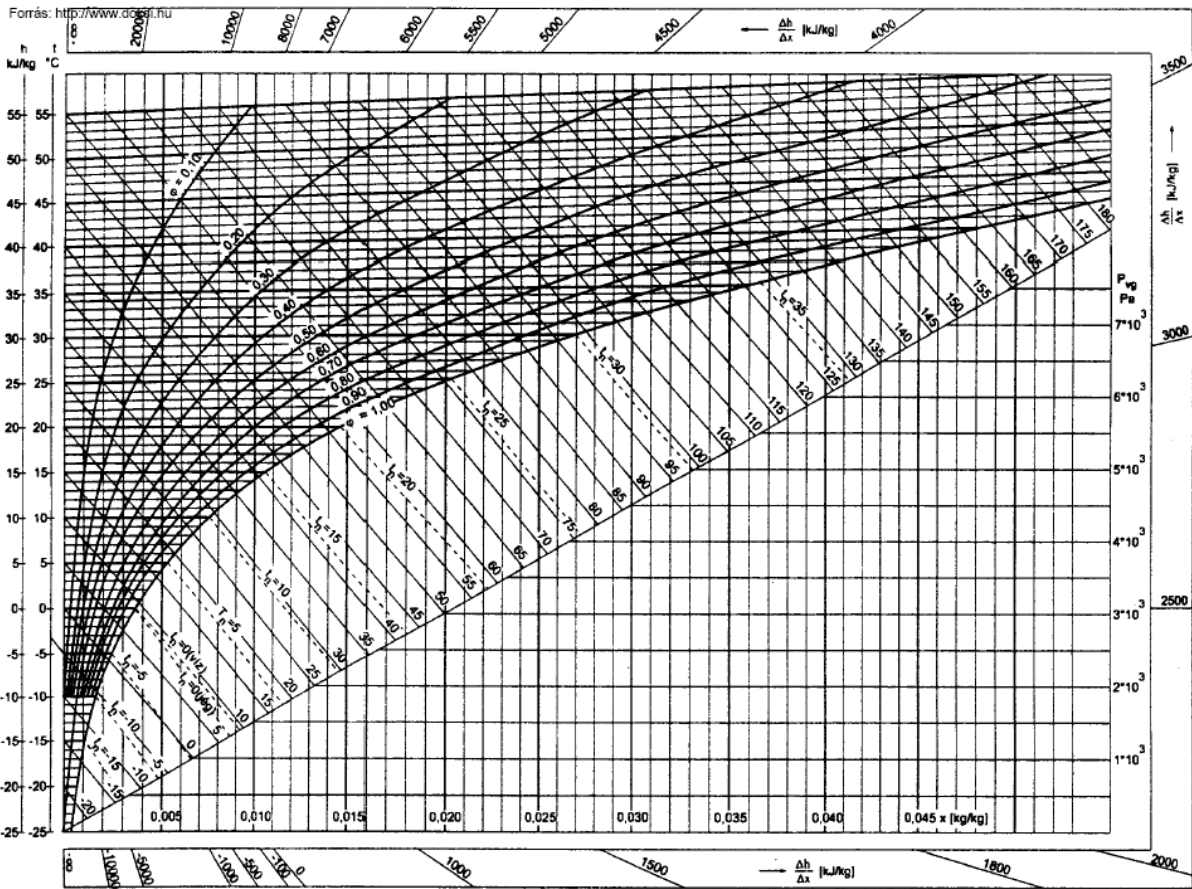
illetve a nyomások felhasználásával a kapcsolat

$$\psi = \frac{0,622 \cdot \frac{p_g}{p_{\ell+x} - p_g}}{0,622 \cdot \frac{p_s}{p_{\ell+x} - p_s}} = \varphi \cdot \frac{p_{\ell+x} - p_s}{p_{\ell+x} - p_g}$$

formában írható fel. Amíg a keverék hőmérséklete jóval kisebb, mint az össznyomáshoz tartozó telítési hőmérséklet, az x és $x_s \ll 1$, illetve $p_g \ll p_{\ell+x}$ és $p_s \ll p_{\ell+x}$ így a gyakorlatban a $\varphi \approx \psi$.

Az izotermákon a telített állapot ($\varphi=1$) és a teljesen száraz ($\varphi=0$) levegő közötti tartományban a különböző telítettségi állapotokat ($\varphi=0,1; 0,2; \dots$) leíró görbéket is ábrázolhatjuk.

Az telítési értékekhez tartozó izoterma töréspontokat összekötő görbét telítési görbének nevezzük. A telítési görbe helyzetét a nedves levegő össznyomásának értéke befolyásolja. A nagyobb össznyomások esetén a 6.10 egyenlet szerint a telítési állapothoz tartozó nedvességtartalom kisebb, így a telítési görbe balra tolódik el. A telítési görbe alatti tartományt az egyenletesen szétoszlott folyadékfázis jellegzetes alakjáról ködmezőnek nevezzük.



Mollier h-x levegő nedvesség diagramja
6.3 ábra

6.4 Légállapot vizsgálat fűtés során



Egy klimatizálási probléma során a külső levegő állapota $t_e/\phi_e=+10\text{ }^\circ\text{C}/50\%$. A levegőt $t_i=25\text{ }^\circ\text{C}$ -ra kell felmelegíteni.

Kérdések:

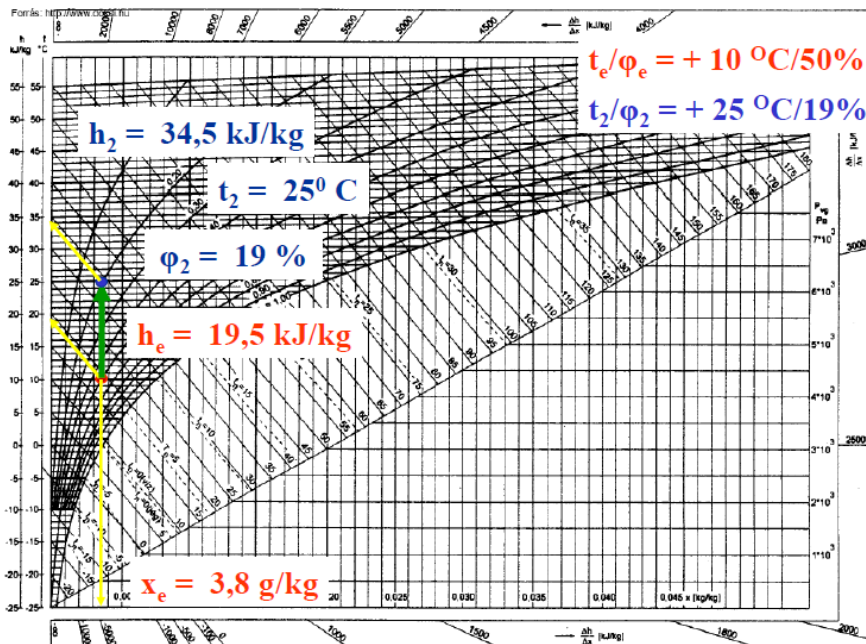
- Rajzoljuk be a légállapot változást h-x diagramba és olvassa le az abszolút nedvességtartalom és hőtartalom értékeit!
- Ezután a levegőt egy légmosóban nedvesítjük $\phi=100\%$ -os relatív nedvességtartalomig. Milyen értékek olvashatók le ekkor t, ϕ , x és h-ra?
- Nedvesítés után utófűtőben a levegőt fűtsük fel $t_4=22\text{ }^\circ\text{C}$ -ra. Milyen értékeket kapunk akkor a h-x diagramban?

Megoldás: A diagram alapján elvileg kiolvasható minden egyes ponthoz a légállapot.

a./ Az előfűtésnél a levegőt melegítjük. Az abszolút nedvessége (x) nem változik, így egy függőleges vonal mentén halad felfelé az állapotváltozás. Az 1 és 2 pontokban érvényes

hőmérsékleteket, entalpiákat és relatív nedvességeket és az ábrára beírtuk. A melegítéssel növekedett a keverék entalpiája és csökkent a relatív nedvessége.

Megoldás: a./ előfűtés 25^o C-ra



Előfűtés diagramban
6.4 ábra

b./ A légnedvesítés során az állapotváltozás iránya alapvetően a víz hőmérsékletétől függ. Az ábrán feltüntetett nedvesítés közelítőleg állandó entalpia mentén történt. Ekkor a bepermetezett víz hőmérséklete megegyezik a levegő hőmérsékletével. A lehűlést a víz elpárolgása okozza. A latens hő csökkenti a keverék hőmérsékletét.

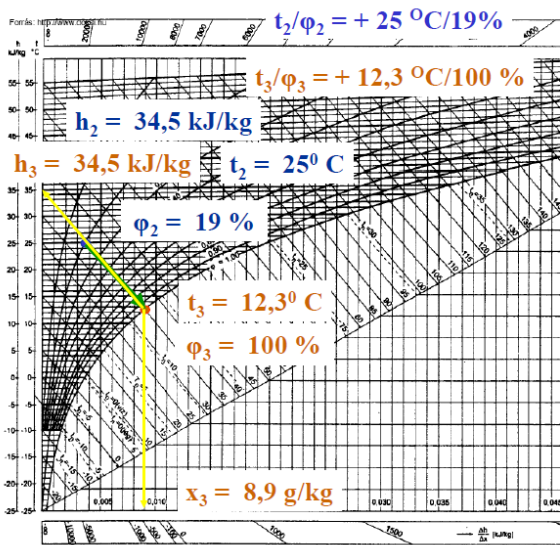
Az 2 és 3 pontokban érvényes hőmérsékleteket, entalpiákat és relatív nedvességeket az ábrára beírtuk. A nedvesítéssel változatlan maradt a keverék entalpiája és csökkent a hőmérséklete és 100%-ra nőtt a relatív nedvessége. A levegő abszolút nedvessége is növekedett, ez a célja a nedvesítésnek.

c./ Az utófűtésnél hasonló állapotváltozás megy végbe, mint az előfűtésnél, a levegőt melegítjük. Az abszolút nedvessége (x) nem változik, így egy függőleges vonal mentén halad felfelé az állapotváltozás. Az 3 és 4 pontokban érvényes hőmérsékleteket, entalpiákat és relatív nedvességeket és a **6.5 ábrába** beírtuk. A melegítéssel a megnőtt a keverék entalpiája és csökkent a relatív nedvessége.

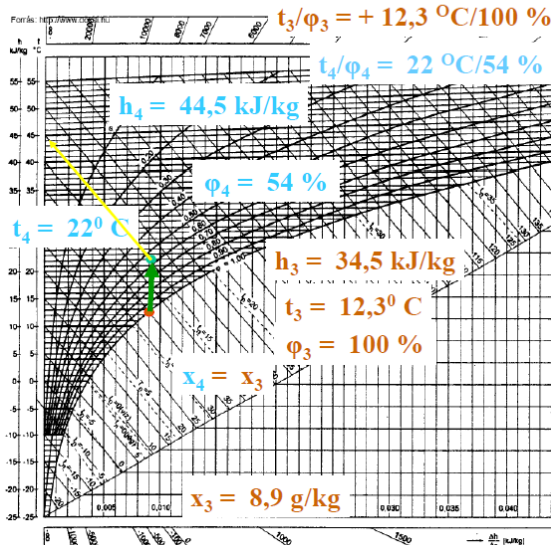
A nedvesítést és az utófűtést egy lépésben is el lehet végezni, ebben az esetben gőzzel nedvesítjük a levegőt. Ez is egy szokásos eljárás a klímatisztálásban.

Elektromos gőzfejlesztőből nyert, kisnyomású gőz esetén az állapotváltozás vonala kis eltéréssel egyezik a $t=$ áll. vonallal. Egyszerűség kedvéért a szerkesztéseket így végezzük.

Megoldás: b./ légnedvesítés



Megoldás: c./ utófűtés 22° C-ra



Légnedvesítés és utófűtés a diagramban
6.5 ábra

6.5 Légállapot vizsgálat hűtés során



Gyakori klimatechnikai feladat nyáron a levegő hűtése. A hűtés során gyakran kicsapódik a légnedvesség, mert a harmatpontig lehűtjük a levegőt. Egy klimatizálási feladat során a külső levegő állapota $t_e/\phi_e = +32\text{ °C}/40\%$. A levegőt $t_i = 14\text{ °C}$ -ra kell lehűteni telítési állapotra.

Kérdések:

- Rajzoljuk be a légállapot változást h-x diagramba és olvassa le az abszolút nedvességtartalom és hőtartalom értékeit!
- Ha a hűtőberendezés óránként $\dot{m}_{\text{lev}} = 48000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$ levegőt szállít, mennyi víz csapódik ki a levegőből óránként?
- Mekkora a berendezés hűtőteljesítménye?
- Mekkora a rejtett és az érzékelhető hűtőteljesítménye?

Megoldás: A diagram alapján elvileg kiolvasható minden egyes ponthoz.

a./ A hűtés során először azonos abszolút légnedvesség mellett csökken a hőmérséklet és nő a relatív nedvesség. A hűtés során elérve a telítési állapotot, ami kb. $t_2^* = 17\text{ °C}$ hőmérsékletnél következik be, megkezdődik a víz kiválása a levegőből. Tovább hűtve a levegőt, egyre több víz csapódik ki és a telítési görbén haladva hül egészen az előírt $t = 14\text{ °C}$ hőmérsékletig. A vízkicsapódás és a hűlés következtében entalpiája lecsökken.

b./ Egy kilogramm levegőből $x_e - x_2 = 11,8 - 9,9 = 1,9 \left[\frac{\text{g}}{\text{kg}} \right]$ víz csapódik ki. A diagramban ábrázolt 1 kg-ra vonatkozó változást a hűtés során alkalmazott teljes légmennyiségen el kell végezni. Így kiszámíthatjuk az óránként kicsapódó víz mennyiségét.

$$\dot{m}_{\text{v\u00edz}} = \dot{m}_{\text{leveg\u0151}} \cdot (x_e - x_2) = 48000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \cdot (11,8 - 9,9) \left[\frac{\text{g}}{\text{kg}} \right] = 91\,200 \left[\frac{\text{g}}{\text{h}} \right] = 91,2 \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right]$$

Tetemes mennyiség\u00fc v\u00edz keletkezik a h\u00fct\u00e9s sor\u00e1n.

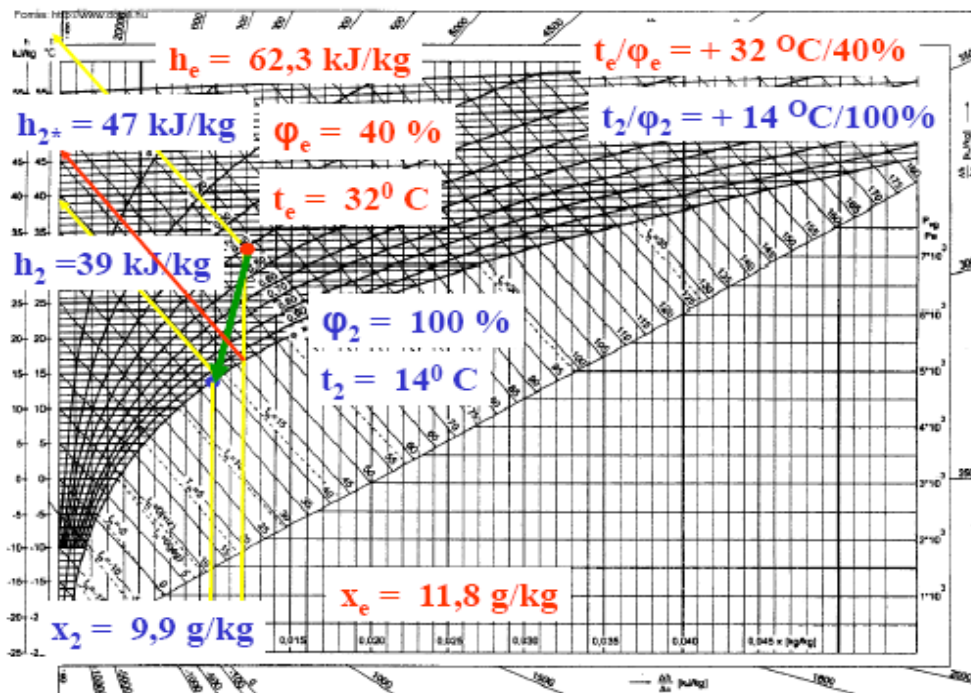
c./ A h\u00fct\u0151berendez\u00e9snek biztos\u00edtania kell a leveg\u0151 entalpi\u00e1j\u00e1nak cs\u0151kken\u00e9s\u00e9t, amit a k\u0151vetkez\u0151k\u00e9ppen sz\u00e1m\u00edthatunk:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{h\u00fct}} &= \dot{m}_{\text{leveg\u0151}} \cdot (h_e - h_2) = 48000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \cdot (62,3 - 39) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] = 1118400 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right] \\ \dot{Q}_{\text{h\u00fct}} &= 1118400 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right] \cdot \frac{1}{3600} \left[\frac{\text{h}}{\text{s}} \right] = 310,6 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{s}} \right] = 310,6 [\text{kW}] \end{aligned}$$

d./ Egy h\u00fct\u0151berendez\u00e9s h\u00fct\u0151teljes\u00edtm\u00e9nye \u00e1ltal\u00e1ban k\u00e9t r\u00e9szre oszthat\u0151: az egyik r\u00e9sze cs\u0151kkenti a leveg\u0151 h\u0151m\u00e9rs\u00e9klet\u00e9t, ez az \u00e9rezhet\u0151 h\u00fct\u0151teljes\u00edtm\u00e9ny, a m\u00e1sik r\u00e9sze arra ford\u00edt\u0151dik, hogy a kicsap\u0151d\u0151 v\u00edz rejtett h\u0151j\u00e9t elvezesse, ez a rejtett h\u00fct\u0151teljes\u00edtm\u00e9ny.

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{h\u00fct}} &= \dot{Q}_{\text{\u00e9rezhet\u0151}} + \dot{Q}_{\text{rejtett}} \\ \dot{Q}_{\text{rejtett}} &= \dot{m}_{\text{leveg\u0151}} \cdot (h_{2^*} - h_2) = 48000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right] \cdot (47 - 39) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] = 384\,000 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right] \\ \dot{Q}_{\text{rejtett}} &= 384\,000 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right] = 384\,000 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right] \cdot \frac{1}{3600} \left[\frac{\text{h}}{\text{s}} \right] = 106,6 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{s}} \right] = 106,6 [\text{kW}] \\ \dot{Q}_{\text{\u00e9rezhet\u0151}} &= \dot{Q}_{\text{h\u00fct}} - \dot{Q}_{\text{rejtett}} = 310,6 [\text{kW}] - 106,6 [\text{kW}] = 204 [\text{kW}]. \end{aligned}$$

Megoldás: a./ hűtés



Hűtés folyamata a diagramban
6.6 ábra



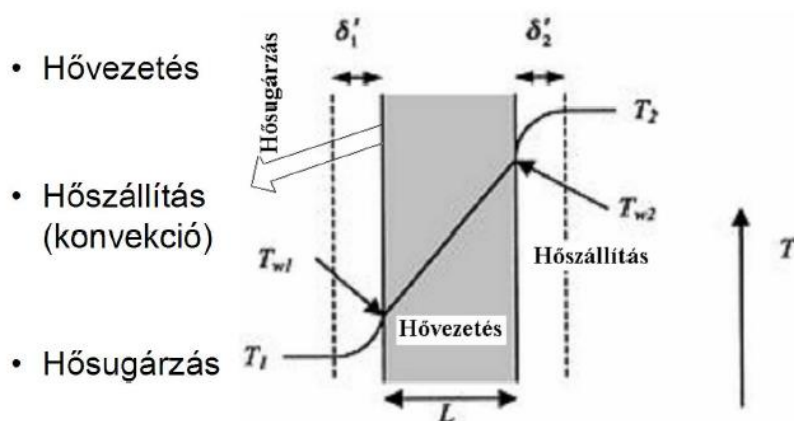
7. Hőterjedés

A hőenergia a hőmérséklet-különbség következtében történő térbeli terjedése általában igen összetett folyamatok eredménye. A hő terjedésének mennyiségi leírásához a következő három elemi folyamatot különböztetjük meg.

Hővezetés (kondukción) - az energia terjedésének az a módja, amikor a hő egy közeg egyik - magasabb hőmérsékletű - részéből annak másik része felé történő "áramlása" során a közeget alkotó részecskék elmozdulása nem számottevő illetve rendezetlen. (Például az egyik végén melegített rúd másik vége is felmelegszik, az energia a rúd melegebb végétől hővezetéssel jut a másik végéhez.)

Hőszállítás (konvekcion) - az energia terjedésének az a formája, amikor a közeget alkotó részecskék rendezett elmozdulásának (áramlásának) következtében valósul meg. Az energia az anyaggal együtt áramlik.

Hősugárzás az energia térbeli terjedésének elektromágneses hullámok formájában megvalósuló folyamata, ami közvetítő közeg szükségessége nélküli mechanizmus. Az energia áramlásának a három formája gyakran egyszerre jelentkezik. Azt a formát szoktuk kiragadni a tárgyalásból, amelyik domináns az energia áramlás szempontjából.



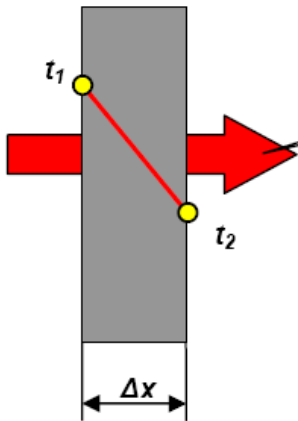
Hőterjedés különböző formái

7.1 ábra

7.1 A hővezetés

A hővezetés konkrét mechanizmusa a különböző közegek esetében azonban lényegesen különbözik egymástól. Gázokban az atomok, molekulák rendezetlen mozgása miatti ütközéseknek (és a diffúzió) következtében terjed az energia. A fémekben a hő két párhuzamos, majdnem független mechanizmus révén terjed, egyrészt a kristályrácsot alkotó atomok rezgése által, másrészt a szabad elektronok diffúziója révén. A nem fémes anyagok és folyadékok esetén az energia terjedése rugalmas elemi hullámok révén valósul meg.

Két egymással párhuzamos sík felülettel határolt szilárd testen át történő hővezetésre a francia fizikus és matematikus, Jean Baptiste, Joseph Fourier állított fel egy tapasztalati összefüggést a XIX. század elején. Megfigyeléseik szerint a vezetés útján időegység alatt terjedő hőáram (Q) mennyisége egyenesen arányos a hőmérsékletkülönbséggel (t_1-t_2), a felületek nagyságával (A) és fordítottan arányos a felületek távolságával (Δx) és arányos a szilárd test anyagára jellemző (λ) ún. hővezetési tényezővel. A mínusz előjel mutatja, hogy a hőáram a csökkenő hőmérséklet felé áramlik.



Hővezetés szilárd testben
7.2 ábra

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{(t_1 - t_2)}{\Delta x} \quad [\text{W}] \quad 8.1$$

Bevezetve a hőáramsűrűséget, amely egységnyi felületen átáramló hőáram (differenciális formába valamint vektorosan felírva):

$$q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} \quad 8.2$$

$$\underline{q} = -\lambda \cdot \text{grad } t \quad 8.3$$

A Fourier-féle hővezetési egyenletben szerepel egy anyagjellemző, a hővezetési tényező.

7.1.1 A hővezetési tényező (λ)

A hővezetési tényezőt kifejezve a Fourier-egyenletből megkapjuk annak mértékegységét is. Jelentése, hogy egy méter hosszon egy Kelvin hőmérséklet különbség hatására mekkora hőáram indul meg az anyagban.

$$\lambda = -\frac{\dot{q}}{\text{grad } t} \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

A hővezetési tényező legtöbbször nem állandó, hanem a hőmérséklet függvényében változik. Ez a változás kisebb hőmérsékletkülönbségek esetében elhanyagolható. Nagyobb hőmérsékletkülönbségek esetében köszönhetően annak, hogy a hővezetési tényező többnyire a hőmérséklet lineáris függvénye, a közepes hőmérsékletnek megfelelő átlagértékkel lehet számolni. A hővezetési tényezővel ill. a hővezetési tulajdonság és az elektromos vezetőképesség között is fennáll az analógia. Az elektromosan vezető anyagok (fémek) hővezetési tényezője jó. Ezzel ellentétben a nem fémes anyagok hővezetési tényezője lényegesen rosszabb, ezek hőszigetelő tulajdonságúak. Mindennek alapvető magyarázata, hogy a fémekben sok a szabad elektron, melyek elektromos feszültségkülönbség hatására történő áramlása az elektromos áram, és ezek szerint a hőáramlásban is szerepet játszik a mozgásuk.

A következő táblázatban néhány anyag hővezetési tényezőjét tüntettük fel:

7.1 táblázat Anyagok hővezetési tényezője

Anyag	Hővezetési tényező λ [W/mK]	Anyag	Hővezetési tényező λ [W/mK]	Anyag	Hővezetési tényező λ [W/mK]
Fémek		• Egyéb anyagok		Gázok	
Alumínium	210	Alumínium	210	Levegő	0,026
Sárgaréz	85	Sárgaréz	85	Széndioxid	0,017
Réz	386	Réz	386	Nitrogén	0,025
Arany	393	Arany	393	Oxigén	0,027
Vas	73	Vas	73		
Ólom	35	Ólom	35		
Platina	70	Platina	70		
Ezüst	408	Ezüst	408		
Acél	48	Üvegszál	0,04		
Folyadékok		Gránit	2,1		
Aceton	0,20	Jég	2,2		
Benzin	0,16	Lenvászon	0,088		
Etilalkohol	0,17	Papír	0,13		
Higany	8,7	Puha gumi	0,14		
Motorolaj	0,15	Száraz homok	0,39		
Vazelin	0,18	Selyem	0,04		
Víz	0,58	Tömör hó	0,21		
		Száraz talaj	0,14		
		Fa	0,13		

A táblázat szerint a fémek jól vezetik a hőt. A fémek közül a réz és az alumínium jó hővezető, ezért előszeretettel alkalmazzák hőcserélők gyártására. A folyadékok hővezetése nagyságrenddel rosszabb és a gázok kifejezetten jó hőszigetelők. (Feltéve, hogy nem indul meg bennük áramlás, mert akkor már konvekcióval továbbítják a hőt.) Az állatok szőrzete és tollazata a beljük zárt levegőnek köszönheti jó hőszigetelő tulajdonságait.

7.1.2 Stacioner hővezetés szilárd testekben

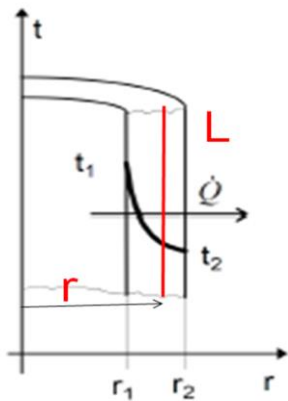
A következőkben nem mutatjuk a hővezetés differenciál egyenletének főbb gyakorlati eseteit. A sík falakban, csövekben és gömbfelületekben kialakuló hőfokmegoszlást.

Sík falakon keresztül történő hővezetés, stacioner esetben egyszerű lineáris hőfokmegoszlást eredményez. Ezt később, a hőátbocsájtásnál tárgyaljuk.

Vastag falú csövekben a hőfokmegoszlás már ennél bonyolultabban alakul.

Hővezetés stacioner esetben, vastag csőfalban.

A csővezeték belsejében egy meleg közeg áramlik. Ennek hatására a csőfalán keresztül megindul a hő áramlása a hidegebb külső térbe. Stacioner áramlást feltételezve a cső minden egyes „r” sugarú hengerpalástján azonos hőáram áramlik át. Ennek nagysága \dot{Q} .



Hővezetés csőfalban
7.3 ábra

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dt}{dr}$$

Fejazzuk ki az egyenletből a hőmérséklet változását a sugár mentén. Nyilván a belső, kisebb paláston gyorsabban változik a hőmérséklet, mint a külső nagyobb paláston. Válasszuk szét a differenciál-egyenletet.

$$\dot{Q} \cdot \frac{dr}{r} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot L \cdot dt,$$

majd integráljuk a belső és egy futó sugár között:

$$\dot{Q} \cdot \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot L \cdot \int_{t_1}^t dt.$$

$$\dot{Q} \cdot \ln \frac{r}{r_1} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot L \cdot (t - t_1)$$

Fejazzuk ki a hőmérséklet-függvényt:

$$t = t_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot 2\pi \cdot L} \cdot \ln \frac{r}{r_1}$$

A kapott hőmérséklet a belső felületen a legnagyobb, majd logaritmikusan csökken kifelé haladva. Jellegét a 7.3 ábra mutatja.

A hőáramot kifejezhetjük a hőmérséklet különbséggel és az anyag és geometriai jellemzőkkel.

$$\dot{Q} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot L \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\dot{Q} = 2\pi \cdot \lambda \cdot L \cdot \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad [W] \quad 8.4$$

Hővezetés stacioner esetben, gömbhéjban

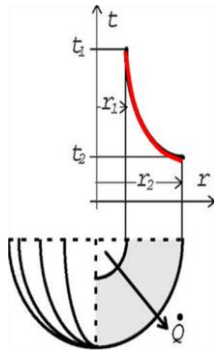
Egy gömb alakú tartály belsejében egy meleg közeg van. Ennek hatására a gömb falán keresztül megindul a hő áramlása a hidegebb külső térbe. Stacioner esetben gömb minden egyes „r” sugarú gömbpalástján azonos hőáram áramlik át. Ennek nagysága \dot{Q} .

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{dt}{dr}$$

Fejazzuk ki az egyenletből a hőmérséklet változását a sugár mentén. Nyilván a belső, kisebb gömbhájon gyorsabban változik a hőmérséklet, mint a külső nagyobb héjon. Válasszuk szét a differenciál-egyenletet.

$$\dot{Q} \cdot \frac{dr}{r^2} = -\lambda \cdot 4\pi \cdot dt,$$

majd integráljuk a belső és egy futó sugár között.



$$\dot{Q} \cdot \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2} = -\lambda \cdot 4\pi \cdot \int_{t_1}^t dt$$

$$\dot{Q} \cdot \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right]_{r_1}^r = -\lambda \cdot 4\pi \cdot (t - t_1)$$

Fejezzük ki a hőmérséklet-függvényt:

$$t = t_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Hővezetés gömbhéjban 7.4 ábra

A kapott hőmérséklet a belső felületen a legnagyobb, majd hiperbolikusan csökken kifelé haladva. Jellegét a **7.4 ábra**

mutatja.

A hőáramot kifejezhetjük a hőmérséklet különbséggel és az anyag és geometriai jellemzőkkel.

$$\dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (t_1 - t_2)}{r_2 - r_1} \quad 8.5$$

Összefoglalhatjuk a különböző geometriai falakon keresztül létrejövő hőáramokat.

Geometria, használatos jelölések			
Hőáram- és a hőfokeloszlás számítási összefüggései	$\dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \frac{(t_1 - t_2)}{\delta}$ $t(x) = t_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda \cdot A} \cdot x$ $t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} \cdot x$	$\dot{Q} = \frac{2\pi L \lambda}{\ln(r_2/r_1)} (t_1 - t_2)$ $t(r) = t_1 - \frac{\dot{Q}}{2L\pi\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$ $t(r) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$	$\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{1/r_1 - 1/r_2}$ $t(r) = t_1 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$ $t(r) = t_1 - \frac{(t_1 - t_2)r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$
Egyenértékű hővezető keresztmetszet	$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A_e \cdot (t_1 - t_2)$ <p>Hőáramot hengerre és gömbre így is számíthatjuk, a δ és az A_e értékeivel.</p>	$\delta = r_2 - r_1$ $A_e = \frac{2\pi L (r_2 - r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$ <p>ha $r_2/r_1 \leq 2$</p> $A_e \approx (r_1 + r_2)\pi L$	$\delta = r_2 - r_1$ $A_e = 4\pi r_1 r_2$
Egy réteg hőellenállása	$R_\lambda = \frac{\delta}{A\lambda}$	$R_\lambda = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2L\pi\lambda}$	$R_\lambda = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda r_1 r_2}$
Több réteg eredő hőellenállása	$R_\lambda = \frac{1}{A} \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$	$R_\lambda = \frac{1}{2\pi L} \sum_1^n \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\lambda_i}$	$R_\lambda = \frac{1}{4\pi} \sum_1^n \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} r_i \lambda_i}$

A hővezetés különböző falgeometriák esetében [5]

7.1.3 A hőellenállás

A fémeknél a hővezetés és az elektromos vezetés analóg. A jó hővezető fémek jó elektromos vezetők is. Az analógia felhasználásával hőellenállást is lehet definiálni, az elektromos ellenállás analógiájára.

A hővezetés síkfalra vonatkozó egyenletét úgy rendezzük át, hogy a hőmérsékletkülönbsége maradjon a jobb oldalon, az eredmény (használjuk a $-\Delta x = \delta$ jelölést).

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \frac{(t_1 - t_2)}{\delta} \text{ [W]}$$

Alakítsuk át az egyenletet olyan alakra, hogy az egyik oldalon a hőmérsékletkülönbség, a másik oldalon a hőáram szerepeljen.

$$t_1 - t_2 = \frac{\delta}{\lambda \cdot A} \cdot \dot{Q} \quad 8.6$$

Az $R_h = \frac{\delta}{\lambda \cdot A}$ kifejezés un. **termikus- v. hőellenállás** bevezetésével Fourier és az Ohm törvény analógiája nyilvánvaló:

$$t_1 - t_2 = R_h \cdot \dot{Q} \\ U = R \cdot I$$

Az egyszerű geometriájú, állandó hővezetési tényezőjű testek hőellenállásának számítási összefüggését szintén tartalmazza a **7.5 ábra** az egy- és többrétegű szerkezetekre is. A réteges szerkezetekre a táblázatbeli értékek csak abban az esetben érvényesek, ha az egyes rétegek ideálisan kapcsolódnak egymáshoz, azaz a közöttük lévő kontaktus a hőáram számára nem jelent ellenállást.

7.1.4 Instacioner hőáramlás

Anyagok melegítése illetve hűtése nagyon gyakori jelenség. Gondoljunk csak a főzésre, de ha a gépészet területét nézzük, akkor az anyagok meleg megmunkálása, acélok edzése is ilyen folyamat. Ezekben a folyamatokban melegítjük, hűtjük az anyagokat, és gyakran nagyon gyorsan végezzük ezt a műveletet. Ilyenkor számolnunk kell a hő időbeli terjedésével is. Ezt írja le a hővezetés differenciálegyenlete általános alakban.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right) + q_v$$

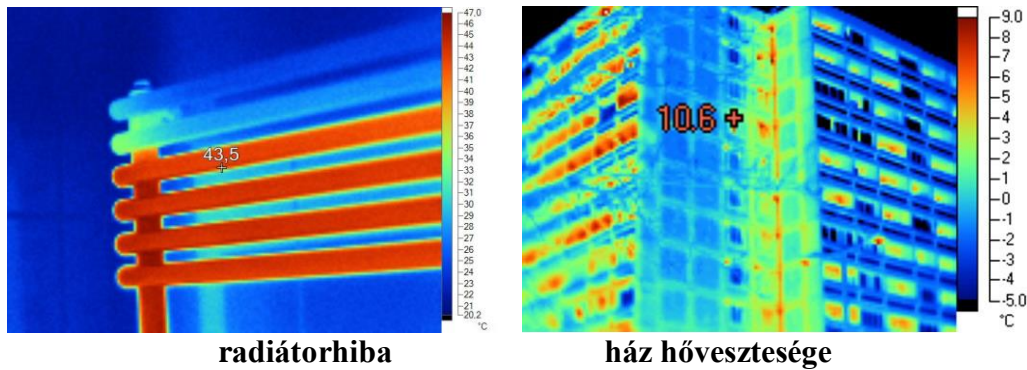
ahol ρ (sűrűség), c , (fajhő) λ (hővezetési tényező) és q_v (térfogati hőforrás) a helytől (esetleg időtől is) (x, y, z koordinátáktól) és a T hőmérséklettől is függő hőtechnikai paraméterek. A hővezetés differenciál egyenlete állandó λ hővezetési tényező esetén:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad 8.7$$

Definiáljuk az „a” hőmérsékletvezetési tényező vagy hőfokvezetési tényező fogalmát.

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

A fenti differenciál egyenlet megoldása igen bonyolult. Bizonyos esetekben létezik analitikus megoldása is. Fontos még, hogy a megoldás egyértelműségéhez nagyon fontos a kezdeti- és a peremfeltételek pontos megadása is. Manapság sok szoftver áll rendelkezésre, amelyekkel az egyenlet megoldása nagyon jól előállítható. A megoldást szemléletes módon hőfénykép formájában is képesek ezek a szoftverek megjeleníteni, amelyek közvetlen összehasonlíthatók hőkamerával készült mérésekkel is.



radiátorhiba

ház hővesztése

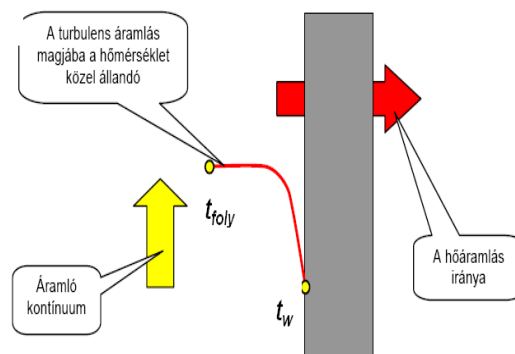
Hőkamerás felvételek

7.6 ábra

[<http://www.pairform.hu/index.php?thermog>]

7.2 Hőátadás

A szilárd testekben lejátszódó hővezetési folyamatokat a legtöbb esetben az okozza, hogy azok a felszíni hőmérsékletüktől eltérő hőmérsékletű folyadékkal (gázzal) érintkeznek. A szilárd felszín és a folyadék határon át való hőterjedés a hőátadás. Amely általában egy hővezetés és egy konvekció együttes hatásaként jön létre.



Hőátadás fal melletti áramlásban

7.7 ábra

<http://5mp.eu/web.php?a=redony&o=Mcbz5RmPEil>

A hőátadás alapegyenlete Newton által felírt alakja:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (t_{foly} - t_w) [W] \quad 8.8$$

ahol:

- Q** a szilárd test felszínén fellépő hőáram, [W]
- A** a folyadékkal érintkező felület, [m²]
- t_w** a test felszínének hőmérséklete, [°C], vagy [K.]

t_{foly} a folyadék hőmérséklete, [°C], vagy [K]

α a hőátadási tényező $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$

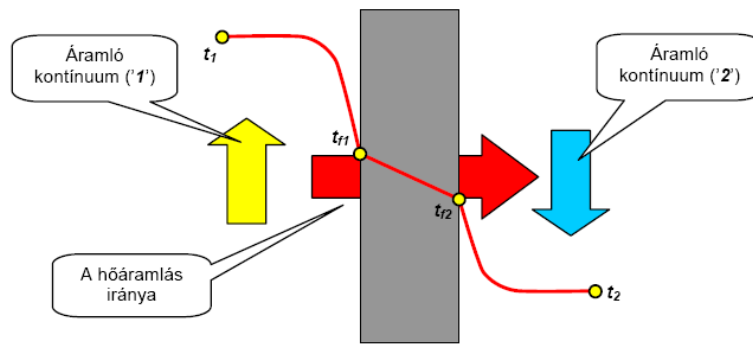
A test felszíne és a folyadék közötti hőáram fenti felírásakor feltételeztük, hogy a teljes felszín hőmérséklete azonos (izotermikus), és a folyadék egyetlen hőmérséklettel jellemezhető. A hőátadási tényező ilyen módon történő bevezetésével egy összetett folyamat két leglényegesebb paraméterét, a hőmérséklet-különbséget és a felületet kiemelve, valamennyi egyéb fizikai hatást (áramlás jellege, sebesség, stb.) a hőátadási tényező magában foglal. Ezeknek a hatásoknak az eredőjét a számértékével fejezi ki. A hőátadási tényező számítása igen bonyolult összefüggésekkel lehetséges, későbbiekben még tárgyaljuk.

A szerkezet megnevezése és térbeli, illetve a hőáramhoz viszonyított helyzete	α külső [W/m ² K]	α belső [W/m ² K]
Külső fal és nyílászáró	24	8
Belső fal és nyílászáró	8	8
Lapostető és felülvilágító	24	10
Belső födém (felfelé hűlő), padlásfödém	12	10
Belső födém (lefelé hűlő), pincefödém	8	6
Árkád feletti födém	20	6

7.2 táblázat Építészetben alkalmazott hőátadási tényezők

7.3 Hőátvitel

A mérnöki gyakorlatban sűrűn előforduló feladat, hogy a rendszerben lévő közeggel hőt kell közölni, vagy belőle hőt kell elvonni a rendszer szilárd falán át és a hő a környezetből érkezik vagy oda kell átadni. Ez a folyamat, mely tehát egy hőátadásból (a rendszerben lévő folyadék és a rendszer fala között), egy hővezetésből (a rendszer falán át történik) és egy további hőátadásból (a rendszer fala és a környezet között) zajlik. Ezt röviden hőátvitelnek nevezzük. Ilyen hőátvitel megy végbe az épületek belső tere és a környezet között is. Manapság ezt a hőátvitelt igyekeznek az építészek minél kisebbre csökkenteni. Az épületek hűtése és fűtése igen tetemes energiaráfordítással jár. Az energiafelhasználás csökkentésének ez egy igen hatékony módszere. Példáinkat is e témakörből vesszük. A gépészetben gyakran ennek az ellenkezője a feladat, vagyis minél hatékonyabb, gyorsabb hőátvitel a cél. Gondoljunk például motorok hűtési problémájára.



Hőátvitel sík falon

7.8 ábra

[<http://5mp.eu/web.php?a=redony&o=Mcbz5RmPEj>]

Elsőként vizsgáljunk egy sík falon keresztül történő hőátvitelt. Épületek esetében ez a leggyakoribb eset.

Az **7.8 ábrán** bemutatott három hőmérsékletkülönbségre a megfelelő összefüggéseket írhatjuk fel. A fal bal oldalán egy melegebb közeg átadja a hőjét hőátadással a falnak. A falon keresztül hővezetéssel jut át a hő, majd a jobb oldalon lévő közeg ismét hőátadással veszi fel a hőt. Feltételezzük, hogy a jelenség stacioner. Ez annyit jelent, hogy időben nem változnak a hőmérsékletek és hőáramok. Az a hőáram, amit a bal oldali melegebb közeg lead, teljes mértékben eljut a jobb oldali hidegebb közegbe. Vagyis a hőáram mindkét közegben és a falban is egyforma.

Elsőként írjuk fel a Newton-féle lehülési törvénnyel a bal oldali közeg által leadott hőáramot (\dot{Q}).

$$\dot{Q} = A \cdot \alpha_1 \cdot (t_1 - t_{f1}) \quad [\text{W}] \quad 8.9$$

Majd a falon hővezetéssel átmenő hőáramot a Fourier-törvénnyel,

$$\dot{Q} = A \cdot \lambda \cdot \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\delta} \quad [\text{W}] \quad 8.10$$

és végül ismét a Newton-féle lehülési törvénnyel

$$\dot{Q} = A \cdot \alpha_2 \cdot (t_{f2} - t_2) \quad [\text{W}]. \quad 8.11$$

Fejezzük ki mindhárom összefüggésből a hőmérséklet különbségeket:

$$t_1 - t_{f1} = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_1} \quad t_{f1} - t_{f2} = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \lambda / \delta} \quad t_{f2} - t_2 = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_2},$$

ezután pedig adjuk össze a három egyenletet. A bal oldalon a meleg és a hideg közeg átlagos hőmérséklete marad $t_1 - t_2$.

$$t_1 - t_2 = \dot{Q} \cdot \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad 8.12$$

Írjuk át az egyenletet a Newton-féle lehülési törvényhez hasonló alakra

$$\dot{Q} = A \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot (t_1 - t_2) \quad 8.13$$

$$\dot{Q} = A \cdot k \cdot (t_1 - t_2) \quad 8.14$$

Vezessük be a „k” tényezőt, amit hőátviteli-tényezőnek (hőátbocsájtási-tényező) nevezünk. A hőátadási tényezőkkel és a fal hővezetésével és annak vastagságával kifejezve a „k”-t a következőt kapjuk:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad 8.15$$

Az összefüggés szerkezetéből adódik, hogy adott falvastagság és hővezetési tényező esetén a hőátviteli-tényező mindenképpen kisebb, mint a két közeg oldalán jelentkező hőátadási tényezők bármelyike. Ennek természetes következménye, hogy adott fal esetén a hőátviteli tényező növelése vagy csökkentése a leghatékonyabban minden esetben a rosszabbik hőátadási tényező változtatásával érhető el.

Szokásos a képletet a hőellenállásokkal is felírni. Ez az egyes egyenletek rendre:

$$t_1 - t_{f1} = R_{\alpha 1} \cdot \dot{Q} \quad t_{f1} - t_{f2} = R_{\lambda} \cdot \dot{Q} \quad t_{f2} - t_2 = R_{\alpha 2} \cdot \dot{Q}$$

ahol:

$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{A \cdot \alpha_1} \quad R_{\lambda} = \frac{1}{A \cdot \lambda / \delta} \quad R_{\alpha 2} = \frac{1}{A \cdot \alpha_2}$$

Összeadva a felső három egyenletet, kapjuk:

$$t_1 - t_2 = (R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}) \cdot \dot{Q} \quad 8.16$$

A képletből jól látható, hogy a hőellenállások összeadódnak. Az eredő a részek összege. Egy sorba kapcsolt rendszernek felel meg. Tehát bármelyik ellenállásnál nagyobb lesz az eredő ellenállás. Összevetve a hőátviteli-tényezővel látható, hogy a hőellenállásban a felület nagysága is szerepel. Növekvő felülettel csökken a hőellenállás, és növekvő hőátviteli-tényező is csökkenti a hőellenállást. Tehát, ha az épületeknél növelni akarjuk a hőellenállást, akkor vagy a felületet csökkentjük vagy a hőátviteli tényezőt csökkentjük. Az építészek ez utóbbin fáradoznak főként a hőszigetelés növelésével.

$$\frac{1}{k \cdot A} = R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Többrétegű falaknál a hővezetéssel átvitt hőnek minden egyes rétegen át kell jutnia. A számításban a **7.5 ábra** összefüggéseit kell alkalmazni ilyen esetben.

7.4 Hőátvitel többrétegű falon



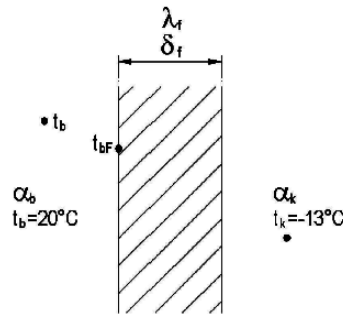
Egy építészeti példán keresztül vizsgáljuk meg a számítás részleteit, és egyben azt is, hogy milyen energetikai előnyökkel jár a falszerkezet hőszigetelése.

Indulunk ki egy hagyományos téglapépület 38-as falának szigeteléséből. A 38-as fal 38 cm vastag, hagyományos téglából, malterrel összeépített falszerkezet

az alábbi paraméterekkel. Ismerjük a fal teljes hőátviteli tényezőjét, k -t. Építészetben U -val szokták jelölni. Első kérdésként a fal hővezetési tényezőjét kell meghatározni. Majd a falat kívülről hőszigeteljük különböző vastagságú hőszigetelő anyaggal, és megvizsgáljuk, milyen hatása van a fal belső hőmérsékletére és a hővesztésre.

Adatok:

$$t_b = 20^\circ\text{C}; t_k = -13^\circ\text{C}; \alpha_k = 20 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]; \alpha_b = 8 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]; k(U) = 1,5 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$$



A falszerkezet és a hőmérséklet adatok
7.9 ábra

Kérdések:

- Mekkora a fal hővezetési tényezője, ha vastagsága 38 cm?
- Mekkora a fal belső felületének hőmérséklete?
- Milyen vastag $\lambda_{sz} = 0,04 \text{ [W / m} \cdot \text{K]}$ hővezetési tényezőjű szigetelésre van szükség, hogy a falszerkezet hőátbocsátási tényezője a felére csökkenjen?
- Mekkora ebben az esetben a fal belső hőmérséklete?
- Milyen vastag hőszigetelés kell, hogy az új előírásokat teljesítse a falszerkezet? (7/2008.(V.24.) TNM rendelet),
- Mekkora ebben az esetben belső hőmérséklete?

Megoldás:

a./ A 38 cm fal hővezetési tényezőjét a hőátbocsátási tényező kifejezéséből kapjuk 8.15 egyenlet:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_b} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_k}}$$

Fejezzük ki belőle a falra vonatkozó adatokat, és helyettesítsük be a hőátadási tényezőket:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha_b} - \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = 0,5 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right]$$

Majd a keresett hővezetési tényező:

$$\lambda = \frac{\delta}{0,5} = \frac{0,38 \text{ [m]}}{0,5 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right]} = 0,72 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

Ez a falszerkezetnek egy átlagos (tégla és malter) hővezetési tényezője.

b./ A belső fal hőmérséklete

A következő kérdésben a fal belső hőmérsékletét határozzuk meg. Ehhez elsőként a falon átjutó hőáram sűrűséget kell kiszámítanunk.

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot (t_b - t_k) \text{ [W]},$$

kifejezésből az egységnyi felületre jutó hőáram kifejezése

$$\dot{q} = k \cdot (t_b - t_k) \text{ [W/m}^2\text{]} \quad 8.17$$

behelyettesítve az adatokat, kapjuk

$$\dot{q} = k \cdot (t_b - t_k) = 1,5 \cdot (20 - (-13)) = 49,5 \text{ [W/m}^2\text{]}.$$

A hőáramsűrűség ugyanakkora az egyes részekre is, tehát $\dot{q} = \alpha_b \cdot (t_b - t_{bf}) \text{ [W/m}^2\text{]}$, amiből a keresett belső fali hőmérséklet:

$$t_{bf} = t_b - \frac{\dot{q}}{\alpha_b} = 20 - \frac{49,5}{8} = 13,8^\circ \text{C} \quad 8.18$$

Télen egy ilyen hideg fal elég rossz közérzetet okoz a lakáson belül, mégpedig a sugárzás révén hidegérzetet kelt.

c./ A szükséges hőszigetelés vastagsága, hogy a „k” felére csökkenjen

Fel kell írunk a hőszigeteléssel ellátott fal (két réteg) hőátbocsájtási tényezőjét, amit az eredeti felére kell csökkenteni.

$$k' = \frac{k}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_b} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta_{sz}}{\lambda_{sz}} + \frac{1}{\alpha_k}}$$

Fejezzük ki a hőszigetelő anyag jellemzőit, és írjuk be a képletbe az adatokat:

$$\frac{\delta_{sz}}{\lambda_{sz}} = \frac{1}{k'} - \frac{1}{\alpha_b} - \frac{\delta}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{0,75} - \frac{1}{8} - \frac{0,38}{0,72} - \frac{1}{24} = 0,6389$$

A hőszigetelő anyag hővezetési tényezőjét ismerve, meghatározzuk annak vastagságát:

$$\delta_{sz} = 0,6389 \cdot \lambda_{sz} = 0,6389 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right] \cdot 0,04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] \cong 0,026 \text{ [m]} = 2,6 \text{ [cm]}$$

Tehát már 2,6 cm vastagságú hőszigetelő anyaggal felére lehet csökkenteni a hőátbocsájtási tényezőt, ami azt is jelenti, hogy a hőveszteséget is a **felére lecsökkentettük!** Ez a 8.17 *egyenletből* egyenesen következik.

$$\dot{q}' = \frac{\dot{q}}{2} = \frac{49,5}{2} = 24,75 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

d./ Mennyivel változik meg fal belső hőmérséklete a hőszigetelés hatására?

Ugyan az a megoldás menete, mint a b/ kérdésben. A 8.18 *egyenletet* értelemszerűen alkalmazva:

$$t'_{bf} = t_b - \frac{\dot{q}'}{\alpha_b} = 20 - \frac{24,75}{8} = 16,9^\circ \text{C}.$$

Vegyük észre, hogy a szoba hőmérsékletéhez képesti hőmérséklet különbség is a felére csökkent 6,2°C-ról 3,1°C-ra.

e./ A 7/2008.(V.24.) TNM rendelet előírásainak megfelelő mértékben csökkenjen a fal hőátbocsátási tényezője.

A kérdés megválaszolásához nézzük az idézett előírást.

A mellékelt táblázat tartalmazza az előírt értékeket.

Rétegtervi hőátbocsátási tényezők követelményértékei (7/2006.(V.24.).TNM rendelet)

Épülethatároló szerkezet	U_{max}
Külső fal	0,45
Lapostető	0,25
Padlásfödém	0,30
Fűtött tetőteret határoló szerkezetek	0,25
Alsó zárófödém árkád felett	0,25
Alsó zárófödém fűtetlen pince felett	0,50
Homlokzati üvegezett nyílászáró (fa vagy PVC keretszerkezettel)	1,60
Homlokzati üvegezett nyílászáró (fém keretszerkezettel)	2,00
Homlokzati üvegezett nyílászáró, ha névleges felülete kisebb, mint 0,5 m ²	2,50
Homlokzati üvegfal	1,50
Tetőfelülvilágító	2,50
Tetőszik ablak	1,70
Homlokzati üvegezetlen kapu	3,00
Homlokzati, vagy fűtött és fűtetlen terek közötti ajtó	1,80
Fűtött és fűtetlen terek közötti fal	0,50
Szomszédos fűtött épületek közötti fal	1,50
Talajjal érintkező fal 0 és -1 m között	0,45
Talajon fekvő padló a kerület mentén 1,5 m széles sávban (a lábazon elhelyezett azonos ellenállású hőszigeteléssel helyettesíthető)	0,50

7.3 táblázat A rétegtervi hőátbocsátási tényező értékei

A táblázat szerint a külső fal hőátbocsátásának $k(u) \leq 0,45 \frac{W}{m^2 \cdot C}$

A megoldás a c./ pontban ismertetett módon hajtható végre. Vagyis a megkövetelt hőátbocsátási tényezővel kiszámítjuk az hőszigetelő réteg vastagságát.

$$k'' = 0,45 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_b} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta_{sz2}}{\lambda_{sz}} + \frac{1}{\alpha_k}}$$

$$\frac{\delta_{sz2}}{\lambda_{sz}} = \frac{1}{k''} - \frac{1}{\alpha_b} - \frac{\delta}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{0,45} - \frac{1}{8} - \frac{0,38}{0,72} - \frac{1}{24} = 1,528$$

$$\delta_{sz2} = 1,528 \cdot 0,04 = 1,528 \left[\frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right] \cdot 0,04 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] \cong 0,061 [\text{m}] = 6,1 [\text{cm}]$$

Megjegyzés: Pont ilyen vastagságú hőszigetelés nem kapható, hanem ehhez legközelebb eső méret 10 cm.

f./ A belső fal hőmérséklete mennyivel változik meg az új, vastagabb hőszigetelés hatására?

$$\dot{q}'' = k'' \cdot (t_b - t_k) = 0,45 \cdot (20 - (-13)) = 14,85 [\text{W}/\text{m}^2]$$

$$t''_{bf} = t_b - \frac{\dot{q}''}{\alpha_b} = 20 - \frac{14,85}{8} = 18,14^\circ\text{C}$$

Az új hőszigeteléssel fal belső hőmérséklete $t_{bf} = 13,8^\circ\text{C}$ -fokról kb. 4 fokot melegedett és kb. 70%-os hőveszteség-csökkenést értünk el!!!!

Megjegyzés: Egy épület hőszigetelésének javításakor nem elegendő a falakat szigetelni, hanem a nyílászárókat is jobb hőszigetelőre kell cserélni! A lakás hőveszteségének nagyobb része ugyanis a nyílászárókon keresztül történik.



8. A hőátadás, hőátadási tényező számítása

A gépészeti gyakorlatban nagyon sok hőátadási feladatot kell elvégezni. A különböző hőcserélők számításaiban szerteágazó hőátadási viszonyok jöhetnek létre. A hőátadás a hőterjedésnek az a módja, amikor az áramló kontinuum hőt ad le vagy vesz fel valamilyen szilárd felületre ill. felületről. A hőterjedésnek erre az esetre más törvények érvényesek, mint a hővezetésre. Az anyagi jellemzői hővezetési tényezője mellett, meghatározó jelentőségű az, hogy a kontinuum áramlása milyen (lamináris vagy turbulens). A hőátadáskor létrejön-e fázisátalakulás (forrás, lecsapódás).

Lamináris áramlás esete közelebb áll a hővezetéshez, míg az intenzív keveredéssel együtt járó turbulens áramlás esete. A hőátadási tényező tehát nem anyagi jellemző. E fejezetben bemutatunk néhány számítást a teljesség igénye nélkül.

Meghatározása döntően modellkísérletek alapján felállított, hasonlósági kritériumokat (hasonlósági számokat) tartalmazó ún. kritérium egyenletek segítségével történik. A hőátadási folyamatok modellezésénél a **Re-szám által kifejezett hasonlóság** mellett további hasonlósági feltételek teljesülése szükséges. Ezeket a hasonlósági feltételeket kifejező mértékegység nélküli (dimenziótlan) hasonlósági számok általában a következők:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \quad \text{Nusselt-szám „L” a jellemző hossz}$$

$$Pr = \frac{\mu \cdot c}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad \text{Prandtl-szám, ahol } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{„}\nu\text{” a kinematikai viszkozitás}$$

„ μ ” a dinamikai viszkozitás

$$\text{„}a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \text{” a hőfokvezetési tényező}$$

(ld.8.7 egyenlet)

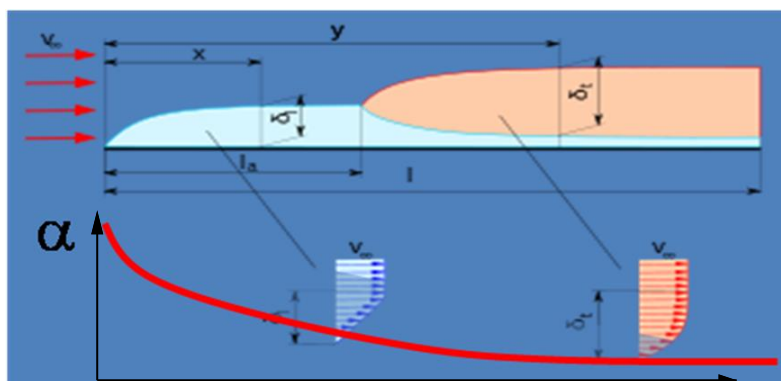
$$Re = \frac{v \cdot \rho \cdot L}{\mu} = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad \text{Reynolds-szám}$$

A számítások célja az $Nu=f(Re, Pr)$ függvény megadása, amiből az „ α ” hőátadási tényező már kiszámítható.

Nézzük például a síklap menti Nu-szám számítását. A síklap párhuzamos az áramlással. A lap elején az áramlás lamináris. A fő áramlás és a lap között kialakul egy határréteg. Ebben a rétegben a lap feletti, távol lévő v_∞ sebesség lecsökken zérusra. Ez a réteg folyamatosan vastagodik, ahogy haladunk előre a lap mentén. Majd bizonyos távolságban a határréteg megvastagszik, és a belső, fal közeli rétege továbbra is lamináris marad, a külső rétege pedig turbulenssé válik. A turbulens határréteg megjelenése kb. $Re < 10^5$ felett alakul ki. Itt a

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

ν módon számítandó, L a lap elejétől mért távolság. (Vigyázat! Csőbeli áramlásoknál a jellemző hossz legtöbbször a cső átmérője!)



Sík lap menti hőátadási tényező számítása
8.1 ábra

A Nusselt-számot ilyen esetben a következőképpen kell számolni:

$Re < 10^5$ (lamináris szakasz)

$$Nu_{lam} = 0,664 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr}$$

$Re > 10^5$ (turbulens szakasz)

$$Nu_{turb} = \frac{0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} \cdot (Pr^{0,66} - 1)}$$

A **8.1 ábrán** látjuk az „ α ” hőátadási tényező változását. Érdemes felfigyelni arra, hogy a borda elején nagyon jó (nagy) a hőátadási tényező! Ha egy nagy borda helyett több apró bordát alkalmazunk, amelyiken mindegyiken újra kezdődik a határreteg, akkor ugyanakkora felület, sokkal nagyobb hőátadást tud produkálni. Ez az elve a Forgó- féle apróbordás hőcserélőnek. Lásd később Heller-Forgó-féle hűtőrendszer.



Számítások ki egy sík lapalakú hűtőborda hőátadási tényezőjét és számítsuk ki, hogy mekkora az átadott hőáram 1m széles lap mentén! A sík lap mentén (hűtőborda) levegő áramlik.

Adatok:

$$v = 2 \frac{m}{s}; \rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}; \mu = 17 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s; \lambda = 0,026 \frac{W}{m \cdot K}; L = 10 cm; c_p = 1008 \frac{J}{kg \cdot K};$$

$$\alpha_k = 20 \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]; t_\ell = 20^\circ C; t_{borda} = 50^\circ C$$

Megoldás: Elsőként ki kell számítanunk a Reynolds-számot, hogy eldöntsük az áramlás típusát.

$$Re = \frac{v \cdot L}{\nu} = \frac{v \cdot L \cdot \rho}{\mu} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 1,2}{17 \cdot 10^{-6}} = 14117$$

Tehát lamináris a határreteg, mert $Re < 10^5$.

Következő lépésként a Prandtl-számot kell meghatároznunk:

$$Pr = \frac{v}{a} = \frac{\mu \cdot c}{\lambda} = \frac{17 \cdot 10^{-6} \cdot 1008}{0,026} = 0,66$$

Majd alkalmazhatjuk az ide vonatkozó összefüggést:

$$\text{Nu}_{\text{lam}} = 0,664 \cdot \sqrt{\text{Re}} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} = 0,664 \cdot \sqrt{14117} \cdot \sqrt[3]{0,66} = 68,18$$

A hőátadási tényező ezek után a Nusselt-szám definíciójából számítható:

$$\alpha = \text{Nu} \cdot \frac{\lambda}{L} = 68,18 \cdot \frac{0,026}{0,1} = 17,72 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Itt emlékezzünk arra, hogy az épület hőveszteségének számításánál ebben a nagyságrendben adtuk meg a hőátadási tényezőt az épületen belül ($8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$) és az épületen kívül ($24 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$) értékeknek.

És végül a Newton-féle kifejezéssel tudjuk kiszámítani a leadott hőáramot:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= A \cdot \alpha \cdot (t_{\text{borda}} - t_{\ell}) = 0,1 \cdot 17,72 \cdot (50 - 20) = 53,16 [\text{W}] \\ \dot{q} &= \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{53,16}{0,1 \cdot 1} = 531,6 [\text{W}] \end{aligned}$$

Összehasonlítva az épület hőleadásával, láthatóan itt majdnem két nagyságrenddel nagyobb a leadott hőáramsűrűség. A hűtőborda célja éppen a jó hőleadás.

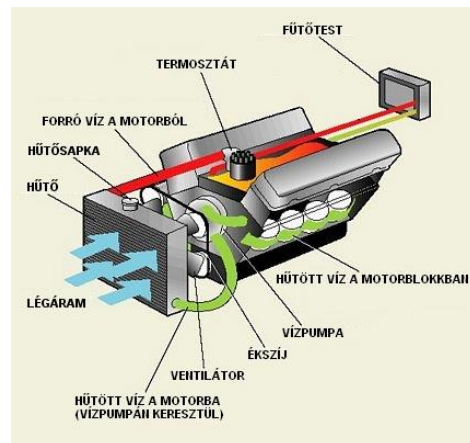
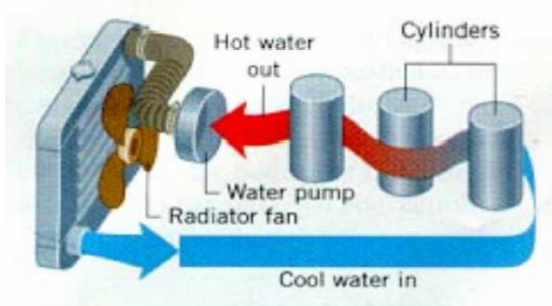
8.1 Hőátadás kényszeráramlásban

A kör keresztmetszetű csövekben történő kényszerített áramlás esetén a hőátadási tényező nagysága legerőteljesebben az áramlás jellegétől függ, mivel az áramlás jellege a csőfal mellett kialakuló határreteg fizikai paramétereit döntően befolyásolja, a hőátadás mértékét is elsősorban meghatározza.

Az áramlás jellegében az ún. kritikus sebesség elérésekor – Reynolds eredményei alapján - a váltás hirtelen következik be, amikor is a kisebb sebesség esetén fennálló **lamináris (réteges)** áramlás **turbulenssé (gomolygóvá)** válik.

Csőekben áramló közegek esetén az átmenethez a $\text{Re} \approx 2320$ érték tartozik. A sebesség a cső keresztmetszetben a sugár függvényében változik, a Re-számban szereplő sebesség a közeg átlagsebessége, ami az időegységenként átáramlott térfogat (térfogatáram Q) és az áramlási keresztmetszet (A) hányadosa $v = Q/A$. Csőben történő áramlásnál a „D” a cső belső átmérője és a nevezőben a kinematikai viszkozitás szerepel. A „D” átmérő helyett a jellemző méret lehet a csőhossz, vagy a cső külső átmérője is.

$$\text{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

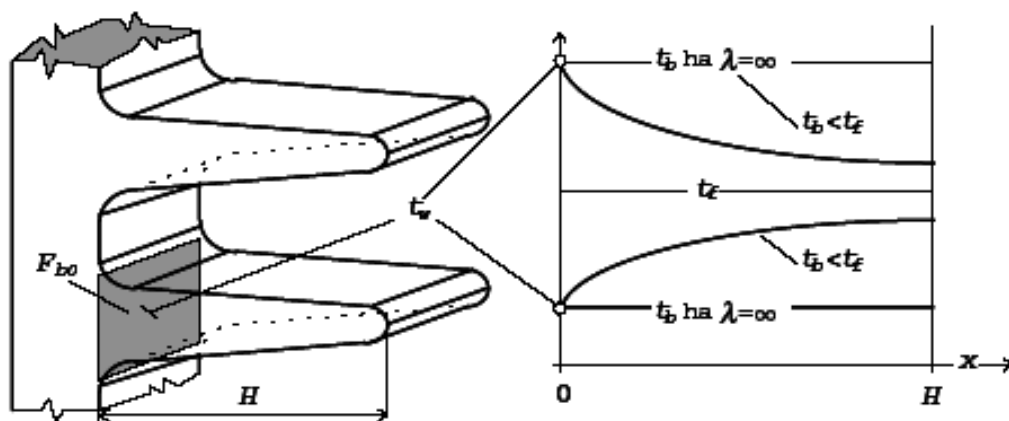


Hűtőrendszer kényszerített áramlása
8.2 ábra

Hűtőborda

A hőátadás javítására gyakran alkalmazzák a gépészeti szerkezetekben a felület bordázását. A **8.2 ábrán** is láthatunk ilyen megoldást, például a hűtőn. Azokat a felületeket, melyek mentén a kialakuló hőátadási tényező túlzottan kicsi, bordázattal látják el, a felület nagyságának és így a hőáram nagyságának növelése érdekében. Az ilyen módon megnövelt felület azonban teljes nagyságában nem vehető figyelembe, ugyanis a bordák mentén a bordatőtől távolodva a hőmérséklet csökken. Ez a hőmérsékletcsökkenés a borda kialakításának függvénye és az ún. bordahatásfokkal veszik figyelembe.

$$\eta_{\text{borda}} = \frac{t_{\text{bordaközeps}} - t_2}{t_{\text{bordaő}} - t_2}$$



Hűtőborda hatásfoka
8.3 ábra

8.2 Hőátadás szabad áramlásban

A hőátadáskor gyakran előfordul, hogy a hőátadás során felmelegedő közeg a sűrűségkülönbség miatt kezd áramlásba. Ekkor szabad áramlásról beszélünk. A Gr-szám a felhajtóerő és a súrlódási erő (Franz Grashof) viszonyozsáma. Ebből következően a Gr-szám is az áramlásra jellemző, mint a Re-szám, de az olyan áramlásokra, amikor az áramlás nem

kényszerített, hanem azt a hőmérsékletkülönbség hatására kialakuló sűrűségkülönbség generálja.

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2}$$

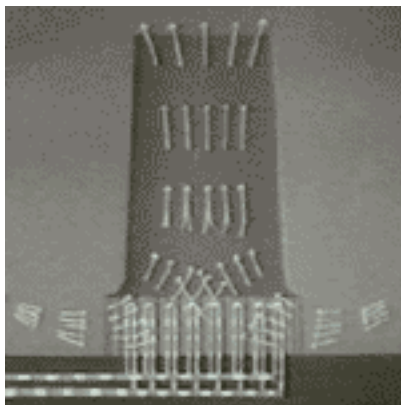
Az összefüggésben β a közeg köbös hőtágulási tényezője, „ ℓ ” az áramlásra jellemző lineáris méret (pl. egy függőleges csődarab esetében a cső hossza, de egy vízszintes csődarab esetében annak átmérője). A nevezőben a kinematikai viszkozitás szerepel. A Δt hőmérsékletkülönbség az áramló közegre jellemző hőmérséklet és a fal jellemző hőmérséklete közötti különbség. A különböző anyagi jellemzőket az említett két hőmérséklet számtani közepének megfelelő hőmérsékleten kell venni!



Levegő szabad áramlása

http://www.mozallearn.eu/Lecke--Biologia_12-A_lefontossagu_anyagok_korforgasa_a_termeszetben-102660

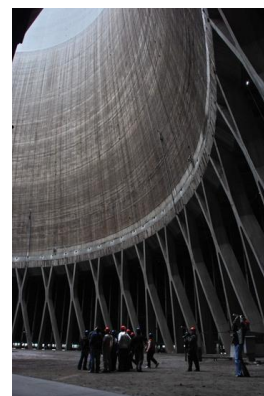
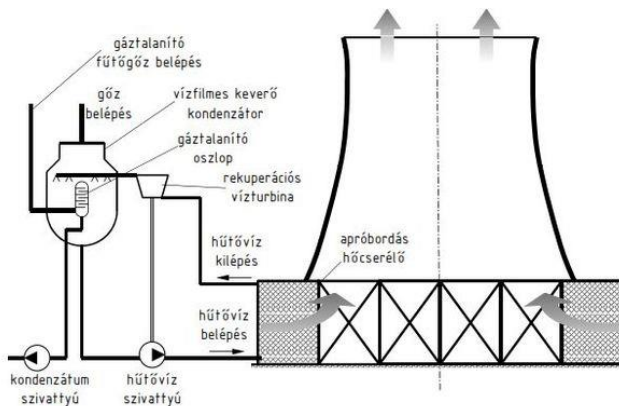
8.4 ábra



Szabad áramlás hűtőtornyokban (nedves hűtőtornyok)

<http://www.matud.iif.hu/2011/08/16.htm>

8.5 ábra



A Heller-Forgó-féle hűtőrendszer, a hűtőtorny belseje

<http://forum.index.hu/Article/showArticle?go=122659582&t=9033554>

8.6 ábra

A hőtani tanulmányainkból nagyon sok mindent alkalmaz a Heller-Forgó-féle hűtési rendszer, amely két magyar mérnök zseniális találmánya. A következőkben idézem a Wikipédián található erre vonatkozó leírást:

„A **Heller–Forgó-féle hűtőberendezés** két Kossuth-díjas magyar mérnök találmánya. Ez egy olyan közvetett léghűtéses rendszer, melyben a kondenzátor víz hűtőközegének visszahűtése zárt rendszerben, vízvesztésegektől mentesen, levegővel történik. A rendszer két fő eleme a **keverő kondenzátor** és a hűtővíz visszahűtését végző **apróbordás hőcserélő**.

Jelentőségét a jászberényi Fémnyomó- és Lemezárugyár - a LEHEL Hűtőgépgyár jogelődje – vezetői Gorjanc Ignác és László Károly felismerték s a gyártás megteremtésével vált igazán világhíressé a világszabadalom. A hűtőberendezés az a termék - a hűtőszekrény mellett - amelyre a Lehel Hűtőgépgyár büszke lehet. Két magyar mérnök, Heller László és Forgó László olyan lég-kondenzációs berendezés terveit alkotta meg, amely megoldja a hőerőművek eddigi nagy vízszükségletének a problémáját. A Heller–Forgó-féle hűtőelem-így terjedt el a népszerű elnevezése–nagy jelentőségű találmány, amelyre a világ több pontján is felfigyeltek. Az elv és a keverő kondenzátor alkalmazása Heller László nevéhez fűződik, a visszahűtést végző apróbordás hőcserélőt Forgó László szerkesztette. Találmányuk lényege az volt, hogy az erőmű gőzturbinájából kilépő fáradt gőzt, vákuum-gőzt hideg víz befecskendezésével kondenzálták, cseppfolyósították. A még meleg víz az apróbordás hőcserélőbe kerül, ott lehűl és zárt hűtőkörben elpárolgás nélkül újból hasznosíthatóvá válik a folyamat ismétlődésekor. Egykorú sajtóközlemény, így méltatja a találmány lényegét: „A hőerőművek roppant vízszükséglete abból származik, hogy a széntüzelésű hőerőműveknél a tüzelőanyagban lévő hő kb. 50%-át kell vízűtés útján elvonni. Ezért egy közepes hőerőmű napi vízszükséglete megfelel Budapest teljes napi vízfogyasztásának.”

Az 1957-1958-as évek folyamán terjedt el szélesebb körökben ezen igen jelentős magyar találmány híre. Első esetben az 1957. évi Budapesti Nemzetközi Vásáron mutatta be a Heller–Forgó-féle hűtőelem itt gyártott prototípusát. A találmány 1958 májusában elnyerte a Brüsszeli Világkiállítás nagydíját és hamarosan elindult a világsiker útján.

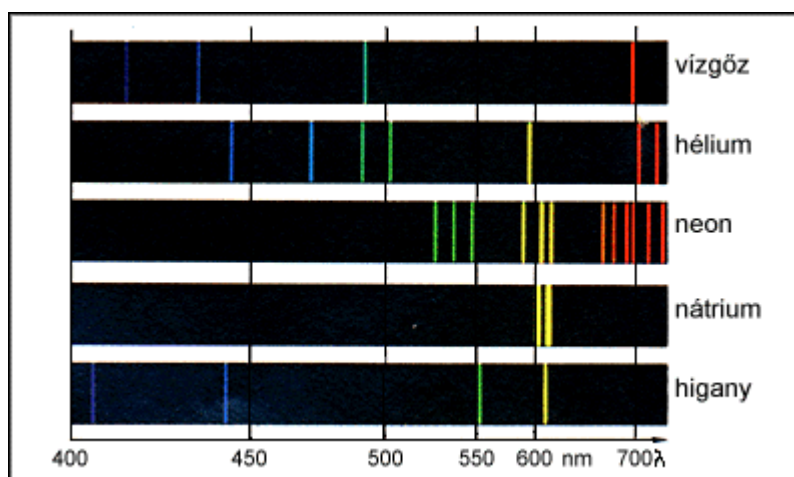
Elsőként a legnagyobb angol villamossági cég, az English Electric Company kötött erre igen magas összegű szabadalmi szerződést és 1958-ban Kína is megrendelte a Heller-Forgó-féle berendezést. A Lehel gyár kollektívája jól számított, amikor a hűtőelemek gyártásában kiváló exportlehetőséget látott. 1959 nyarán megindult a hűtőelemek gyártása és év végén már a dunaújvárosi hűtőtoronyba építettek be az első hűtőelemeket. Majd 1959 szeptemberében kezdték el az angliai megrendelés teljesítését. Majd az akkori Nyugat-Németországban (NSZK) 1967-ben Ibbenbüren-ben létesült hűtőtorony a jászberényiek munkája nyomán. A gyöngyös visontai erőmű is Heller–Forgó-féle hűtéssel épült. Iránban 1985-ben épült erőmű, ahol szintén magyar szerelőcsapat dolgozott a hűtőtoronyok szerelésén. A Hűtőgépgyár több hazai és még több külföldi berendezésekhez szállított hűtőelemeket jelentős mennyiségben. Az exportszállításokat kezdetben a KOMPLEX, majd a TRANSELEKTRO Magyar Villamossági külkereskedelmi Vállalat bonyolította. 1991-ben az Electrolux megvásárolta a Hűtőgépgyárat, a hűtőelem gyártás nem illett az Electrolux group cég profiljába, így nem tartott rá igényt. 1992-ben az EGI megvásárolta a gépeket és eszközöket, a gyártás jogát és bérbe vette az üzemcsarnokot. 1992-ben a GEA megvásárolta az EGI-t, majd létrehozta GEA EGI Energiagazdálkodási Zrt-t és az új üzemcsarnokot épített a Hűtőgépgyár mellett. ”



9. A hőszugárzás

Ha egy anyaggal energiát közlünk, belső energiája megnövekszik, molekuláinak és atomjainak mozgásállapota megváltozik: pl. a molekulákban az atomok egymás körüli forgása (rotációja), az atomok rezgése (vibrációja), az atomokon belül az elektronok pályája változik, a molekulák, ill. atomok energiaszintje magasabb lesz. Ezek a szintek csak meghatározott értékűek lehetnek, annak megfelelően, hogy a részecskék csak meghatározott energiamennyiséget tudnak felvenni. Ha az energiaközlés megszűnik, vagy egy egyensúlyi szint alá csökken a testek kisebb energiaszintre törekszenek visszajutni. Ennek során fotonokat bocsátanak ki, elektromágneses hullámokat emittálnak.

Különböző testek különbözően sugároznak. A kisugárzott elektromágneses hullám színképét folytonosnak nevezzük, ha sugárzás spektrális intenzitásának sűrűsége, hullámhosszának folytonos függvénye, és széles hullámhossz-tartományban különbözik a nullától. Ilyen sugárzást mutatnak az izzó testek és a folyadékok. Az izzó gázok atomjai vonalas színképet mutatnak, ahol a sugárzás spektrális intenzitás-sűrűsége csak kis hullámhossz-tartományban, hossz-tartományban különbözik a nullától: ebben egy-egy színképvonal látható. A **9.1 ábra** mutat néhány vonalas gázspektrumot.



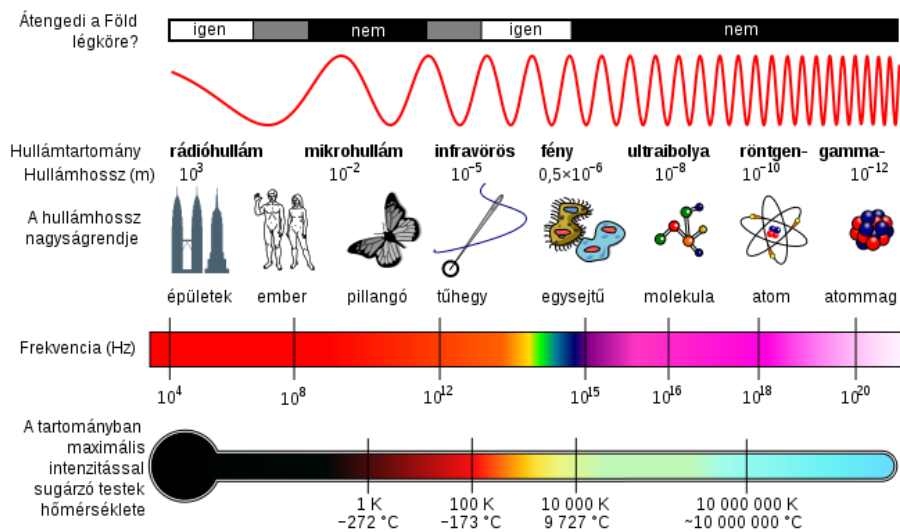
Gázok vonalas spektruma

http://www.mozaweb.hu/Lecke-mozaWeb-A_feny-Szinkepek-99590

9.1 ábra

Továbbiakban folytonos spektrumokkal foglalkozunk.

Mindegyik test bocsát ki elektromágneses sugárzást. Alacsony hőmérsékleteken (kb. a szobahőmérsékletig) az így kibocsátott energia gyakorlatilag elhanyagolható, míg a magas hőmérsékletek tartományában jelentőssé válik. Az energiának elektromágneses hullámok formájában való térbeli terjedésének és más energiaformává átalakulásának pontos mennyiségi leírásához szükséges matematikai apparátus bonyolultsága miatt egyszerűsítő leíró modellt használunk a műszaki gyakorlat hőáram számításaihoz szükséges összefüggések meghatározására. Közvetítő anyag illetve közeg nélküli hőterjedési jelenség. (elektromágneses sugárzás). Elektromágneses sugárzás: az elektromos és a mágneses térerősség időbeni változásának tovaterjedése. Az elektromos térerősség, a mágneses térerősség és a terjedési irány jobbsodrású, derékszögű vektorrendszert alkot. Az elektromágneses sugárzás hullámhossz szerinti felosztását láthatjuk a **9.2 ábrán**.



Az elektromágneses sugárzás felosztása

http://hu.wikipedia.org/wiki/Elektrom%C3%A1gneses_sug%C3%A1rz%C3%A1s

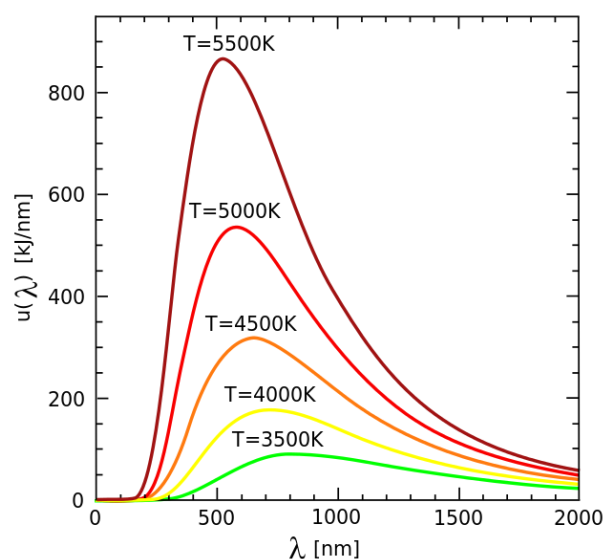
9.2 ábra

A kis frekvenciás rádióhullámoktól a látható fény tartományán keresztül a gammasugarakig mutatja az ábra az elektromágneses sugarakat. A látható fény hullámhossza a 750-400 nm tartományban van a vöröstől az ibolya tartományig (a nano 10^{-9} -es szorzót jelent).

Elektromágneses hullámokat egy test részben átengedi (diatermicitás tényező $d \leq 1$), visszaveri (reflexiós tényező $r \leq 1$), elnyeli (abszorpciós, elnyelési tényező $a \leq 1$).

$$a + r + d = 1$$

A fekete test hőmérséklettől függő sugárzási görbéi alapján, először empirikus úton jutott el a megfelelő összefüggéshez. Később, az atomokat olyan „ ω ” frekvencián rezgő harmonikus oszcillátoroknak kezelve, amelyek egyszerre csak „ $h\omega$ ”, (azaz véges mennyiségű) energiát vehetnek fel. A sugárzásra vonatkozó összefüggésének levezetését is megadta és ezt



Planck-törvény

http://hu.wikipedia.org/wiki/Elektrom%C3%A1gneses_sug%C3%A1rz%C3%A1s

9.3 ábra

tekinthetjük az első, helyesen levezetett kvantummechanikai összefüggésnek. A Planck törvény szerint a fekete test diffúz sugárzó, és a kibocsátott energia nagymértékben függ a test abszolút hőmérsékletétől. A teljes feltérbe kibocsátott sugárzás erősséget (intenzitást) a hőmérséklet és hullámhossz függvényében **9.3 ábra** mutatja.

Az ábrán látható, hogy a hőmérséklet növekedésével a sugárzás intenzitása nő, és a maximális intenzitásokhoz tartozó hullámhosszak balra, az egyre kisebb értékek felé tolódnak el.

A hősugárzás alapösszefüggése a Joseph Stefan szlovén és Ludwig Eduard Boltzmann osztrák fizikus által a XIX. Század végén felállított és emlékükre ma **Stefan-Boltzmann törvény**, mely a felületegység által időegység alatt kisugárzott hőáram-sűrűséget adja meg

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

ahol $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right]$ a Stefan-Boltzmann állandó.

Valamennyi test hősugárzását az abszolút fekete testéhez viszonyítjuk, ezt fejezi ki az ε relatív feketeségi fok.

Azokat a testeket melyek emissziós tényezője nem független λ -tól, **színes testnek** nevezzük. Amennyiben az emissziós tényező a hullámhossztól is független, a hősugárzás szempontjából **szürke** testről van szó. A szürke testek tehát olyan diffúz sugárzók, melyek minden hullámhosszúságon a fekete test energiájának állandó hányadát sugározzák ki, így a szürke testek által kisugárzott energia a Stefan-Boltzmann-törvény alapján:

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right].$$

A továbbiakban csak szürke testekkel foglalkozunk. Az emissziós és abszorpciós képesség közötti kapcsolatot a KIRCHHOFF törvény írja le, mely szerint a testeknek az adott irányú és hullámhosszúságú sugárzásra vonatkozó elnyelési (abszorpciós) és kibocsátási (emissziós) képessége azonos érték. Ebből a törvényszerűségből következik, hogy a fekete testre $\varepsilon = a = 1$, ami azt jelenti, hogy a fekete test nem csak a maximális elnyelő képességű test, hanem a maximális energia kibocsátó is. Mivel ez utóbbihoz viszonyítjuk a többi test sugárzását, az emissziós tényezőre fennáll, hogy $\varepsilon < 1$.

Pusztán kényelmi okokból a Stefan-Boltzmann törvényt szokták olyan módon is felírni, hogy a Boltzmann-állandó nagyságrendjét az abszolút hőmérséklet osztójába írják, így kisebb számokkal, kényelmesebben lehet számolni

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot 5,67 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

A sugárzó testek közötti hőcsere a Stefan-Boltzmann törvény alapján a két hőmérséklet negyedik hatványai közötti különbséggel arányos

$$\dot{q} = \varepsilon_{\text{red}} \cdot 5,67 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{12} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

Az összefüggésben ' ε_r ' a két felület feketeségi fokából meghatározható ún. redukált feketeségi fok, ' φ_{12} ' pedig a két felület méreteiből és egymáshoz viszonyított helyzetéből (a normálisok egymáshoz képesti elhelyezkedése) meghatározható ún. besugárzási tényező.

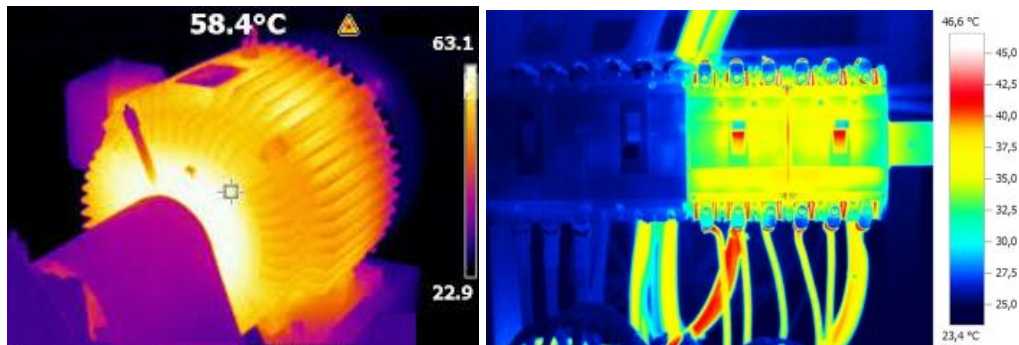
A hőáram összefüggésében a redukált feketeségi fok és a besugárzási tényező meghatározása általában igen bonyolult geometriai számításokat igényel. Ezért itt, a levezetések

mellőzésével, a redukált feketeségi fok összefüggését csak két olyan esetre adjuk meg, amikor a besugárzás tökéletes vagy közel tökéletes ($\varphi_{1,2}=1$),

- a két felület párhuzamos, egymáshoz közel áll és kb. azonos méretű,
- az egyik felülettel határolt test ('1') a másik test által alkotott zárt felületen ('2') belül helyezkedik el.

A hőkamerás mérés az utóbbi évtizedekben nagyon sokat fejlődött. Manapság szinte köznapivá vált a sugármérésen alapuló hőmérsékletmérés is.

A hőkamerás mérés részleteit, elvét, diagnosztikai felhasználását későbbi tantárgyakban részletesen oktatjuk. Itt csupán néhány részletet villantunk fel a lehetőségekből. A **9.4 ábrán** egy villanymotor melegedését és egy áramköri elem melegedését mérték hőkamerával.



Hőkamerás felvétel villanymotorról és áramkörről

http://www.atestor.hu/Testo_875_es_881_hokamerak_mar_egymillo_forinttol.html

9.4 ábra

A következő fejezetekben az áramlástechnika különböző fejezeteivel fogunk foglalkozni. Eddigi hőtani tárgyalásunkhoz nagyon sok pontban fog kapcsolódni a fejezetek témája.



10. Nyugvó folyadék egyensúlya

A következő fejezetek nagy része a [16] és [17] jegyzetek alapján készült. Ahol, azt külön nem jeleztem ott ezeknek a jegyzeteknek az ábráit és szövegeit használtam fel.

A jegyzet első fejezetében már tárgyaltuk a közeg, kontinuum kifejezéseket. Az Áramlástechnika tárgya a folyadékok mechanikája. Ebben beleértjük a nyugvó és a mozgó folyadékokat is. Az előző fejezetekben, ha nem is hangsúlyoztuk, az úgynevezett kvázi statikus állapotváltozásokat vizsgáltuk. Ezek viszonylag lassú folyamatok. A tömegerők nem játszanak döntő szerepet a folyamat lefolyásában. Az áramlástechnikának is van egy fejezete, ahol a mozgásnak nincs szerepe, sőt csak nyugvó folyadékokkal foglalkozik, ez a hidrosztatika.

10.1 A nyomás fogalma

Nyugvó folyadékokban alapvető jellemző a bennük uralkodó nyomás. A nyomás az egységnyi felületre eső, a felületre merőleges nyomóerő, vagy másként fogalmazva, a merőleges nyomóerő és a felület hányadosa:

$$p = \frac{F}{A} \quad 10.1$$



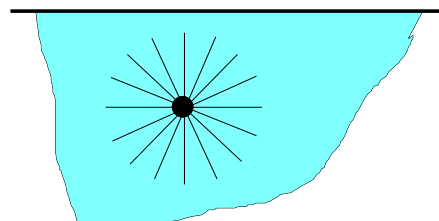
Két fontos alapelvet fogalmazott meg **Blaise Pascal**, (1623-1662) francia matematikus és filozófus a nyomással kapcsolatban (a nyomás SI alapegysége róla kapta nevét):

- Egy adott pontban a nyomás azonos minden irányban, ezt szemlélteti a **10.1 ábra**.

- A folyadékot határoló szilárd falra a nyomás, ill. a nyomásból

származó erő merőlegesen hat.

Ezeket a megállapításokat gyakran Pascal törvényeknek is hívják.



A nyomás hatása egy pontban
10.1 ábra

A nyugvó folyadékokban csúsztató feszültségek csak igen ritkán lépnek fel, newtoni folyadékok esetében pedig soha. Nyugvó folyadékban **csak nyomásból származó feszültségek** fordulnak elő. A nyomás skalár mennyiség, amely általánosan a hely és az idő függvénye, tehát a $p = p(r, t)$ skalár térrel, azaz a $p = p(x, y, z, t)$ négyváltozós függvénnyel írható le, amelyet **skalár-vektor** térnek nevezünk. (A független változó skalár, a függő változó pedig vektor, a későbbiekben vektor-vektor terekkel is foglalkozunk, ahol a független változó is és a függő változó is vektor. Például a sebességtér vektor-vektor térrel jellemezhető.) Hasonlóan skalártérrel írható le a $T = T(x, y, z, t)$ hőmérséklet megoszlás, vagy a sűrűségeloszlás a légtérben.

A **skalártereket** szintfelületekkel (szintvonalakkal) jellemezzük, amelyek a tér (ill. sík) azon pontjait kötik össze, amelyekben a fizikai változó értéke azonos. (Pl. az izotermák az állandó hőmérsékletű pontok a térben.)

A **skalárterek hely szerinti változásának jellemzésére** egy vektormennyiséget használunk, amelynek "x, y és z" komponensei a leírt fizikai mennyiség "x, y és z" irányú változásának nagyságával arányosak:

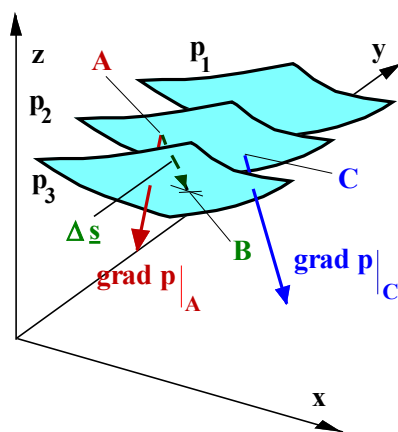
$$\text{grad } p = \nabla \cdot p = \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = \frac{\partial p}{\partial \underline{r}}, \text{ ahol } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \quad 10.2$$

A gradiens vektor tulajdonságai:

- a skalártér legrohamosabb növekedésének irányába mutat,
- hossza arányos a változás nagyságával és
- merőleges a szintfelületre (szintvonalra).

A **10.2 ábra** egy térbeli nyomásmegoszlást, ill. annak három szintfelületét, mutatja. A nyomás lefelé növekszik. $p_3 > p_2 > p_1$. Válasszunk ki két közeli szintfelületen két közel lévő "A" és "B" pontot. A $\Delta \underline{s}$ vektor köti össze őket, amelynek talppontja az "A" pontban van. A "p" skalártér " Δp " változását a "B" és "A" pontok között lineáris közelítésben a

$$\Delta p = p_3 - p_2 \cong \text{grad } p|_A \cdot \Delta \underline{s} = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \text{ skalárszorzat adja meg.}$$



Gradiens vektor
10.2 ábra

Ha képezzük a $\frac{\Delta p}{\Delta s}$ hányadost és " Δs " nagysága tart a zérushoz, akkor az adott irányhoz tartozó iránymenti deriváltat kapjuk meg, amely egyenlő a

$$\frac{dp}{ds}|_s = \text{grad } p|_A \cdot \frac{\Delta \underline{s}}{|\Delta \underline{s}|} = \text{grad } p|_A \cdot \underline{e}$$

kifejezéssel. (ld. két vektor skaláris szorzatát a **12.6 ábrán**). Az " \underline{e} " a kijelölt irányba mutató egységvektor. (Az iránymenti derivált fogalmára a sebességvektor szubsztanciális, vagy teljes deriváltja kapcsán még visszatérünk a **12. fejezetben**.) Ha az " \underline{e} " egységvektor párhuzamos a gradiens vektorral, akkor az iránymenti derivált éppen a legnagyobb változás nagyságát adja meg az adott pontban.

A "C" pontból induló gradiens vektor abszolút értéke nagyobb, mint az "A" pontból indulóé, mert a "C" pont környezetében rövidebb távolságon változik a nyomás ugyanakkora értékét, mint az "A" pont környezetében. Itt is a nyomás változása $\Delta p = p_3 - p_2$, viszont rövidebb úton valósul meg, mert a két pont "B" és "C" távolsága kisebb mint előzőleg.

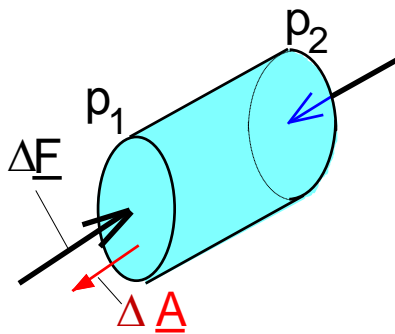
10.2 A nyomóerő számítása a nyomásból

A nyomásból származó nyomóerőt legáltalánosabb esetben a

$$\underline{F} = - \iint_A p \cdot d\underline{A} \quad 10.3$$

kifejezéssel adhatjuk meg. "A" felületi normális " $d\underline{A}$ " a felületből kifelé mutat, a nyomóerő pedig csak nyomni tudja a felületet, tehát a felületre merőlegesen befelé irányul, ezért kell a negatív előjel az integráljel elé. Bizonyos esetekben a folyadék súlyából eredő

nyomásváltozás elhanyagolható a folyadék belsejében uralkodó nyomáshoz képest. Gondolatban határoljunk el a folyadék belsejében egy henger alakú részt. A henger helyzete tetszőleges. Vizsgáljuk a henger tengelye irányába eső nyomóerők eredőjét.



Nyomás súlytalan folyadékban
10.3 ábra

Az alsó és felső lapon ható erők ellentétes irányúak, de az egyensúly miatt egyenlő nagyságúak, azaz

$$\Delta A \cdot p_1 = \Delta A \cdot p_2.$$

Könnyen belátható, hogy a $p_1 = p_2$ feltételnek kell teljesülnie. Miután a henger helyzete és magassága tetszés szerinti volt, így súlytalan összefüggő nyugvó folyadéktérben a nyomás mindenütt ugyanakkora.

Ezt hasznosítják a hidraulikus sajtók és emelők. A szerkezetük lényege, egy kis és egy nagy keresztmetszetű dugattyú, mely közös folyadéktérbe nyúlik. A folyadék nyomása minden pontban ugyanakkora, így a kis

dugattyúra ható erőt a szerkezet a dugattyúk arányában megnöveli. Ezen elven kis szerkezettel 100-szoros, vagy akár 1000-szeres erőnövekedés is könnyen elérhető.

A nyomás egyenletes eloszlását használják ki a légnemű gumiabroncsok is. Ezek benyomódásánál a nyomás gyakorlatilag nem növekszik, a támasztó erő a felfekvő felülettel arányosan nő. Kisebb nyomású abroncsnak nagyobb felfekvő felületre van szüksége, ezért jobban belapul.

10.3 Hidrosztatika alapegyenlete

Amennyiben a folyadék súlyát nem hanyagolhatjuk el a benne uralkodó nyomás mellett, akkor a nyomás eloszlása a folyadékban nem lesz állandó. A nyugalomban lévő víz esetében általában ez az eset áll elő. Vizsgáljuk az előbbi folyadék-hengerünket a nehézségi erőterben az alábbi **10.4 ábra** szerint. A folyadék sűrűsége " ρ " a nehézségi gyorsulás " g ", amely a lefelé mutató " z " tengellyel egy irányba mutat. Felírva a hengerre ható függőleges erőket, a következő egyenletet kapjuk:

$$p \cdot \Delta A + \Delta z \cdot \Delta A \cdot \rho \cdot g - (p + \Delta p) \cdot \Delta A = 0$$

A nyomóerőkön kívül a hengerbe zárt folyadék súlyát is figyelembe kellett vennünk, amely a második tag.

Egyszerűsítve és rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \rho \cdot g.$$

Amennyiben $\Delta z \rightarrow 0$, akkor a

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{dp}{dz} = \rho \cdot g$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$$

kifejezést kapjuk. Könnyen belátható, hogy általános helyzetű koordináta-rendszer, vagy általános helyzetű térerő vektor esetén a fenti kifejezés átírható a

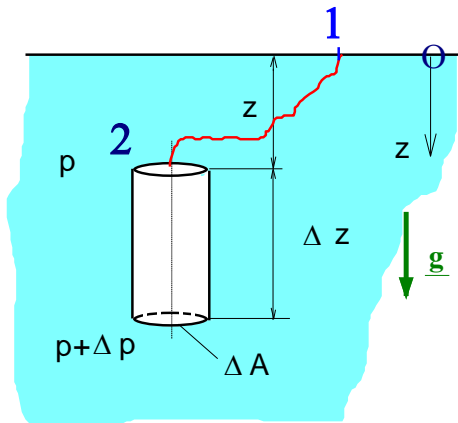
$$\text{grad } p = \rho \cdot \underline{g} \qquad 10.4$$

vektoregyenletté, amelyet a **hidrosztatika alapegyenletének** nevezünk.

A 10.4 hidrosztatika alapegyenlete kimondja, hogy a

- nyomás legnagyobb változása a térerő vektor irányába mutat,
- a változás nagysága arányos a térerő vektor és a sűrűség szorzatával.

10.3.1 Hidrosztatika alapegyenlete nehézségi erőterben



Egyensúly nyugvó folyadékban
10.4 ábra

Fizikából ismert, hogy ha egy erőter konzervatív, akkor létezik potenciálja "U", amely a következő kapcsolatban áll a térerő vektorral (a negatív előjel megállapodás eredménye):

$$\underline{g} = -\text{grad } U \quad 10.5$$

Mint tudjuk a konzervatív erőterben egy zárt görbén vett integrálja a térerő-vektornak zérus eredményt ad. Az egységnyi tömegben, bármely zárt görbén (ℓ) végzett munka zérus, matematikai kifejezéssel

$$\oint_{\ell} \underline{g} \cdot d\underline{s} = 0$$

Ezzel egyenértékű matematikai feltétele a potenciál létezésének, hogy

$$\text{rot } \underline{g} \equiv 0$$

A rotáció matematikai és fizikai jelentését a sebességtér kapcsán a **4.4 fejezetben** részletesen tárgyaljuk. Hidrosztatikai egyensúly csak konzervatív erőterekben képzelhető el. (Többek között a földi légkör azért van állandó mozgásban, mert létezik a Föld forgása következtében a Coriolis-erőter, amely nem örvénymentes.)

Helyettesítsük a 10.5 egyenletet a 10.4 egyenletbe, ekkor

$$\text{grad } p = -\rho \cdot \text{grad } U \quad 10.6$$

kifejezést kapjuk. Belátható, hogy az állandó potenciálú felületek egybeesnek az állandó nyomású felületekkel. (A bizonyítást mellőzzük, de a [2] irodalomban megtalálható.)

Ha a $\rho = \text{const.}$, vagyis a sűrűség állandó, abban az esetben a sűrűséggel elosztva és beírva a gradiens jel mögé, majd átrendezve a

$$\text{grad } \frac{p}{\rho} + \text{grad } U = 0$$

összefüggésre jutunk. Hozzuk közös gradiens jel mögé a skalár értékeket, így kapjuk a

$$\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + U \right) = 0$$

kifejezést.

Valamely skalár mennyiség változása akkor lehet nulla, ha maga a mennyiség mindenütt a térben állandó, tehát

$$\frac{p}{\rho} + U = \text{állandó}$$

A folyadéktér bármely két tetszőleges két pontja között is fennáll az összefüggés, tehát pl. a **10.4 ábrán** a felszínen lévő **1** pont és a henger felső lapján lévő **2** pontok között is felírható, behelyettesítve kapjuk a

$$\frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + U_2 \quad 10.7$$

kifejezést.

Gyakran ez utóbbi egyenletet is nevezik a hidrosztatika alapegyenletének. Természetesen csak állandó sűrűségű közegre alkalmazható a folyadéktér két olyan pontja között, amelyeket egy folytonos vonallal össze lehet kötni. Más megfogalmazásban a

$$\frac{p}{\rho} + U = \text{állandó},$$

ami annyit jelent, hogy egy folyadéktérben, ha a potenciál nő, akkor a nyomás csökken, és ha a potenciál csökken, akkor a nyomásnak nőnie kell.

Mint tudjuk a nehézségi erőterében a potenciál a térrő ellenében egységnyi tömegben végzett munka. Tehát ha felfelé haladunk, akkor a potenciál nő, ha lefelé haladunk, akkor csökken. A **10.4 ábrán** lefelé mutató koordináta-rendszer esetén a potenciált a

$$U = -gz + U_0$$

kifejezés adja meg.

Válasszuk az $U_0=0$ értéket, amit minden további nélkül megtehetünk, mert az egyenletben amúgy is csak potenciál különbségekkel fogunk számolni. Behelyettesítve a *10.7 egyenletbe* és felhasználva, hogy az **1** pontban a "z" koordináta zérus, a következőt kapjuk:

$$\frac{p_1}{\rho} + 0 = \frac{p_2}{\rho} - g \cdot z,$$

amelyből az a jól ismert kifejezés adódik, hogy a nyomás a folyadék felszínétől lefelé haladva lineárisan nő:

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot z. \quad 10.8$$

10.3.2 Hidrosztatikai feladat megoldásáról általában

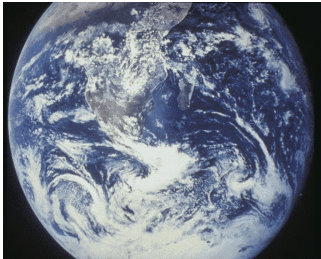
A hidrosztatikai feladatokat viszonylag jól meghatározott lépések szerint lehet megoldani:

1. Elsőként megfelelő koordináta-rendszert választunk, amelyben a potenciál függvényt fel tudjuk írni.
2. Alkalmos pontokat (legalább kettő) kiválasztunk. Az egyik pont amelyben ismerjük az adatokat, a másik amelyben keressük pl. a nyomást.
3. A potenciál függvény felírása a következő lépés.
4. $\frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + U_2$ egyenlet alkalmazása, ha a sűrűség állandó, vagy a $\text{grad} p = -\rho \cdot \text{grad} U$ egyenlet használata, ha a sűrűség változik. Ez utóbbi esetben a sűrűség változására egyéb, kiegészítő egyenlet, vagy egyenletek is szükségesek.

10.4 Nyomás változása az atmoszférában

Az atmoszférában a Föld felszínétől felfelé haladva a levegő nyomása, hőmérséklete, sűrűsége változik. A levegő hőmérsékletének változását a **10.6 ábra** mutatja. A troposzférában a hőmérséklet eloszlása közel lineáris. A troposzféra, vagy felhőövezet, az időjárás változások

legfőbb színtere. Ez kb. 11 km vastag rétege a Föld légkörének. A felszín közeli hőmérséklet mind térben mind időben nagymértékben változik. Egy nemzetközi megegyezés alapján a felszíni átlagos hőmérsékletet, valamint a hőmérséklet csökkenést szabványosították ez az INA (International Standard Atmosphere), így a levegő hőmérséklet-változását a $T = T_0 - a \cdot z$ kifejezéssel közelíthetjük.

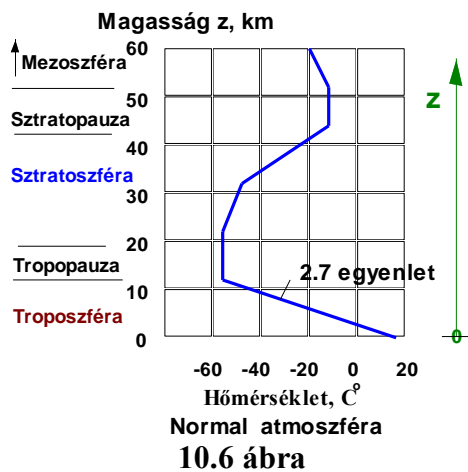


A Föld és légköre
10.5 ábra

A "z" a földfelszínről induló, felfelé mutató koordináta. Az "a" értéke a hőmérséklet csökkenés mértékét adja meg méterenként, a standard érték $a=0,00648 \text{ }^\circ\text{C/m}$, azaz kb. $6,5 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérséklet csökkenés ezer méterenként.

Kérdések:

- a./ Határozzuk meg a nyomás változását a troposzférában!
b./ Igazolja, hogy az adott hőmérséklet-eloszlással jellemzett atmoszférában a nyomás és a sűrűség között politrópikus állapotváltozás áll fenn! A politrópikus állapotváltozást a



10.6 ábra

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$$

kifejezéssel lehet jellemezni, ahol "n" a politrópikus kitevő, általában egy és az adiabatikus kitevő " κ " közé esik. Hogyan függ az "n" és az "a" értéke egymástól?

- c./ Hogyan függ a magasságtól a nyomás, ha a hőmérséklet nem változik, (izentropikus atmoszféra) azaz "a"=0? Mekkora ebben az esetben az "n" kitevő?

- d./ 10 km magasságban mekkora $n = 1$; $n = \kappa = 1.4$ és $n = 1.234$ (szabványos atmoszféra) esetén a $\frac{p}{p_0}$ arány, $15 \text{ }^\circ\text{C}$ talajnál lévő hőmérsékletnél?

A levegőt ideális gáznak tekinthetjük, gázállandója $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

Megoldás:

A fenti kérdések megválaszolásához célszerű meghatározni a nyomás magasságtól való függését.

- a./ Az atmoszférában a levegőt statikus egyensúlyi állapotúnak tételezzük fel (nem fúj a szél). A levegő **sűrűsége felfelé haladva változik**, így a statika alaptörvényét csak differenciális alakban használhatjuk, amely a következő (10.4 egyenlet):

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \underline{k} = \rho \cdot \underline{g}$$

A fenti egyenletet az adott esetre alkalmazva csak a felfelé mutató "z" irányban van változás, ezért a gradiens kifejezése csak a "z" szerinti deriváltra egyszerűsödik, továbbá a \underline{g} -nek is csak a skalárértékét figyelembe véve "-g" írható, mivel a felfelé mutató "z" tengellyel ellentétes annak iránya, így

$$\underline{\underline{\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g}}$$

A $p = p(z)$ függvény kiszámításához a sűrűség nyomástól való függését is meg kell adni, ehhez felhasználjuk, hogy a levegő ideális gáznak tekinthető, azaz

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

egyenlettel írható le, amelyből fejezzük ki a sűrűséget, 10.10

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T}$$

Végül felhasználjuk a hőmérséklet szabványosított lineáris függvényét is:

$$\underline{\underline{T = T_0 - a \cdot z}} \quad 10.11$$

képletet.

A 10.10 és a 10.11 egyenleteket a 10.9-be helyettesítve, a nyomásváltozásra a

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{R \cdot (T_0 - a \cdot z)} \cdot g$$

differenciál egyenletet kapjuk. Szétválasztva a változókat, egy egyszerűen megoldható diff. egyenlethez jutunk:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g \cdot dz}{R \cdot (T_0 - a \cdot z)}$$

Peremfeltétel: $z=0$ -nál $p=p_0$

Integrálva $z=0$ -tól egy tetszőleges "z"-ig, kapjuk a

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R \cdot a} \ln \left(\frac{T_0 - a \cdot z}{T_0} \right) \quad 10.12$$

függvényt, melyet átalakítva, a nyomásváltozásra, a következő exponenciális kifejezést nyerjük:

$$p = p_0 \cdot \left(\frac{T_0 - a \cdot z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}} \quad 10.13$$

A függvény grafikonja a **10.7 ábrán** látható különböző paraméterek esetén, a nyomás felfelé haladva exponenciálisan csökken.

b./ A politrópikus állapotváltozás és az előbb levezetett kifejezés kapcsolatát határozzuk meg a következő részfeladatban. A politrópikus állapotváltozást az *1.20 egyenlet* írja le, ami a következő:

$$\frac{p_0}{T_0^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{p}{T^{\frac{n}{n-1}}},$$

amit tovább alakítva a megkapjuk a nyomás és a hőmérséklet közötti kapcsolatot:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}} .$$

Az_10.13 egyenletet is ehhez hasonló alakra hozhatjuk, ha felhasználjuk, hogy $T = T_0 - a \cdot z$, így levezetett nyomás-megoszlásból kapjuk:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}} .$$

A két utóbbi egyenlet azonossága bizonyítja, hogy politrópikus állapotváltozás áll fenn a nyomás és a sűrűség, illetve itt a nyomás és a hőmérséklet között. Az összevetésből kapjuk, hogy

$$\frac{n}{n-1} = \frac{g}{R \cdot a} ,$$

amelyből

$$a = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R} \quad \text{vagy} \quad n = \frac{1}{1 - \frac{R \cdot a}{g}} . \quad 10.14$$

A szabványos légköri állapot esetén $a=0,0065 \text{ } ^\circ\text{C/m}$, az ennek megfelelő politrópikus kitevő $n=1,234$.

c./ Ha a hőmérséklet nem változik, " $a=0$ ", akkor 10.14 kifejezésekből látható, hogy $n=1$ értéket kapunk, amely az izotermikus állapotváltozásra jellemző kitevő.

A nyomás változását az 10.13 kifejezéssel nem tudjuk leírni, mert $a=0$ -nál a függvény nem értelmezhető. Ebben az esetben a kifejezés határértékét kell venni $a \rightarrow 0$ esetén, a Bernoulli-L'Hospital szabály alkalmazásával. Ezt a megoldást hasznos gyakorlatként az olvasóra bízuk. A másik lehetőség, hogy a 10.9 és 10.10 egyenletekből kiindulva határozzuk meg a nyomásfüggvényt. A hőmérséklet állandó, így $T=T_0$. A 10.9 egyenletbe helyettesítsük a 10.10-ből kifejezett ρ -t, ekkor

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{p}{R \cdot T_0} \cdot g$$

diff. egyenletet kapjuk.

Átrendezve $\frac{dp}{p} = - \frac{g}{R \cdot T_0}$, majd felhasználva, hogy $z=0$ -nál $p=p_0$ és integrálva $z=0$ -tól, egy tetszőleges " z " magasságig, a nyomás változására a

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{R \cdot T_0} \cdot z} \quad 10.15$$

exponenciális függvényt kapjuk.

Ezt a függvényt is a **10.7 ábrán** rajzoltuk fel ($a=0$).

d./ 10 km magasságban a 10.13 és a 10.15 kifejezésekkel számítjuk ki a nyomás-arány értékeit $T_0=288 \text{ K}$ esetében.

d./1 $n=1$ esetén $a=0$, vagyis az izotermikus atmoszféra, ekkor a 10.15 összefüggéssel kell számolni, tehát

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g}{R \cdot T_0} \cdot z} = e^{-\frac{9.81}{287 \cdot 288} \cdot 10^4} = 0.305$$

d./2 $n=1.4$ esetén $a = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R}$ kifejezésből kiszámítjuk az "a" értékét

$$a = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R} = \frac{1.4-1}{1.4} \cdot \frac{9.81}{287} = 0.00973 \frac{C^\circ}{m},$$

majd a 10.13 összefüggéssel a keresett nyomás-arány

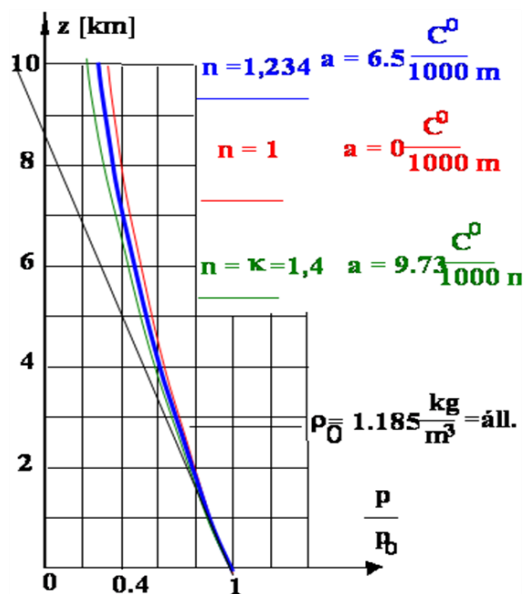
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - a \cdot z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}} = \left(\frac{288 - 0.00973 \cdot 10^4}{288} \right)^{\frac{9.81}{287 \cdot 0.00973}} = 0.234$$

d./3 $n=1.234$ esetén $a = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R}$ kifejezésből kiszámítjuk az "a" értékét

$$a = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R} = \frac{1.234-1}{1.234} \cdot \frac{9.81}{287} = 0.00648 \frac{C^\circ}{m},$$

majd a 10.13 összefüggéssel a keresett nyomás-arány

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - a \cdot z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}} = \left(\frac{288 - 0.00648 \cdot 10^4}{288} \right)^{\frac{9.81}{287 \cdot 0.00648}} = 0.260$$



Légnyomás változása a troposzférában
10.7 ábra

gradiensű nyomásváltozásokat ábrázoltuk. Az állandó sűrűség esetén láthatóan kb. 8.6 km magasságban a nyomás nullává válik, tehát ez a modell semmiképpen nem jó közelítése a valóságnak. A többi modell eltérése az INA modelltől nem nagyobb 20%-nál.

Megjegyzés:

d./4 Amennyiben a talajnál mérhető sűrűséget állandónak tekintenénk, akkor a

$$p = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot z$$

kifejezéssel számíthatjuk a nyomást adott magasságban, akár csak a vízben kapott nyomásváltozás, csak itt ellentétes koordináta iránnyal. Ezzel a feltevéssel már a Mt. Everest (8848 m) tetején is elfogyna a levegő, holott tudjuk, hogy már légzőkészülék nélkül is többen megmázták, bár nagy nehézségek árán, hisz ebben a magasságban egy levegővétellel a tengerszinten beszívott levegő tömegének kb. 1/3-át kapja csak az emberi szervezet.

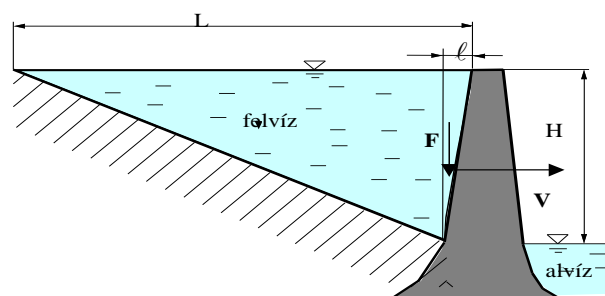
Hasonlítsuk össze a különböző modellekből nyert eredmények grafikonjait.

A 10.7 ábrán a különböző hőmérséklet-gradiensű nyomásváltozásokat ábrázoltuk. Az állandó sűrűség esetén láthatóan kb. 8.6 km magasságban a nyomás nullává válik, tehát ez a modell semmiképpen nem jó közelítése a valóságnak. A többi modell eltérése az INA modelltől nem nagyobb 20%-nál.

A valóságban az atmoszféra hőmérséklete rétegenként más és más, de a megadott átlagos érték körül mozog. Az átlagos állapotot szabványosították. A nyomásváltozási diagramot magasságmérésre is használják a repülésben. A magasságmérést nyomásmérésre vezetik vissza.

10.5 Hidrosztatikai nyomásból származó erő számítása, Hoover-gát

A Colorado folyón 1936-ban épült a Hoover-gát. Az alsó és a felső vízszint között "H" a szintkülönbség. A gát "Z" szélességű. A gát mögött felduzzasztott víz térfogatát közelítsük egy "H*Z" téglalap alapú és "L" magasságú gúlával. A gát mögötti mesterséges tározóban $V=35 \text{ km}^3$ víz szabálytalan alakú mederben 184 km hosszon terül el. Legnagyobb szélessége 13 km. Az "L" méret tehát nagymértékben eltér a valódi hosszától, de mint látni fogjuk a tárolt



Hoover-gátra ható nyomóerő

<http://heaven81.mindenkilapja.hu/html/19288804/render/usa-varosok-indianok-zene>

2.8 ábra

energia becslésére alkalmas. A gát a felvív irányában domború héjszerkezet. A felvív oldali kontúr sem függőleges, hanem, kihasználja a felette lévő víz súlyának stabilizáló hatását is. (A geometria egyszerűsített és az adatok közelítők, így az eredmények is csak nagyságrendi becslésre alkalmasak.)

Adatok: $H \cong 200\text{m}$; $L \approx 1380\text{km}$; $Z \cong 380\text{m}$; $Z \cong 380\text{m}$

Kérdések:

- Mekkora a gátfalra ható vízszintes nyomóerő és milyen magasságban van a támadáspontja?
- Mekkora a gátfalra ható függőleges nyomóerő?
- Körülbelül mekkora a gát mögötti víztömegben tárolt helyzeti energia? Az alvízszint felszínét tekintse vonatkoztatási szintnek.

Megoldás:

a./ A gátra ható túlnyomás lineárisan növekszik a "H" mélységig, lefelé lineárisan növekvő megoszló erőrendszer eredője hat, ezért az ebből származó erő támadáspontja $2/3H$ mélységben ébred, s nagysága:

$$F = \rho \cdot g \frac{H}{2} \cdot H \cdot Z = 10^3 \cdot 9.81 \cdot \frac{200}{2} \cdot 200 \cdot 380 = 74.5 \cdot 10^9 \text{ N}$$

b./ A gáttestre ható függőleges erő "F" szintén egyszerűen kiszámítható, mert a gáttest fölött lévő víz súlyával egyenlő. A gáttest fölött lévő víz közelítőleg egy háromszög alapú hasábnak foglal helyet, melyben a háromszög egyik oldala "l", a másik "H", a hasáb magassága pedig "Z", így

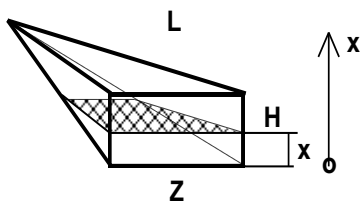
$$F = \frac{2}{3} \cdot H \cdot l \cdot \rho \cdot g = \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 12.5 \cdot 10^3 \cdot 9.81 = 4.08 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Megjegyzés:

A gátnak ez a kialakítása egy a vízszintestől kb. 7,5°-al lefelé ható erőt eredményez, így stabilabbá teszi a gátat, mert kisebb forgatónyomatékokat ad át az alapzatnak, mintha csak a vízszintes "V" erő hatna.

c./ Az ábrán a víztömeg egy azonos "x" magasságú rétegét tüntették fel, amely legyen "dx" magasságú.

Egy ilyen trapéz alakú réteg területe:



$$\frac{Z \cdot L}{2} - \left(\frac{H-x}{H} \right)^2 \cdot \frac{Z \cdot L}{2}$$

A réteg súlyát megszorozva az alvízszinttől mért magassággal és integrálva kapjuk az összes helyzeti energiát:

$$E = \rho \cdot g \cdot \int_0^H \left[\frac{Z \cdot L}{2} - \left(\frac{H-x}{H} \right)^2 \cdot \frac{Z \cdot L}{2} \right] \cdot x \cdot dx = \rho \cdot \frac{Z \cdot L \cdot H}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot g \cdot H$$

A végképletben megjelent a gát mögött tárolt víz térfogata, V

$$E = \rho \cdot V \cdot \frac{5}{8} \cdot g \cdot H = 10^3 \cdot 35 \cdot 10^9 \cdot \frac{5}{8} \cdot 9.81 \cdot 200 = 4.29 \cdot 10^{16} \text{Ws} = 11.9 \text{TWh}$$

Az 5/8-os szorzó nyilván a felvett gúla alak következménye, a valóságban ez a szorzó változhat, de a kapott eredmény nagyságrendi becslésre alkalmas.

10.6 Nyomásmérés és nyomásmérő eszközök

A nyomásmérés az áramlástanban éppolyan alapvető fontosságú, mint az elektromosságban a feszültség és az áramerősség mérése. A legtöbb esetben nem abszolút nyomásértéket (vákuumtól számított értéket), hanem nyomáskülönbséget mérünk.

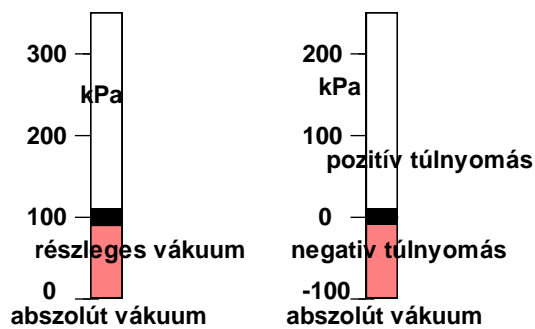
A nyomáskülönbség mérése a következő két legfontosabb alapelvet használjuk:

a./ a nyomással egyensúlyt tartó folyadékoszlop magasságából a hidrosztatika törvénye alapján,

b./ a nyomás hatására alakját rugalmasan változtató szilárd test alakváltozásának méréseiből határozzuk meg a nyomás nagyságát.

Elsőként vizsgáljuk meg, hogy mi az.

10.6.1 Abszolút és túlnyomás



Abszolút nyomás Túlnyomás

10.9 ábra

Ha számolunk vagy mérünk nyomás értékekkel tudnunk kell, hogy a számításban, vagy a méréskor mi volt a nyomás referencia értéke. Legtöbb esetben a referencia nyomás az atmoszférikus nyomás és a mért vagy számított nyomás értéke "túlnyomás". Az abszolút vákuumhoz képest mért nyomást "abszolút nyomásnak" hívjuk. Minden esetben fontos tudni a nyomás értékről, hogy abszolút, vagy túlnyomás. A kétféle nyomás között igen egyszerű kapcsolat áll fenn:

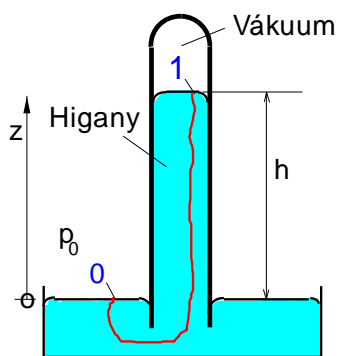
$$P_{\text{abs}} = P_{\text{túl}} + P_{\text{atm}} \quad 10.16$$

1. Az abszolút vákuum a lehetséges legkisebb nyomás, ezért az abszolút nyomás mindig pozitív.
2. A túlnyomás lehet negatív is, ha az atmoszféra alatti a nyomás, ezt vákuumnak is hívják.
3. Az atmoszférikus nyomás változik a hely az idő és az időjárási viszonyok függvényében, nem egy állandó érték.
4. Az atmoszférikus nyomás változása a földfelszín közelében 95 kPa (abs) és 105 kPa (abs) között változik. A normál atmoszférikus nyomás 101.3 kPa (abs).

10.6.2 Higanyos barométer



Súlyánál fogva a légkör a benne levő testekre nyomást fejt ki. Az előző alkalmazási példában a nyomás változását határoztuk meg. A légköri nyomás mérésére a legegyszerűbb eszköz a higanyos barométer. A légnyomást ezzel az eszközzel először **Evangelista Torricelli** (1608-47) olasz fizikus mérte meg 1643-ban. Kb. 1 m hosszú, egyik végén zárt üvegcsövet színültig töltünk higanyal, majd a cső végét befogva lefelé fordítva higanyt tartalmazó edénybe állítjuk. Ha a befogott véget szabadabbá tesszük, a higany csak részben folyik ki. A higany a csőben kb. 760 mm-el magasabban áll meg, mint a külső edényben lévő higany felszíne (ld. **10.10 ábra**).



Higanyos barométer
10.10 ábra

Alkalmazzuk a 10.7 egyenletet az adott feladatra. Az ábrán látható "0" az edényben lévő higany felszínén és a zárt csőben lévő "1" pontok között. A "z" koordinátát vegyük felfelé pozitívnak és az alsó higanyfelszínen legyen az origó. Az "1" pontban a higany telített gőzének a nyomása uralkodik (0.16 Pa, 20°C), amit gyakorlatilag abszolút vákuumnak lehet tekinteni. Így az egyenlet szerint

$$\frac{p_0}{\rho_{\text{Hg}}} + 0 = \frac{0}{\rho_{\text{Hg}}} + g \cdot h$$

Átrendezve

$$p_0 = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h$$

adódik, amelyből a "h" magasság kifejezhető,

$$h = \frac{p_0}{\rho_{\text{Hg}} \cdot g}$$

A tenger szintjén a normál légköri nyomás $p_0 = 101350 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ és $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, így a barométerben a higanyszál magassága $h=0.761 \text{ m}$ vagy 761 mm . (Egy vizes manométer 10.35 m -t mutatna. Azért használnak higanyt mert ez a legnehezebb könnyen hozzáférhető folyadék.)

A nyomás egységeként a "torr" is használatos Torricelli emlékére, bár az SI mértékrendszernek ez nem alapegysége.

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ Hgmm} = 9.81 \cdot 13.6 = 133.4 \text{ Pa}$$

A vérnyomást a mai napig is "torr"-ban adják meg, pl.: $120/80 \text{ torr}$ valakinek a vérnyomása.

10.6.3 U cső, mint manométer

A legegyszerűbb folyadékoszlopos nyomásmérő eszköz az U-cső. Működése a hidrosztatikai egyensúly elvén alapszik. A **10.11 ábrán** látható két tartály közötti nyomáskülönbséget kell meghatározni, p_1-p_2 -t. A tartályokban lévő közeg (víz) sűrűsége " ρ ". Ez teljesen kitölti az U-csőben lévő mérőfolyadék fölötti teret és a mérővezetékét. A " ρ_m " sűrűségű mérőfolyadék nem keveredik a " ρ " sűrűségűvel, ezért az érintkezési helyen határozott felszín választja el azokat egymástól. Ha a mérőfolyadék két felszínére ugyanakkora nyomás hat és a két felszínen a felületi feszültség hatása azonos, akkor a két felszín a vízszintes alapfelszínben van. Ha a manométer két bekötésére különböző nyomást vezetünk, akkor az "U"-csőben lévő mérőfolyadék kitér. Az "U"-csőre a hidrosztatika alaptörvényét kell alkalmazni

$$\frac{p}{\rho} + U = \text{állandó}$$

Alkalmasan választott pontok között kell az egyenletet felírunk. A folyadékok határfelületein keresztül nem szabad az egyenletet alkalmazni, hiszen akkor a sűrűség ugrásszerűen megváltozik, tehát nem állandó. A határfelületeken segédpontokat kell felvenni és a nyomások azonosságát kell feltételezni.



Az **10.11 ábrán** látható két tartályban különböző magasságban áll a víz és különböző a tartályokban a víz felett lévő levegő nyomása is. A tartályok aljáról nyomásvezetékeken egy higanyos "U"-csöves manométerhez vezetjük a nyomást. A nyomásvezetékek és az "U"-cső higany feletti része teljes mértékben vízzel telített.

Adatok: $\rho_{\text{víz}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$

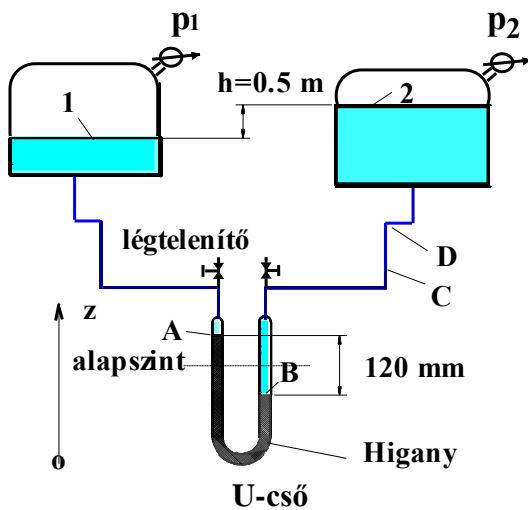
Kérdések:

a./ Mekkora a két tartályban uralkodó nyomások különbsége?

Megoldás:

A megoldáshoz az állandó sűrűség esetében használatos $\frac{p}{\rho} + U = \text{áll.}$ összefüggést kell alkalmazni. Figyelembe véve, hogy az összefüggés csak egy közegen belül érvényes. A közeghatáron csak a nyomások azonosságát szabad feltételezni. Az U potenciálfüggvény egyszerűen felírható egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelye függőlegesen felfelé mutat és origója az "U"-cső aljával egy magasságban található, ekkor

$$U = g \cdot z + \text{áll.}$$



U-cső
10.11 ábra

a./ Alkalmazzuk a statika alaptörvényét a következő pontok között:

1-A pontok között vízben

$$\frac{p_1}{\rho_{\text{víz}}} + g \cdot z_1 = \frac{p_A}{\rho_{\text{víz}}} + g \cdot z_A$$

A-B pontok között higanyban

$$\frac{p_A}{\rho_{\text{Hg}}} + g \cdot z_A = \frac{p_B}{\rho_{\text{Hg}}} + g \cdot z_B$$

B-2 pontok között vízben

$$\frac{p_B}{\rho_{\text{víz}}} + g \cdot z_B = \frac{p_2}{\rho_{\text{víz}}} + g \cdot z_2$$

A "z" koordináták a nulla szinttől mért magasságokat jelölik.

Fejezzük ki a fenti egyenletekből a nyomáskülönbségeket, ekkor

$$p_1 - p_A = g \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot (z_A - z_1)$$

$$p_A - p_B = -g \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot (z_A - z_B)$$

$$p_B - p_2 = g \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot (z_2 - z_B)$$

majd adjuk össze a három egyenletet, így a keresett nyomáskülönbséget kapjuk:

$$p_1 - p_2 = g \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot (z_A - z_B) - g \cdot \rho_{\text{Hg}} \cdot (z_A - z_B) + g \cdot \rho_{\text{víz}} \cdot (z_2 - z_1).$$

Behelyettesítve a példa adatait, az eredmény a következő:

$$p_1 - p_2 = 9.81 \cdot 10^3 \cdot 0.12 - 9.81 \cdot 13.6 \cdot 10^3 \cdot 0.12 + 9.81 \cdot 10^3 \cdot 0.5 = -9.9276 \text{ kPa}$$

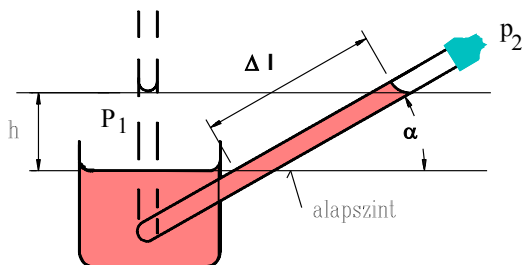
Célszerűbb a pozitív nyomáskülönbséget megadni, ami

$$\underline{p_2 - p_1 = 9.927 \text{ kPa}}$$

10.6.4 Mikromanométerek

A mikromanométerek az "U"-cső elvén a leolvasási hossz növelése útján pl. a ferdecsöves, vagy görbecsöves mikromanométerek segítségével oldják meg a nyomásmérés pontosságának növelését. A **10.12 ábra** a ferdecsöves mikromanométer elvi vázlatát mutatja.

Adott $p_1 - p_2$ nyomáskülönbség esetén az " α " szög változtatásával a leolvasási hossz növelhető és ezen keresztül a nyomásmérés pontossága is fokozható.



Ferdecsöves mikromanométer

10.12 ábra

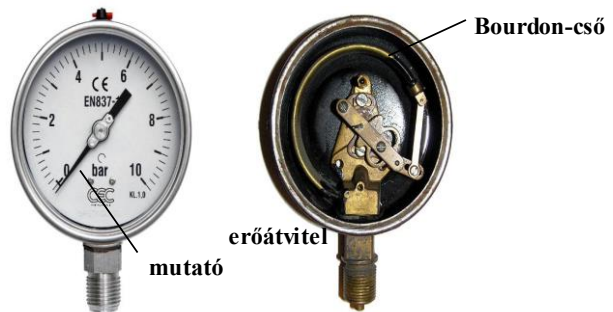
A leolvasás pontosságát optikai eszközökkel lehet növelni. Ezt az elvet valósítja meg a Betz-féle mikromanométer. (Részleteket az "Áramlástan Mérések [7]" laboratóriumi segédletben találhatunk.)

10.6.5. Rugós nyomásmérő műszerek

Talán a legelterjedtebb nyomásmérő műszer a Bourdon-csöves nyomásmérő (ld. **10.13 ábra**). Nevét **Eugène Bourdon (1808-1884)** francia mechanikusról, feltalálójáról kapta.

A körívre, vagy spirálra hajlított cső egyik végét behegesztik, és egy mutatóhoz csatlakoztatják. A másik vége kapcsolódik a nyomásmérési helyhez. A cső belsejébe

jutó nyomás kiegyenesíteni igyekszik a csövet. A cső szabad végét egy szerkezet felnagyítva juttatja a mutatóhoz, amelyet elmozdít. A mutató alatti skálát megfelelően kalibrálják. A műszer széleskörű elterjedését egyszerű szerkezete és könnyű kezelhetősége magyarázza.



Bourdon csöves nyomásmérő

10.13 ábra

10.6.6 Nyomástávadók

Az elektromos kimenetet adó eszközök elterjedése egyre szélesebb körben jelentkezik az ipari, laboratóriumi felhasználásban. Ennek oka a számítógépes adatfeldolgozás, irányítás és vezérlés rohamos terjedése.

Az elektromos kimeneti jellel rendelkező nyomásmérő eszközök különböző elven működhetnek. Az egyik fajtájuk az, amelynél az előző fejezetben ismertetett folyadékos mikromanométerek folyadék-szint érzékelését elektromos jellé alakítják, és ezt lehet azután megfelelő átalakítással felhasználni.

Az elektronikus nyomásmérők egy további csoportja az, amelynél a nyomás hatására egy rugalmas elem deformálódik és a létrejött deformáció érzékelésével kapott elektromos feszültség, vagy áram szolgál kimenőjelként. Leggyakrabban deformálódó elemnek membránt használnak kis nyomások érzékelésére. A membrán anyagától, geometriai méreteitől függ a nyomásmérő érzékenysége, pontossága. A membrán anyaga nagyban befolyásolja a mérés pontosságát, a nyomásmérő nullhibáját, karakterisztikájának linearitását.

Léteznek még piezoelektromos elven, mágneses elven működő nyomásmérő eszközök is, ezeket itt nem ismertetjük.

A nyomásmérő műszerek tárgyalását követően térjünk vissza a hidrosztatika alapegyenletének alkalmazásához.

10.7 Folyadék egyenletesen gyorsuló rendszerben

Ha egy folyadékot tartalmazó tartály áll, vagy egyenletes sebességgel egyenes vonalban mozog, a benne lévő víz a tartályhoz képest nyugalomban marad. A folyadék szabad felszíne továbbra is vízszintes marad, merőleges a térerő-vektorra. Ha azonban a tartályt egyenletesen gyorsítjuk, akkor a folyadék felszíne a vízszintestől kitér, majd relatív nyugalomba jut a tartályhoz képest, de a felszíne a gyorsulás irányától függően megváltozik az eredeti állapothoz viszonyítva. Nézzük példaként a vízszintesen gyorsuló, felül nyitott tartálykocsit, amelyet a **10.14 ábra** mutat gyorsulás közben.

A gyorsuló rendszerből vizsgálva a jelenségeket, a nehézségi erőn kívül fellép egy inercia erő is. Az inercia erő által keltett hatás olyan, mintha egy tömeg a gyorsulással éppen ellentétes irányba vonzaná a rendszerben lévő tömegpontokat. A " \underline{g}_a "-val jelzett térerő-vektor teljesen hasonlóan kezelhető mint a Föld nehézsége erőter vektora. A két térerő-vektor eredője lép a hidrosztatika alapegyenletében az erőter szerepébe. Tehát a folyadékfelszín az eredő térerővektorra lesz merőleges, a legnagyobb nyomásváltozás is az eredő térerő irányába mutat.

A hidrosztatikai feladat megoldásához szükséges az eredő erőter potenciáljának felírása. A potenciál függvényt elő lehet állítani az egyes erőterek potenciáljainak összegeként. A koordináta-rendszert célszerű egy vízszintes "x" és egy függőleges "z" tengellyel felvenni, valamint az origóját az egyik kiválasztott pontba helyezni. Jelen esetben legyen ez az "A" pont.

Könnyű belátni, hogy az eredő potenciálfüggvény a következő:

$$U = g \cdot z + a \cdot x + U_0 \quad 10.17$$

(A potenciál értékét az $x = 0$ és a $z = 0$ helyen zérusnak választva $U_0 = 0$ adódik.)

A függvény első tagja a nehézségi erő potenciálja, a második tagja a gyorsuló erőter potenciálja. A potenciálok előjelét úgy tudjuk meghatározni, hogy a gyorsulás irányába kell nőnie. Arra felé növekszik, amerre nehezebben tud menni az ember, ha beleképzeli magát a rendszerbe, jelen esetben felfelé és jobbra.

Amennyiben a gyorsulás és a nehézségi erőter nem merőlegesek egymásra, valamelyiket fel kell bontani a másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre. (ld. Áramlástan Példatár [18])



Egy tartálykocsi, amelyben víz van és vízszintesen gyorsul $a = 3 \text{ m/s}^2$ gyorsulással. A kocsi 3 m hosszú és a víz mélysége a kocsiban 1.5 m, amikor a kocsi nyugalomban van.

Kérdések:

- Mekkora az " α " hajlásszöge a vízfelszínnek a vízszinteshez viszonyítva?
- Mekkora a maximális nyomás a fenéken?
- Mekkora a minimális nyomás a fenéken?

Megoldás:

a./ Elsőként a felszín hajlásszögét határozzuk meg a vektorábrából:

$$\tan \alpha = \frac{g_a}{g_g} = \frac{3}{9.81} = 0.306$$

ahonnan $\alpha = 17^\circ$.

A gyorsulás hatására a vízszint emelkedése " h_1 " szintén az ábrából olvasható ki:

$$h_1 = \tan \alpha \cdot \frac{\ell}{2}$$
$$h_1 = 0.306 \cdot \frac{3}{2} = 0.459 \text{ m.}$$

b./ A nyomáskülönbségek kiszámításához ismerjük a felszín elhelyezkedésének alakját a "0" az "A" és a "C" pontok koordinátáit a felvett rendszerben.

A potenciál függvény az előzőek alapján a 10.17 egyenlet szerint:

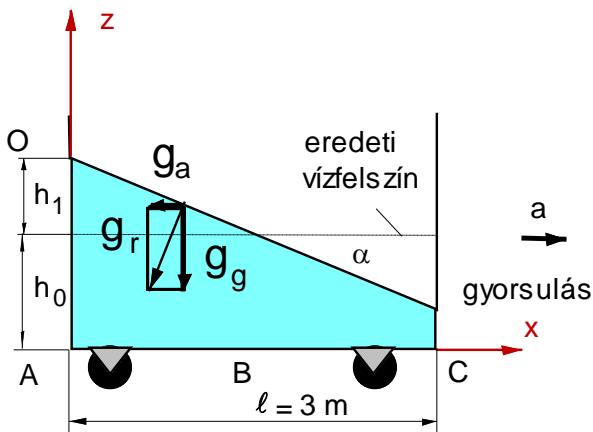
$$U = g \cdot z + a \cdot x$$

Következő lépésként alkalmazhatjuk a statika alaptörvényét, először a "0" és az "A" pontok között:

$$\frac{p_0}{\rho} + g \cdot (h_0 + h_1) + a \cdot 0 = \frac{p_A}{\rho} + g \cdot 0 + a \cdot 0$$

Ebből kifejezve a nyomáskülönbséget:

$$p_A - p_0 = \rho \cdot g(h_0 + h_1) = 10^3 \cdot 9.81 \cdot (1.5 + 0.459) = 19.21 \text{ kPa}$$



Vízszintesen gyorsuló kocsi
10.14 ábra

c./ A minimális nyomás a "C" pontban ébred a fenéken. Hasonlóan az előzőekhez a "0" és a "C" pontok között a statika alaptörvényét alkalmazva kapjuk a

$$\frac{p_0}{\rho} + g \cdot (h_0 + h_1) = \frac{p_C}{\rho} + a \cdot \ell$$

kifejezést, amelyből kifejezve és behelyettesítve a nyomáskülönbség értéke:

$$p_C - p_0 = \rho \cdot g(h_0 + h_1) - \rho \cdot a \cdot \ell =$$
$$= 10^3 \cdot 9.81(1.5 + 0.459) - 10^3 \cdot 3 \cdot 3 =$$
$$= 10.21 \text{ kPa}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a "C" pont felett lévő vízoszlop hidrosztatikai nyomását számítjuk ki a "C" pontban.

10.8 Folyadék forgó rendszerben



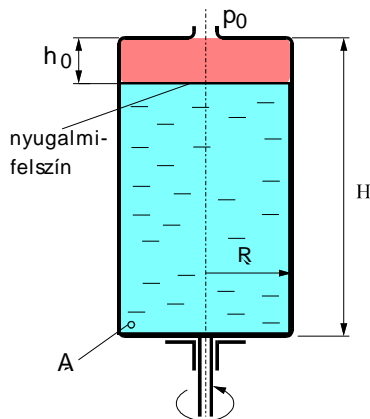
Függőleges tengely körül forgó tartályban lévő folyadék a vele együtt forgó koordináta-rendszerből szemlélve szintén állni látszik. A gyorsuló rendszerben a nehézségi erőn kívül fellép egy inercia erő is. Az inercia erő által keltett hatás olyan, mintha egy tömeg a gyorsulással éppen ellentétes irányba vonzaná a rendszerben lévő tömegpontokat. A forgó rendszerben a centripetális

gyorsulás tartja körpályán a rendszerben lévő tömegpontokat, amely a középpont felé mutat. A centripetális gyorsulással ellentétes térerő-vektort kell felvennünk, amely a középponttól kifelé mutat. A " \underline{g}_a "-val jelzett térerő vektor teljesen hasonlóan kezelhető, mint a Föld nehézségi erőter-vektora, a nagysága a jól ismert centripetális gyorsulással egyenlő.

$$|\underline{g}_r| = r \cdot \omega^2$$

A forgó térben azonban a sugártól függ az erőtervektor, így a potenciál függvényt a sugár menti integráljából kapjuk.

$$U = -\int r \cdot \omega^2 \cdot dr = -\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + \text{const.} \quad 10.18$$



Folyadék forgó edényben
10.15 ábra

Az előjelre itt is érvényes, hogy a potenciálnak abba az irányba kell nőni, amerre "nehezebb" menni, ha az ember beleképzei magát a rendszerbe, jelen esetben a középpont felé nehezebb menni. A csökkenő sugárhoz tartozik növekvő potenciál.

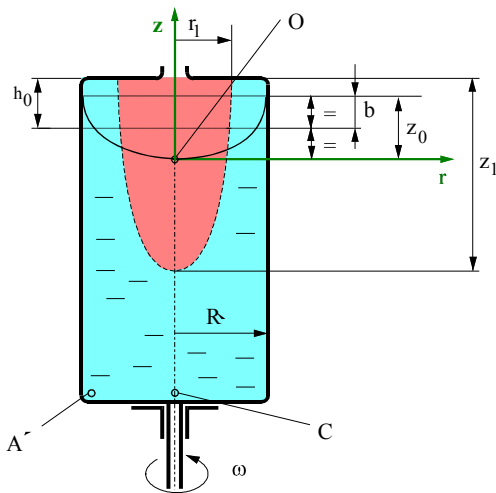
A felszín itt is merőleges a mindenkorai eredő térerő-vektorra.

A **10.15 ábra** egy vízzel töltött centrifuga forgatás előtti állapotát mutatja. A vízfelszín és a tartály fedele közötti távolságban (h_0) levegő tölti ki az edényt. Az edényt függőlegesen tengely körül " ω " szögsebességgel megforgatjuk.

Adatok: $H = 300\text{mm}$; $h_0 = 20\text{mm}$; $R = 100\text{mm}$

Kérdések:

- Mekkora szögsebességnél éri el az edény tetejét a víz?
- Hogyan függ a felszín lesüllyedése " ω "-tól, ha az edény tetejét elérte a víz?
- Legyen $\omega = 20 \frac{1}{s}$ szögsebesség. Mekkora a $p_A - p_0$ nyomáskülönbség?
- Mekkora erővel emeli az edény fedelét a folyadék? ($\omega = 20 \frac{1}{s}$)
- Mekkora erővel nyomja az edény alját a folyadék? ($\omega = 20 \frac{1}{s}$)



10.16 ábra

Megoldás:

A feladat megoldásakor itt is, mint az előző, gyorsuló kocsi esetében, a megfelelő koordináta-rendszer választásával és a potenciál felírásával kell kezdeni.

Feltételezve, hogy a forgatás hatására a vízfelszín közepén lesüllyed, (pl.: mint a pohárban kevert kávé esetén) a tengelyen lévő legalsó pontot választjuk origónak. Felfelé mutató "z" és egy vízszintes "r" tengelyekkel rendelkező henger-koordináta-rendszerben dolgozunk.

a./ A 10.16 ábrán feltüntettünk egy olyan állapotot, amikor a víz még nem érte el az edény tetejét, és egy másikat, amelynél már elérte. Az első eset tárgyalásával kezdjük.

A tengelyen lévő origó és a felszín felső pontja között "z₀" a magasságkülönbség. A felszín minden pontjában p₀ a nyomás, tehát a statika alaptörvénye szerint a potenciál is minden pontban állandó.

A potenciál függvényt egyszerűen a nehézségi erőtér és a forgásból származó erőtér összegeként adhatjuk meg, tehát

$$U = g \cdot z - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} . \quad 10.19$$

Mivel az origóban mind az "r", mind a "z" nulla, ezért a vízfelszín minden pontjában zérus a potenciál, így a fenti egyenlet a következőképp írható fel:

$$z = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} \quad 10.20$$

A kapott kifejezés egy parabola egyenlete, így a vízfelszín egy forgási paraboloid. Alkalmazzuk a függvényt a "R" sugáron, ekkor kapjuk a "z₀" értékét.

$$z_0 = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g}$$

A "z₀" emelkedés a szögsebesség függvénye tehát, ha meg akarjuk határozni azt az "ω"-t, amelynél eléri a felszín az edény tetejét, akkor kell tudnunk az eredeti, nyugalmi felszínhez képesti süllyedést, ill. emelkedést. Ezt a forgatás előtti és a forgatás utáni térfogatok egyenlőségéből tudjuk meghatározni.

Matematikából tudjuk, hogy egy másodfokú forgási paraboloid térfogatát úgy számíthatjuk ki, hogy a vele azonos alapterületű és magasságú henger térfogatának vesszük a felét (ld. Példatár levezetést 10.1 feladat).

Jelöljük a parabola emelkedését a nyugalmi felszínhez képest "b"-vel. Az R² · π alapterületű és "b" magasságú hengerben a forgatás előtt elhelyezkedő levegő a forgatás után a "z₀" magasságú paraboloidba kerül, hisz sem az alatta levő víz, sem a felette levő levegő térfogata nem változik. Jelen feladatunkban a paraboloidban lévő levegő térfogata:

$$V_p = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot z_0$$

Így a két térfogatot egyenlővé téve

$$R^2 \cdot \pi \cdot b = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot z_0$$

kapjuk, hogy

$$b = \frac{z_0}{2} = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g},$$

vagyis a parabola ugyanannyit süllyed, mint amennyit emelkedik a nyugalmi felszínhez képest. Amikor az edény tetejét eléri a víz, akkor ez a helyzet megváltozik, de éppen az eléréskor még igaz, tehát ha "b" helyére h_0 -t helyettesítve, megkapjuk a keresett forgási szögsebességet, ω_1 -et.

$$h_0 = b = \frac{R^2 \cdot \omega_1^2}{4 \cdot g},$$

amiből

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{h_0 \cdot g}}{R} = \frac{2 \cdot \sqrt{0.02 \cdot 9.81}}{0.1} = 8.86 \frac{1}{s}.$$

b./ Ha eléri a vízfelszín a fedőt, akkor a szaggatott vonallal jelzett felszín alakul ki. A paraboloid továbbra is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy rajta a potenciál állandó, hisz a nyomás is állandó, p_0 .

A felszín egyenletét továbbra is a *10.19 kifejezés* írja le. Alkalmazzuk az ábra jelöléseit, így

$$z_1 = \frac{r_1^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g}.$$

Sem a " z_1 ", sem az " r_1 " nem ismertek, ezért további összefüggésre is szükségünk lesz. Az előző esetben is alkalmazott térfogat egyenlőséget írjuk fel most is. A forgás előtt a víz feletti hengerben lévő levegő térfogata megegyezik a forgás után a paraboloidban lévő levegő térfogatával, tehát

$$R^2 \cdot \pi \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot z_1$$

Az előbbi egyenletből kifejezve r_1^2 -t és behelyettesítve az utóbbiba, kapjuk, hogy

$$z_1 = R \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Ha a víz elérte az edény tetejét, akkor a lesüllyedés és a szögsebesség lineáris kapcsolatban vannak egymással. Ez a kapcsolat mindaddig fennáll, ameddig a parabola el nem éri az edény alját.

Ezt a tulajdonságot régen fel is használták fordulatszám mérésére. Üvegből készült, olajjal részben feltöltött, kívül skálával ellátott edényt használtak bányagépek fordulatszámának mérésére.

c./ A megadott $\omega = 20 \frac{1}{s}$ szögsebesség nagyobb, mint az **a./** esetben kapott érték, tehát a vízfelszín már belemetsz az edény fedelébe, de remélhetőleg az alját még nem éri el. Ezt nagyon egyszerűen ellenőrizhetjük, mert csak az előző, " z_1 "-re kapott képletbe kell behelyettesíteni, és ha az edény magasságánál kisebb értéket kapunk, akkor ez áll fenn.

$$z_1 = R \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{h_0}{g}} = 0.1 \cdot 20 \cdot \sqrt{\frac{0.02}{9.81}} = 0.09 \text{ m} = 90 \text{ mm}$$

A kapott lesüllyedés kisebb az edény magasságánál, így nincs alsó bemetszés.
A nyomáskülönbséget a

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 = \frac{p_A}{\rho} + U_A$$

összefüggésből számíthatjuk ki.

Az "A" pont potenciálját a megadott adatok alapján számíthatjuk ki, figyelembe véve, hogy pl. a "z_A" koordináta negatív előjelű.

$$U_A = -\frac{R^2 \cdot \omega^2}{2} - (H - z_1) \cdot g$$

Beírva a fenti egyenletbe és rendezve, megkapjuk a keresett nyomáskülönbséget:

$$p_A - p_0 = \rho \cdot \left[\frac{R^2 \cdot \omega^2}{2} + (H - z_1) \cdot g \right] = 1000 \cdot \left[\frac{0.1^2 \cdot 20^2}{2} + (0.3 - 0.09) \cdot 9.81 \right] = 4060 \text{ Pa.}$$

d./ Az edény fedelét a forgás során keletkező túlnyomásból származó erő emeli.
Az "r₁" és a "R" sugár között a nyomás változik, mégpedig a következők szerint:

$$p - p_0 = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot (r^2 - r_1^2)$$

Amit szintén a statika alaptörvényének alkalmazásából kaptunk. Csak integrálással határozható meg az erő nagysága. Jelöljük az erőt "F_f"-el, ami nyilván felfelé mutat. Tehát

$$F_f = \rho \cdot \frac{2\pi \cdot \omega^2}{2} \int_{r_1}^R (r^2 - r_1^2) \cdot r \cdot dr = \rho \cdot \pi \cdot \omega^2 \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r_1^2 \cdot r^2}{2} \right]_{r_1}^R,$$

egyszerűsítve és összevonva, majd behelyettesítve, az erő nagysága:

$$F_f = \rho \cdot \pi \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{R^2 - r_1^2}{2} \right)^2 = \rho \cdot \pi \cdot 20^2 \left(\frac{0.1^2 - 0.066^2}{2} \right)^2 \cong 10 \text{ N.}$$

Előzőleg az "r₁" értékét ki kellett számítani pl. a 10.20 egyenletbe behelyettesítve "z₁"-et.

$$z_1 = \frac{r_1^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g},$$

ebből

$$r_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}}{\omega} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.09}}{20} = 0.066 \text{ m} = 66 \text{ mm}$$

adódik.

e./ Az edény aljára ható nyomóerőt teljesen hasonlóan számíthatjuk ki. Elsőként az edény alján lévő "C" pontban számítsuk ki a nyomást, ez egyszerűen

$$p_C - p_0 = \rho \cdot g \cdot (H - z_0) = 1000 \cdot 9.81 \cdot (0.3 - 0.09) = 2060 \text{ Pa.}$$

Mivel a "C" és az "A" pontok között a nyomás változik, mégpedig a következők szerint (analóg módon a fedőnél), csak itt "r_c" sugár zérus, tehát

$$p - p_C = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2.$$

A fenékre ható erő ezek után a következő:

$$F_a = (p_c - p_0) \cdot R^2 \pi + \rho \cdot \frac{2\pi \cdot \omega^2}{2} \int_0^R r^2 \cdot r \cdot dr = (p_c - p_0) \cdot R^2 \pi + \rho \cdot \pi \cdot \omega^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$F_a = 2060 \cdot 0.1^2 \cdot \pi + 1000 \cdot \pi \cdot \omega^2 \cdot \frac{0.1^4}{4} = 96.2 \text{ N.}$$

Megjegyzés:

Az edényben lévő víz súlyánál ez az erő nagyobb, mégpedig éppen a fedelet emelő erővel. A víz súlya ugyanis:

$$F_a - F_f = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (H - h_0) = 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.1^2 \cdot \pi \cdot (0.3 - 0.02) = 86.2 \text{ N}$$

A hidrosztatika alaptörvényeinek tárgyalása után térjünk rá a folyadékok másik érdekes tulajdonságának ismertetésére, a felületi feszültségre.



11. Kinematika és a folytonosság tétele

11.1. A folyadékmozgás leírása

Szilárd testek mozgásának leírására elegendő a súlypontjának helyzetét, valamint a súlyponton átmenő három egymásra merőleges tengely körüli elfordulását megadni. A test többi pontjának helyzetét ezek ismeretében bármely helyen és időben meg tudjuk kapni, hiszen a test mozgás közben az alakját nem változtatja meg.

A folyadékban az egyes részecskék egymáshoz képest szabadon elmozdulhatnak, minden egyes részecske mozgását külön kell figyelemmel kísérni. A rendszer szabadságfoka végtelen.



A **Lagrange-féle leírási mód** lényegében a szilárd testeknél alkalmazott módszerrel egyezik meg (**Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)** francia fizikus). A folyadék elemi részeit elhatárolva képzeljük el, és az egyes részek mozgását külön-külön vizsgáljuk. A folyadékreszeket azonban meg kell különböztetnünk egymástól, mintegy nevet kell adnunk nekik. Ez úgy történik, hogy egy adott (kezdeti) időpillanatban minden folyadékreszt jellemzünk egy \underline{r}_0 helyvektorral, vagy annak koordinátaival. Egy későbbi időpontban " \underline{r} " vektorral jelöljük meg a részecskék helyzetét, amelyet az " \underline{r}_0 " helyvektor és a " t " időpont határoz meg:

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$$

A folyadékresz sebességét és gyorsulását az " \underline{r} " idő szerinti első és második differenciálhányadosa adja meg rögzített " \underline{r}_0 " mellett:

$$\underline{v} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \right)_s, \underline{a} = \left(\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} \right)_s$$

Az " s " index azt jelenti, hogy a differenciálást állandó " s " mellett ugyanazon részecskére vonatkozóan kell elvégezni, egy részecske pályája mentén.

Ezt a módszert csak bizonyos speciális esetekben célszerű használni. Nehézsége miatt általánosan a folyadékok mozgásának leírására nem használják.



Euler-féle leírási mód, amely a térben rögzített pontban uralkodó sebességet, gyorsulást stb. írja le az idő függvényében, tehát a szilárd testek leírási módjától lényegesen különbözik. A továbbiakban ezt a módszert alkalmazzuk (**Leonhard Euler (1701-1783)** svájci tudós, aki munkássága nagyrészt Szentpéterváron töltötte.), amely a folyadékreszek sebességét adja meg a hely " \underline{r} " és az idő " t " függvényében:

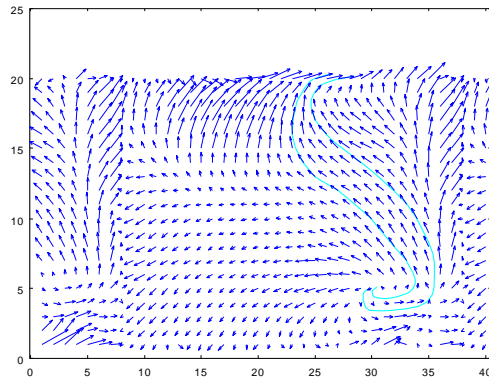
$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t),$$

vagy komponensekre bontva derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\underline{v}(\underline{r}, t) = v_x(x, y, z, t) \cdot \underline{i} + v_y(x, y, z, t) \cdot \underline{j} + v_z(x, y, z, t) \cdot \underline{k}$$

A sebesség függvény **vektor-vektor** függvénnyel írható le. Mind a függő-, mind a független változó vektor.

A sebességfüggvény legtöbb esetben a tér és az idő folytonos, sőt folytonosan deriválható függvénye. Ez a leírási mód legtöbbször feltételezi a sebesség folytonos térbeli és időbeli változását, amely összhangban van a folyadék kontinuumként történő modellezésével. A Lagrange-féle leírási módnál ez a kikötés, a diszkrétan kezelt részecskék miatt, csak közvetett módon teljesül. (Numerikus számításoknál előfordulhat, hogy két részecske a tér ugyanazon pontjában tartózkodik egyazon időpillanatban, ha a számítás numerikus hibák miatt nem elég



Síkbeli áramkép

Forrás: Vad J. and Bencze F.: Secondary Flow in Axial Flow Fans of Non-Free Vortex Operation

11.1 ábra

pontos, ami természetesen a valóságban nem lehetséges.) Ha az áramlás stacionárius, akkor a sebességvektor csak a hely függvénye, amely a leírást tovább egyszerűsíti.

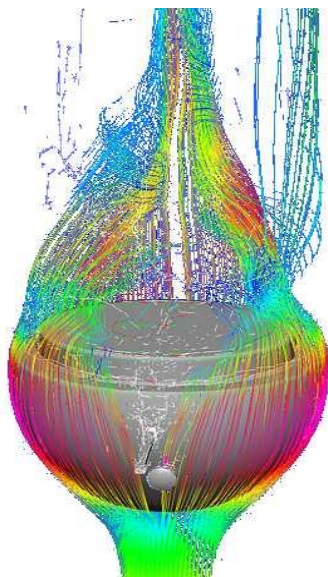
A **11.1 ábrán** egy még "egyszerűbb" áramkép látható, amely kétdimenziós síkáramlás és időtől független, stacioner áramlás.

Az egyes pontokban lévő vektorok a sebesség irányát és nagyságát mutatják. Láthatóan az igen bonyolult áramlást célszerű valamilyen módon szemléletesebbé tenni, erre szolgál az áramlás láthatóvá tétele.

11.2. Áramvonal, pálya, nyomvonal, stacioner áramlás

A térben és időben változó sebességtér szemléltetésére a folyadéktérben a következő görbéket használják.

A **pálya** egy kiszemelt pontszerű folyadékrész által befutott út. Pályák pl. a hosszú exponálási idővel készült éjszakai felvételeken látható autók helyzetjelzői által létrehozott fényes vonalak, vagy a magasban szálló repülőgép kondenzcsíkja.



Gömbsüveg körül kialakuló nyomvonal rendszer

11.2 ábra

Az **áramvonal** olyan görbe, amelyet egy adott pillanatban a sebességvektor minden pontjában érint: $\underline{v} \times d\underline{s} = 0$, ahol $d\underline{s}$ az áramvonal elemi hosszúságú darabját jellemző vektor. Az áramvonal egy adott pillanatban a sebességvektorok burkoló görbéje, így általában időben változó görbe. (A **11.1 ábrán** feltüntettünk néhány áramvonalat.)

A **nyomvonal** a tér egy pontján egymás után áthaladó folyadékrészeket egy adott pillanatban összekötő görbe. (Ilyen nyomvonal pl. a hamutartóra tett cigarettáról felszálló füstcsík, vagy a **11.2 ábra** látható gömbsüveg körüli áramkép megjelenítésére használt színes folyadék által megjelenített nyomvonalrendszer. A jegyzetborító lapján repülőgép körül kialakuló, nyomjelző lövedékekkel létrehozott nyomvonalrendszert figyelhetünk meg.)

Az áramlások igen fontos sajátossága időfüggésük,

azaz, hogy jellemzőik (sebesség, nyomás, sűrűség) függenek-e az időtől.

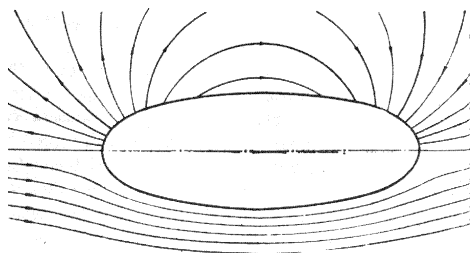
Stacioner, időálló az **áramlás**, ha jellemzői nem függenek az időtől. Ha a sebesség a tér bármely pontjában az időtől független, a fenti három vonal egybe esik, mert ezeknél egy részecske mindig az időben állandó áramvonal érintője irányában halad, és így egy ponton áthaladó részecskék mind ugyanazon áramvonalon sorakoznak. Az ilyen áramlást tehát $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$, időálló, vagy stacioner áramlásnak nevezzük.

Stacioner áramlásban pontszerű forrásokban bejuttatott füsttel, festett vízzel stb.-vel a nyomvonalak segítségével az áramvonalak is láthatóvá tehetők.

Az áramlás időállósága általában nem független a koordináta-rendszer választásától. Például a folyóban lévő hídpillér a hídról nézve stacioner, az ennek megfelelő áramvonalakat a **11.3 ábra** alsó részén láthatjuk. A folyóhoz rögzített koordináta-rendszerből nézve nem stacioner, mert a folyónak a pillértől távolabb lévő részei a folyóhoz rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva nyugalomban vannak, míg a pillér közelében lévő részek elmozdulnak (kitérnek a pillér elől), majd helyükre visszatérve ismét nyugalomba jutnak. Ennek megfelelő áramvonalakat a **11.3 ábra** felső részén láthatjuk. Ez az áramkép a folyóhoz viszonyítva, a pillérrel együtt halad.

11.3 A folytonosság tétele

A továbbiakban csak olyan áramlásokkal foglalkozunk, amelyekben a folyadék nem tűnik el és nem keletkezik. Ezt a tulajdonságot a folyadék folytonosságának nevezzük.



Áramlás a hídpillér körül

Forrás: Gruber J.-Blahó M. Folyadékok mechanikája

11.3 ábra

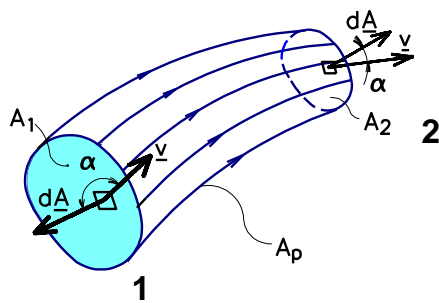
Áramlásban előforduló kémiai reakcióknál, fázis-átalakulásoknál (pl. forrás, lecsapódás) a folyadék egy része eltűnhet, vagy keletkezhet. Ha pl. gőz áramlik egy csővezetékben, akkor a vezeték falára kicsapódó vízpára a gőzfázisból eltűnik. Ilyen típusú áramlásokkal jelen jegyzetben nem foglalkozunk.

11.3.1 Folytonosság tétele stacioner áramlásra

Elsőként vizsgáljunk egy időálló, stacioner áramlást. Egy sík felületdarab kerülete mentén megrajzoljuk az áramvonalakat, amikből egy áramcsövet kapunk. Az áramcső palástját áramvonalak alkotják, így azon keresztül nem tud a folyadék átlépni, hiszen a sebesség mindenütt érintője a falat alkotó áramvonalaknak. Az "1" felületen belépő tömegáramot a

$$q_m = \iint_{A_1} \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} \quad 11.1$$

kifejezésből kapjuk. Amennyiben a sűrűség és sebesség közel állandó az "A₁" felület mentén, valamint a felületre merőleges a sebesség, abban az esetben a tömegáramot egyszerűbben számíthatjuk, mégpedig a három mennyiség egyszerű szorzatából:



Áramcső
11.4 ábra

$$q_m = A_1 \cdot \rho_1 \cdot v_1 \quad 11.2$$

Az "A₂" felületen ugyanekkora tömegáramnak ki is kell áramlani, mert a folyadék nem tűnhet el, ill. nem keletkezhet a csőben. Tehát a kontinuitás tétele kimondja, hogy a belépő és a kilépő tömegáram azonos, így:

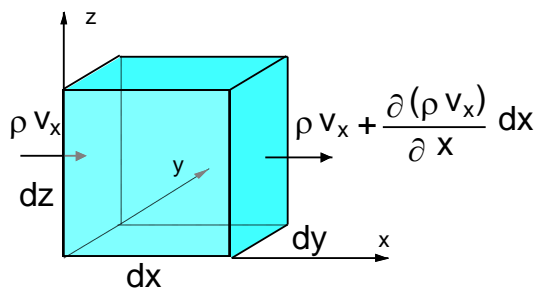
$$A_1 \cdot \rho_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot \rho_2 \cdot v_2 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad 11.3$$

Amennyiben a **sűrűség állandó**, akkor a kontinuitás tétele áramcsőre tovább egyszerűsíthető, mégpedig a térfogatáramok egyenlőségét kell csak felírni a két keresztmetszet között, mert a sűrűséggel egyszerűsíthetünk, tehát a belépő és a kilépő térfogatáram azonossága áll fenn:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \quad 11.4$$

Csővezetékek esetében használjuk a 11.3 és 11.4 kifejezéseket, stacioner áramlásokra.

11.3.2 A folytonosság tétele instacioner áramlásra



11.5 ábra

A 11.5 ábrán egy térbeli áramlásba helyezett, a folyadék számára szabadon átjárható, dx, dy és dz élhosszúságú elemi téglatestet láthatunk. Írjuk fel a téglatestbe időegység alatt be- és kiáramló tömeg mennyiségét. Az egyszerűség kedvéért először csak az "x" irányba áramló tömegáramot vizsgáljuk.

A téglatest bal oldali "dy · dz" területű lapján csak a sebesség "v_x" összetevőjével tud a közeg beáramlani, mivel a "v_y" és "v_z" sebességek a lappal párhuzamosak, így a lapon másodpercenként beáramló tömeg:

$$\rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz$$

A jobb oldali lapon a közeg kiáramlik, de közben sebessége és sűrűsége is megváltozik. A változást a "dx" távolságon vegyük lineárisnak, így a Taylor-sor első két tagjával közelítsük a megváltozott sűrűséget és sebességet. A jobb oldali lapon így a

$$\rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx$$

sebességgel és sűrűséggel áramlik ki a közeg. A felülettel való szorzás után kapjuk a jobb oldali lapon másodpercenként kiáramló tömeg mennyiségét:

$$\left[\rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz$$

Az "x" irányban, ha a beáramlást negatívnak és a kiáramlást pozitívnak vesszük, akkor a be- és kiáramló tömeg különbsége:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad 11.5$$

Hasonlóképpen el lehet végezni a számítást "y" és "z" irányban is. A be- és kiáramló tömeg különbsége:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

"y" irányban és

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

"z" irányban.

Ha feltételezzük, hogy tömeg nem vész el és nem keletkezik, akkor szükséges, hogy a három irányban kiáramló többlet összege a téglatestben lévő tömeg csökkenésével legyen egyenlő. A tömeg csökkenését megkapjuk a sűrűség-változás és a térfogat szorzatából, tehát a tömeg időbeli változása:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

("ρ" a téglatestben az átlag sűrűség, amelyet azért deriváltunk parciálisan, mert a helynek is lehet függvénye.) A három irányú tömeg kiáramlás összege egyenlő a térfogatban a tömeg időbeli csökkenésével, tehát

$$\left[\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Végigosztva az elemi térfogattal és egy oldalra rendezve a tagokat, megkapjuk a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0 \quad 11.6$$

kontinuitás tétel differenciál egyenletes alakját. Az egyenletben a vektoranalízisből ismert divergencia jelent meg. Ezt felhasználva a kontinuitás tétel differenciális alakban instacioner áramlásra a következő:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \underline{v}) = 0 \quad 11.7$$

Amennyiben az áramlás stacionárius a sűrűség egy adott pontban nem függ az időtől, tehát

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ebben az esetben a folytonosság tétele leegyszerűsödik a

$$\text{div}(\rho \cdot \underline{v}) = 0 \quad 11.8$$

alakra.

A divergencia fizikai jelentése térfogati forrás erősség, amennyiben ennek értéke mindenütt zérus, az annyit jelent, a $\rho \cdot \underline{v}$ **vektortér forrásmentes**.

A **divergencia egy skalár-vektor függvény** akárcsak a nyomás eloszlás, vagy a hőmérséklet eloszlás a térben.

Ha egyszerűsítjük a feladatot és a sűrűséget állandónak vesszük, akkor az kivihető a divergencia mögül és egyszerűsíteni lehet vele, így

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad 11.9$$

adódik, amely instacioner esetre is érvényes állandó sűrűségű közegre.

Az állandó sűrűségű közeg mindig forrásmentes.

A 11.8 egyenlet mindkét oldalának vehetjük a térfogati integrálját.

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \underline{v}) \cdot dV = 0, \quad 11.10$$

továbbá alkalmazhatjuk a **Gauss-Osztrogradszkij-tételt**, amely szerint a divergencia térfogati integrálja átalakítható egy zárt felületi integrállá a következő képpen:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \underline{v}) \cdot dV = \iint_A \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} \quad 11.11$$

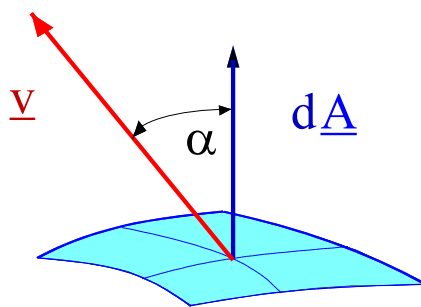
(**Karl Friedrich Gauss 1777-1855** kiemelkedő jelentőségű német matematikus, fizikus, csillagász, a Göttingeni Egyetem tanára. **Mihail Vasziljevics Osztogradszkij 1801-1862** orosz matematikus, a Szentpétervári Akadémia tagja.)

Ha 11.10 kifejezés teljesül, akkor a 11.11 egyenlet szerint igaz az is, hogy

$$\iint_A \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \quad 11.12$$

Az integrál kifejezi, hogy stacioner áramlásban, egy zárt felületből ki- és beáramló folyadék összege zérus minden időpillanatban. Alkalmazzuk a 11.12 egyenletet a **11.4 ábrán** látható áramcsőre.

A $\iint_A \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0$ kifejezésben az "A" zárt felületet bontsuk fel három különböző felület összegére.



Skalár szorzat
11.6 ábra

$A = A_1 + A_2 + A_p$, az "1" indexű felület, ahol a közeg belép az áramcsőbe, a "2" indexű felület, ahol a közeg kilép az áramcsőből és a palást ahol a közeg biztosan nem lép át. A " $d\underline{A}$ " felületelem megállapodás szerint mindig kifelé mutat a felületből és merőleges a felületre. Az integráljel mögött képezni kell minden egyes pontban a felületelem és a sebességvektor skaláris szorzatát. Mint tudjuk két vektor skaláris szorzata a következőt jelenti:

$$\underline{v} \cdot d\underline{A} = |\underline{v}| \cdot |d\underline{A}| \cdot \cos \alpha$$

A **11.6 ábra** jelöléseivel. Ha az " α " szög hegyesszög, akkor a szorzat pozitív, ha az " α " tompaszög akkor negatív, és ha az " α " derékszög akkor a skaláris szorzat zérus.

$$\iint_A \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_{A_1} \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} + \iint_{A_2} \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} + \iint_{A_p} \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0$$

Az " A_1 " felületen a közeg belép a felületbe, így a két vektor tompa szöget zár be, tehát szorzatuk negatív, az " A_2 " felületen kilép a közeg ott a közbezárt szög hegyesszög, tehát a szorzat pozitív. A paláston mindenütt merőleges a két vektor, hisz áramvonalakon vagyunk, tehát a szorzat ott zérus.

Ha az áramcső két véglapján a sűrűség és a sebesség közel állandó és közel a lapokra merőleges sebességgel lép be, ill. ki a közeg, akkor az " A_1 " és " A_2 " felületeket csak egyszerűen meg kell szorozni az ott érvényes sűrűséggel és sebességgel, hogy megkapjuk az integrál értékét.

Igy a fenti kifejezés a következő egyszerű alakot ölti:

$$-\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 + 0 = 0$$

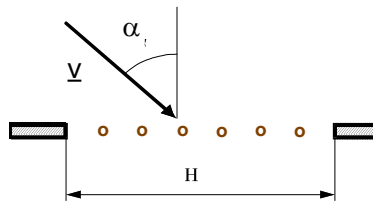
Melyet átrendezve, megkapjuk a már levezetett 11.3 kifejezést:

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$

11.3.3 Kontinuitás tetőablakon



További példaként a **11.7 ábrán** látható tetőablakon beáramló levegő térfogatáramát határozzuk meg. A rácson "v" sebességgel levegő áramlik keresztül, a sebességvektor "α" szöget zár be a rác felületi normálisával. A rajzon látható szellőzőrác rajzra merőleges mérete 1 m.



Adatok: $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $H = 2\text{m}$; $\alpha = 60^\circ$

Kérdés: beáramló térfogatáram.

Tetőablak
11.7 ábra

Megoldás:

Az átáramló térfogatáram az átáramlott felület és a felületre merőleges sebességkomponens szorzata. Általános esetben a térfogatáram számítása a sebességvektor felületi integrálásával történik:

$$q = \int_{(A)} \underline{v} d\underline{A} = \int_{(A)} v \cdot \cos\alpha \cdot dA |n| = v \cdot \cos\alpha \cdot H \cdot 1 = 3 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 = 3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

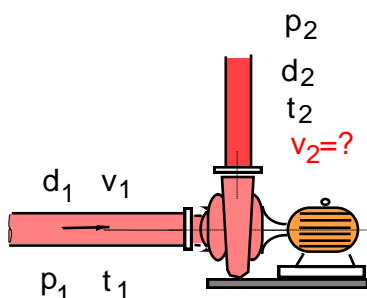
11.3.4 Kontinuitás kompresszorban



A **11.8 ábrán** vázolt kompresszor szívócsövén "v₁" sebességgel levegő áramlik be. A beáramló illetve kiáramló gáz nyomását és hőfokát megmérjük: p₁, t₁, p₂, t₂.

Adatok: p₁ = 1bar; p₂ = 2bar; t₁ = 20°C; t₂ = 70°C; d₁ = 50mm; d₂ = 35mm; v₁ = 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. A levegő specifikus gázállandója R = 287 $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Kérdések:



Kompresszor
11.8 ábra

a./ Határozzuk meg a komprimált levegő sebességét (v₂)!

b./ Az első fejezetben tanult gáz-állapotváltozások ismétlésére határozzuk meg, hogy milyen politrópikus kitevő érvényes a szívó és a nyomócsonk közötti állapotváltozásra?

Megoldás:

a./ A kontinuitás törvénye szerint a kompresszorba állandósult állapotban beáramló és kiáramló tömegáramok megegyeznek:

$$\rho_1 v_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = \rho_2 v_2 \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

A sűrűségek kiszámításához fel kell használjunk az ideális gázok állapotegyenletét:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{10^5}{287 \cdot (273 + 20)} = 1.189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{2 \cdot 10^5}{287 \cdot (273 + 70)} = 2.032 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ezek ismeretében az áramlási sebesség a nyomócsőben már kiszámítható:

$$v_2 = v_1 \frac{\rho_1 d_1^2}{\rho_2 d_2^2} = 20 \frac{1.189 \cdot 0.05^2}{2.032 \cdot 0.035^2} = 23.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b./ Alkalmazva az **1. fejezetből** az politrópikus állapotváltozásra jellemző kifejezést (ld. *11.9 egyenlet*) a szívó és a nyomócső állapotjelzői között:

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}$$

Célszerű a nyomásokat és a sűrűségeket egy oldalra rendezni és venni az egyenlet mindkét oldalának logaritmusát, majd kifejezni "n"-t, amely behelyettesítés után a következő:

$$n = \frac{\log \frac{p_2}{p_1}}{\log \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{\log 2}{\log \frac{2.032}{1.189}} = 1.29$$

A kapott politrópikus kitevő kisebb, mint a levegő adiabatikus kitevője ($\kappa = 1.4$), ez annyit jelent, hogy a kompresszort valamilyen mértékben hűtik, vagy a környezeti levegőtől magától hűl.

11.4 Örvényesség, cirkuláció

Az időjárás alakulásában fontos szerepet játszanak a ciklonok és anticiklonok. Műhold felvételeken jól látható, hogy a felhőrendszerek örvénylő mozgást végeznek a Föld felszíne felett (**ld. 10.5 ábra**). Folyók felszínén is jól megfigyelhetők az örvények. Az áramlások leírásánál fontos szerepet játszik az örvényesség. Az örvénymentes, forgásmentes, vagy rotációmentes áramlások matematikai leírása sokkal egyszerűbb feladat, mint az örvényes, vagy forgásos, rotációs áramlásoké.

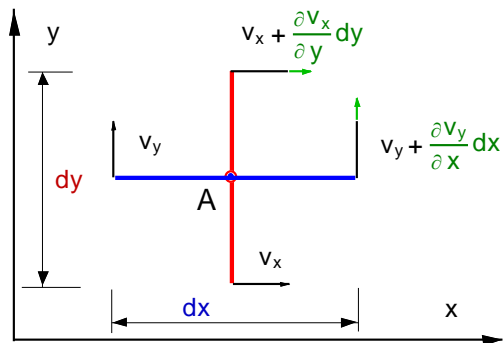
Annak érdekében, hogy a különbséget meg tudjuk ítélni a kétfajta áramlás között, magát az örvényességet célszerű elsőként megérteni, mind fizikai, mind matematikai vonatkozásban.

11.4.1 Az örvényesség síkáramlásban

Képzeljünk el egy síkáramlást pl. egy folyó felszínét. Helyezzünk a víz felszínére két egymásra merőlegesen elhelyezkedő pálcikát, amelyek közepén egymáshoz csatlakoznak egy csappal, amely megengedi az egymáshoz képesti szögelfordulást. A pálcikakereszt a víz felszínén az áramló vízzel együtt sodródik, a pálcika pontjai együtt mozognak a vízfelszín pontjaival. (Ha kellően kicsiny a pálcikakereszt, akkor ez a feltétel jó közelítéssel teljesül.)

A **11.9 ábrán** feltüntetett pillanatban a pálcikák éppen merőlegesek egymásra és párhuzamos a "dx" hosszúságú szár az "x", a "dy" hosszúságú szár az "y" tengellyel.

A pálcikák találkozási pontjában lévő "A" pontban szeretnénk megadni a forgási szögsebességet, vagy másként fogalmazva a két pálcika átlagos forgási szögsebességét, legyen ez " ω_A ".



Örvényjelző síkáramlásban
11.9 ábra

A feladat megoldásához külön kiszámítjuk a "dx" és "dy" hosszúságú pálcika szögsebességét az "A" ponton áthaladó, a rajz síkjára merőleges tengely körül, ami megfelel a "z", a harmadik koordináta tengely körüli forgásnak.

A "dx" hosszúságú pálcika "A" pont körüli szögsebességét úgy kapjuk, ha a két végpontjában a rá merőleges sebességek különbségét osztjuk a pálcika hosszával. A merőleges sebességek "y" irányúak. A baloldali végpontban " v_y ", a jobb oldali végpontban ettől kissé különböző. A víz

sebességének ismeretében ez pontosan megadható volna. Jelen esetben közelítsük lineáris függvénnyel a " v_y "-t, amely a Taylor-sor első két tagjának felírását jelenti az "x" függvényében, jelen esetben

$$v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx .$$

A "dx" pálcika szögsebessége a következő:

$$\omega_{dx} = \frac{v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx - v_y}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad 11.13$$

A "dy" hosszúságú pálcika szögsebességét hasonlóan számíthatjuk ki. A pálcikára merőleges, végpontokban érvényes sebességek különbségét elosztva a pálcika hosszával megkapjuk a szögsebességét. A merőleges sebességek itt "x" irányúak és a Taylor-sorba fejtést "y" szerint kell elvégezni. További eltérés, hogy az ábra szerint a "dy" pálcika óramutató járásával azonos irányba forog, viszont egy jobb sodrású koordináta-rendszerben az óramutató járásával ellentétes forgatást vesszük pozitívnak, ezért a kifejezés elé egy negatív előjelet kell tenni, eszerint

$$\omega_{dy} = - \frac{v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy - v_x}{dy} = - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad 11.14$$

Az "A" pontban a "z" tengely körüli szögsebesség a két pálcika szögsebességének számtani átlagából kapjuk a:

$$\omega_{zA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\text{rot } \underline{v})_{zA} . \quad 11.15$$

A matematikában a " \underline{v} " vektortér rotációjának, pontosabban a rotáció "z" irányú komponensének nevezik a zárójelben lévő kifejezést.

Amennyiben nem egy síkbeli, hanem egy térbeli áramlásról van szó, akkor a két pálcika nem csak a "z" tengely körül foroghat, hanem az "x" és "y" tengely körül is. Hasonló módon levezethető a szögsebesség, ill. a rotáció másik két koordinátairányú komponense is, amelyek a következők:

$$\omega_{xA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\text{rot} \underline{v})_{xA}$$

$$\omega_{yA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\text{rot} \underline{v})_{yA} \quad 11.17$$

A kifejezés a tér bármely pontjára igaz, így vektorosan felírva

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot} \underline{v}, \quad 11.18$$

komponensekkel felírva, vagy a nabla vektor felhasználásával a rotáció vektort:

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \text{rot} \underline{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot \underline{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot \underline{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \underline{k} \quad 11.19$$

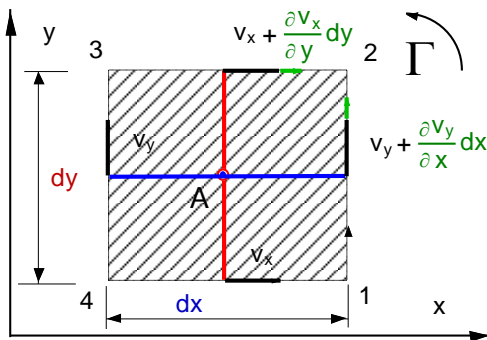
A rotáció egy vektor, amely a tér különböző pontjaiban más-más értéket vehet fel, sőt az időben is változhat a tér egy adott pontjában, ez utóbbi esetben az áramlás instacionárius.

A rotáció vektor-vektor függvény, a folyadékrezecskék saját tengelye körüli forgási szögsebességét fejezi ki, pontosabban annak kétszeresét.

11.4.2 Cirkuláció, Stokes-tétel

Az örvényes áramlások további jellemzésére vezették be a cirkulációt, amely a sebességtér zárt görbe menti integrálját jelenti. Matematikai kifejezéssel felírva:

$$11.20$$



Cirkuláció
11.10 ábra

$$\Gamma = \oint_{\Gamma} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

A "g" zárt görbe mentén a "d\underline{s}" útelemet minden egyes helyen meg kell skalárisan szorozni az aktuális sebességgel és az így kapott értékeket, melyek skalár számok (pozitív és negatív egyaránt), összegezni kell az egész zárt görbe hossza mentén. Végezzük el a cirkuláció számítását a **11.10 ábrán** látható 1-2-3-4 zárt görbére. Induljunk ki az "1" pontból. Az "1-2" szakaszon a "d\underline{s}" útelem megegyezik a "dy"-val". A sebességnek a "dy" irányába eső komponense éppen a

$$v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx. \quad (\text{Az útszakasz mentén létezik "x"}$$

irányú sebesség is, de az a skaláris szorzat során nem játszik szerepet ld. **11.6 ábra**). A "2-3" szakaszon a "d\underline{s}" útelem a "dx"-vel esik egybe, csak az irányítása ellentétes azzal. A sebesség

pedig $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy$. A sebesség és az útelem irányítása ellentétes ezért az összegzésben negatív előjellel szerepel majd ez a tag. A "g" görbe másik két szakaszán "2-3" és "3-4" szakaszokon teljesen hasonlóan járunk el, így a cirkuláció egyenlete:

$$d\Gamma = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx - v_y \cdot dy + v_x \cdot dx$$

1-2szakasz 2-3 3-4 4-1

majd egyszerűsítve:

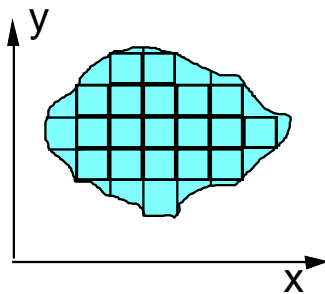
$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \quad 11.21$$

A kapott kifejezés egy elemi zárt görbén vett cirkuláció értéke. Érdeemes arra felfigyelni, hogy a zárójelben lévő kifejezés nem más, mint a rotáció "z" irányú komponense ld. 11.19 egyenlet. A másik, amire érdemes felfigyelni, hogy a zárójelen kívül lévő szorzó éppen a felületelem területével egyenlő, azaz

$$dA = dx \cdot dy$$

Tehát írható, hogy az elemi zárt görbén a sebesség integrálja azonos a rotáció "z" irányú komponensének és a felületelemnek a szorzatával, vagyis

$$d\Gamma = (\text{rot}\underline{v})_z \cdot dA$$



11.11 ábra

Bármely zárt görbe által határolt terület elemi négyszögekre bontható, a határgörbe, pedig azok oldalaival, lépcsős görbével helyettesíthető. Az elemi négyszögek kerületén számított cirkulációk összegzésénél a közös oldalak mentén adódó tagok kiesnek, ha minden egyes négyszögben azonos körüljárással számoljuk a cirkulációt. Csak a "g" görbét közelítő oldalakon számított vonalintegrál marad a cirkuláció kifejezésében. Másrészt az egyes elemi felületeket megszorozva a rajtuk érvényes rotációval és azokat összegezve szintén a cirkulációt kapjuk meg. Tehát

$$\oint_g \underline{v} \cdot d\underline{s} = \iint_A (\text{rot}\underline{v})_z \cdot dA$$

Igazolható, hogy a kifejezés jobb oldala nem csak a "g" görbe által bezárt sík felületre érvényes, hanem bármely olyan felületre, amely a "g" görbére illeszkedik és a síkból ki is léphet, mint egy drótkeretre feszített lepkeháló, vagy szappanhártya, amelyet egyik oldalról enyhén megfújunk. Ez esetben a felületelem és a rotáció vektor skaláris szorzatát kell az integrálásakor képezni.

Vegyünk fel egy egyszeresen összefüggő "A" felületet az előbbieket szerint, amely a "g" zárt görbére illeszkedik ("g" irányítása pozitív az "A" felület felől nézve.) A $\text{rot}\underline{v}$ vektortér "A" felület mentén vett integrálja és a \underline{v} egyértelmű és egyszer folytonosan differenciálható sebességtér "g" görbe menti integrálja, a **cirkuláció** közötti kapcsolatot a

$$\Gamma = \oint_g \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_A \text{rot}\underline{v} \cdot d\underline{A} \quad 11.22$$



kifejezés adja meg, amelyet **Stokes-tételnek nevezünk**. (**Georg Gabriel Stokes 1819-1903**, angol fizikus, matematikus, a Royal Society titkára, a vektoranalízis egyik kidolgozója, a fenti tétel felfedezője.) A cirkuláció fogalmát a későbbiekben fogjuk alkalmazni, pl. a szárnyelmélet keretében, a Zsukovszkij-tétel levezetésekor.

11.4.3 Potenciális áramlás, potenciális örvény

Amennyiben a rot $\underline{v}(\underline{r})$ az egész, egyszeresen összefüggő tartományban zérus, akkor létezik $\underline{v}(\underline{r})$ vektortérnek egy potenciál függvénye, $\varphi(\underline{r})$ amely egy skalár függvény a térben. Így sokkal egyszerűbben kezelhető, mint egy vektor függvény mivel egy pontban három változó helyett csak egy változót kell figyelemmel kísérni. A sebességi potenciál:

$$\varphi(\underline{r}) = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{v} \cdot d\underline{r} + \varphi(\underline{r}_0) \quad 11.23$$

Vagy mindkét oldal gradiensét képezve

$$\text{grad} \varphi(\underline{r}) = \underline{v}$$

Az erők esetében (**ld. 10. fejezet**) szokásos konvenció, hogy az erőtér potenciáljának negatív gradiense a térerősség vektor:

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\text{grad} U(\underline{r})$$

A sebességi potenciálnál a negatív előjel nem szükséges. Potenciális áramlásokat szokták még örvénymentes, forgásmentes áramlásoknak is nevezni. Magát a sebességi potenciált nem fogjuk használni, csupán a teljesség kedvéért említettük meg. Viszont örvénymentes áramlásokat fogunk vizsgálni, mindjárt a következő fejezet részben.

A potenciális örvény

A természetben sok helyen előfordul örvényes áramlás. Pl. a Föld légkörében kialakuló ciklonok (A **10.5 ábrán** több felhőörvényt láthatunk), vagy a fürdőkádból a lefolyón kiáramló víz is örvényt hoz létre. Az ilyen jellegű örvények sebességtere jól közelíthető az úgynevezett **potenciális örvény** sebességterével. A potenciális örvényben a folyadék részecskéi koncentrikus kör áramvonalak mentén mozognak. Egy körön a sebesség abszolút értéke nem változik, csak a sebesség iránya. A sebesség abszolút értéke a sugár függvényében csökken, mégpedig egy hiperbola szerint

$$v = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad 11.24$$

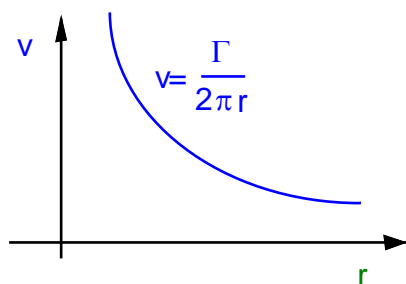
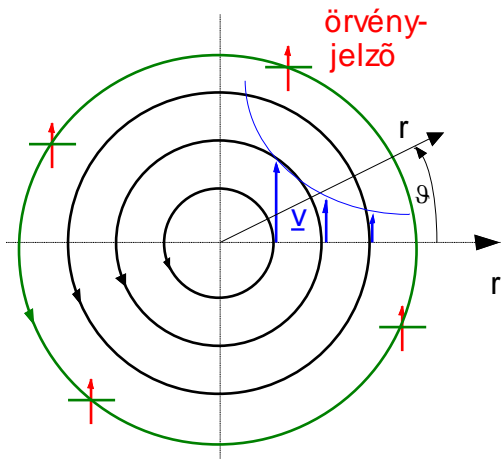
ahol $\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi}$ egy célszerűen választott állandó, "r" pedig a középponttól mért távolság.

Amennyiben a sebességteret szeretnénk leírni, célszerű egy henger-koordináta-rendszert választani, amely az "r, ϑ , z" koordinátákból áll. A " ϑ " irányban, amely a kerület irányába mutató szög koordináta, nincs változása a sebességtérnek, hengersizmetrikus az áramlás.

A "z" irányban (a rajz síkjára merőleges irány) szintén nem változik az áramlás, mert minden egyes "z-nél" ugyanazt az áramképet látjuk, síkáramlásról beszélünk ilyen esetben. A potenciális örvény sebességterét és az áramvonalakat a **11.12 ábra** mutatja.

Kísérlettel igazolható, hogy a potenciális örvénybe helyezett örvényjelző (ld. **11.12 ábra**) a saját tengelye körül nem végez forgást. Ez annyit jelent, hogy a szögsebesség és így a rotáció is zérus, mint azt a **11.9 ábrán** láttuk. Próbáljuk ezt belátni matematikai eszközökkel is. Ehhez célszerű a rotáció kifejezését henger-koordináta-rendszerben felírni:

$$\text{rot} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\vartheta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \end{bmatrix}.$$



Potenciális örvény
11.12 ábra

Tekintettel arra, hogy síkáramlás esetén $v_r \equiv v_z \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$, továbbá $v_\varphi = v$ a fenti képlet a

$$\text{rot} \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d(r \cdot v)}{dr} \end{bmatrix}$$

alakra egyszerűsödik, amelynek csak "z" irányú komponense van.

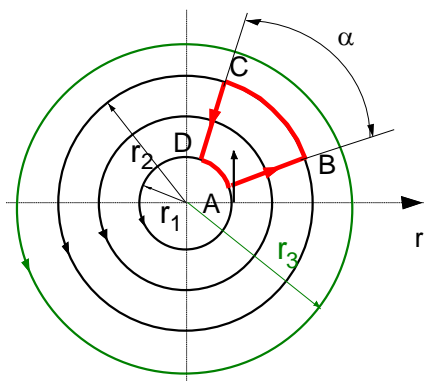
A szorzat deriválását elvégezve kapjuk, hogy:

$$(\text{rot} \underline{v})_z = \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \quad 11.25$$

A fenti képletből a sebesség megadott függvényének felhasználásával a rotáció értéke zérus, ha a sugár nem zérus (ott nincs értelmezve a kifejezés):

$$(\text{rot} \underline{v})_z = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r^2} - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r^2} = 0$$

Az örvényjelző, tehát azért nem forog a saját tengelye körül, mert az áramlás örvénymentes.



Cirkuláció a potenciális örvényben
11.13 ábra

Amennyiben az áramlás örvénymentes, akkor az egyszerűen összefüggő tartományban a zárt görbén vett integrálja a sebességtérnek, azaz a "Γ" zérus kell legyen a Stokes-tétel (11.22 egyenlet) szerint, hiszen a jobb oldalon egy azonosan nulla függvény integrálja áll, amely véges felületen nullát ad eredményül.

Számítsuk ki a cirkuláció értékét a 11.13 ábrán lévő "ABCD" sugarakból és körívekből álló görbén, hogy a sebesség érintő irányú és állandó egy kör mentén, valamint a sebesség merőleges a sugarakra:

$$\Gamma_{ABCD} = \oint_{ABCD} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{AB} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{BC} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{CD} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{DA} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0 + \frac{\alpha \cdot r_2 \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r_2} + 0 - \frac{\alpha \cdot r_1 \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r_1} = 0$$

Számítsuk ki a cirkulációt az "r₃" sugarú kör mentén is. Az "r₃" sugarú körön a sebesség abszolút értéke végig állandó, így a körön a cirkuláció nem zérus, értéke éppen a sebesség függvényben szereplő állandó értékével egyenlő. (Ezért szerepel a sebesség függvényben a Γ értéke.) A kör kerülete megszorozva az aktuális sebességgel, adja a cirkulációt:

$$\Gamma_O = 2 \cdot \pi \cdot r_3 \cdot \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r_3} = \Gamma$$

Vajon miért nem zérus a cirkuláció értéke a középpontot körbefogó körön, amikor a rotációra zérus értéket kaptunk?

A Stokes-tétel ugyanis egyszerűen összefüggő tartományra igaz. A mi esetünkben az origóban a sebességtér nem értelmezett, vagyis az értelmezési tartományon egy lyuk van, így nem egyszerűen összefüggő az értelmezési tartomány. Könnyen igazolható, hogy mindazokon a zárt görbéken, amelyek nem veszik körbe az origót, a cirkuláció zérus, és azokon a zárt görbéken, amelyek körbefogják az origót a cirkuláció értéke " Γ ". (Az elektromosságban a végtelen hosszú egyenes vezető által keltett mágneses tér teljesen hasonló természetű, mint a potenciálos örvény.)

11.5 A folyadékrészecske gyorsulása

Egy részecske gyorsulását a sebesség idő szerinti megváltozásából tudjuk meghatározni, a sebesség idő szerinti deriváltja a gyorsulás.

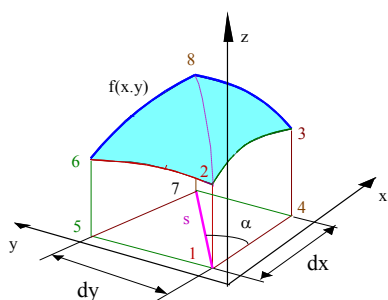
A folyadékrészecske gyorsulásának megértéséhez elsőként vizsgáljunk egy kétváltozós függvényt $f(x,y)$, amelynek független változói " x " és " y ", ennek grafikonja egy felületdarab az " x, y, z " koordináta-rendszerben.

Az "1265" sík merőleges az " xy " síkra, valamint párhuzamos az " y " tengellyel és a "26" vonalban metszi az $f(x,y)$ függvényt. A "1234" sík merőleges az " xy " síkra, valamint párhuzamos az " x " tengellyel és a "23" vonalban metszi az $f(x,y)$ függvényt.

Képezzük az $f(x,y)$ függvény teljes megváltozását, ami a következő:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy \quad 11.26$$

A " dx " és " dy " infinitézimálisan kis mennyiségek arányától függően a " df " a függvény megváltozását adja.



Iránymenti derivált
11.14 ábra

Amikor például $dy = 0$, akkor $df = f_3 - f_2$, ha pedig $dx = 0$, akkor $df = f_6 - f_2$.

Ha " dx " és " dy " között fennáll egy bizonyos arány, pl. az ábrán látható " s " egyenes mentén haladunk, akkor a két független változó között fennáll, hogy

$$dy = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot dx$$

Igy a függvény megváltozása:

$$df = f_8 - f_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot dx$$

Ebben az esetben lehet értelmezni az $f(x,y)$ függvény " s " irányba eső deriváltját is, amely az **iránymenti derivált**:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_s = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_s$$

$\alpha = 0^0$ értéknél az iránymenti derivált megegyezik az "x" irányú parciális deriválttal, $\alpha = 90^0$ nál az iránymenti derivált éppen az "y" szerinti parciális deriváltat adja, de ekkor az iránymenti derivált másik átrendezett alakját kell használni, ami a következő:

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_s = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Az Euler-féle leírási módban a sebességtér legáltalánosabb esetben és "x, y, z" koordináta-rendszerben a következő vektor-vektor függvény:

$$\underline{v}(t, \underline{r}) = v_x(t, x, y, z) \cdot \underline{i} + v_y(t, x, y, z) \cdot \underline{j} + v_z(t, x, y, z) \cdot \underline{k}$$

Négy független változótól függ a sebességvektor három komponense.

Az egyszerűbb tárgyalás érdekében csak egy sebesség komponensét vizsgáljunk pl. v_x -et. Írjuk fel a sebesség teljes megváltozását a 11.26 egyenlet analógiájára, csak itt már négy független változóra:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot dz \quad 11.27$$

A dt, dx, dy és dz független változók közötti kapcsolatot a folyadék részecske által befutott elemi úthossz adja meg, amelynek a koordináta tengelyek irányába eső vetületei rendre a következők:

$$dx = v_x \cdot dt, \quad dy = v_y \cdot dt, \quad dz = v_z \cdot dt$$

A fenti összefüggés felel meg a független változók közti kapcsolatnak, amelyet a részecske pályája, "s" jelöl ki. Behelyettesítve a 11.27 kifejezésbe és formálisan végigosztva "dt" idővel kapjuk az "s" irányú deriváltat

$$\left(\frac{dv_x}{dt}\right)_s = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z$$

Mivel a részecske jelöli ki a deriválás irányát **anyagi, szubsztanciális, vagy teljes deriválnak** is szokták nevezni a fenti kifejezést, és az indexet el szokták hagyni, tehát:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \quad 11.28$$

"y" és "z" irányokban hasonlóan írható fel a sebesség komponensek teljes megváltozása:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z \quad 11.29$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z \quad 11.30$$

Vezessük be a derivált tenzor fogalmát, amely három sebességvektor, három helykoordináta szerinti deriváltjait, tehát kilenc elemet tartalmazó háromszor hármás mátrix:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ezt felhasználva a 11.28, 11.29 és 11.30 egy vektor egyenletbe írhatók:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}\mathbf{v} \quad 11.31$$

A folyadék rész gyorsulása tehát két részből áll, a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ **lokális** gyorsulásból és a $\underline{\underline{D}}\mathbf{v}$ **konvektív** gyorsulásból. A lokális gyorsulás kifejezi, hogy a tér egy pontjában időben változik-e a sebesség, vagy sem. A konvektív gyorsulás megmutatja, hogy a tér egy pontjából kissé elmozdulva, mekkorát változik a folyadék sebessége.

A lokális gyorsulás csak instacioner áramlásban nem zérus. Vagyis stacioner áramlásban mindig nulla. A konvektív gyorsulás nincs kapcsolatban az áramlás időfüggésével, értéke stacionárius és instacionárius áramlás esetén egyaránt lehet zérustól eltérő. Konvektív gyorsulás akkor lép fel, ha a folyadék rész sebességének nagysága és iránya, vagy mindkettő a folyadék rész mozgásának irányában (azaz az áramlás irányában) változik. A lokális és konvektív gyorsulás jobb megértése érdekében nézzük a következő példát.

11.5.1 Gyorsulás konfúzorban



A **11.15 ábrán** vázolt "D₁" és "D₂" átmérőjű csővezetékét konfúzor köti össze. A csővezetékben az áramlás instacionárius, a folyadéksűrűség állandó. Egy-egy keresztmetszeten belül vizsgálva az áramlási sebesség a sugár mentén állandónak vehető.

Adatok: $L = 300\text{mm}; D_1 = 400\text{mm}; D_2 = 300\text{mm}; v_1(t) = 8t \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Kérdés:

Határozzuk meg a kijelölt "A" ponton áthaladó folyadék részecske gyorsulását a $t = 2\text{s}$ pillanatban!

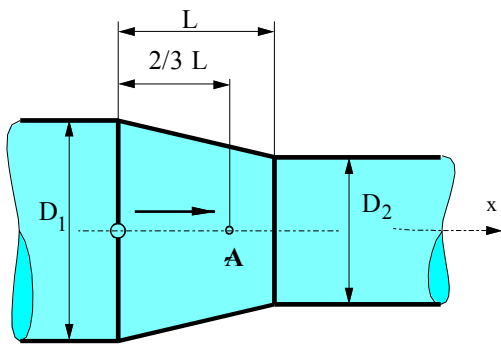
Megoldás:

Egy folyadék rész teljes vagy más néven szubsztanciális gyorsulása - Euler-féle leírási mód esetén - konvektív és lokális gyorsulási tagból tevődik össze:

$$\underline{a}_{\text{szubsz}} = \underline{a}_{\text{lok}} + \underline{a}_{\text{konv}}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}\mathbf{v}$$

A konvektív gyorsulást koordinátás alakban felírva



Gyorsulás konfúzorban
11.15 ábra

$$\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{D} \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

azt látjuk, hogy miután $v_y \equiv v_z \equiv 0$, továbbá

$\frac{\partial v_x}{\partial y} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial z} \equiv 0$, ezért a konvektív gyorsulás az "x" tengellyel párhuzamos, nagysága pedig:

$$a_{\text{konv}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x$$

A konfúzor szimmetriatengelyében a lokális gyorsulásnak szintén csak tengelyirányú összetevője van, amelynek nagysága:

$$a_{\text{lok}} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

A folyadék rész teljes gyorsulása:

$$a_{\text{szubsz}} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x$$

Az áramlási sebesség a "t" időnek és az "x" helykoordinátának függvénye $v_x(t, x)$. Tekintettel arra, hogy a folyadék sűrűsége állandó, a térfogatáram az 1-jelű keresztmetszetben megegyezik a konfúzor bármely más keresztmetszetén átáramló térfogatárammal, így a kontinuitási egyenlet a következő egyszerű alakban írható fel:

$$v_1(t) \frac{D_1^2 \pi}{4} = v_x(t, x) \cdot \frac{D(x)^2 \pi}{4} \quad 11.32$$

A fenti alakja, csövekben áramló, összenyomhatatlan közegek esetén, instacionárius áramlásra is érvényes (**ld. 11.4 egyenlet**), amelyből az áramlási sebességet kifejezve:

$$v_x(t, x) = v_1(t) \frac{D_1^2}{D(x)^2} = 8 \cdot t \cdot \frac{D_1^2}{D(x)^2} \quad 11.33$$

A fenti képletben szerepel az átmérő hely szerinti függése, amely kúpos konfúzor esetén lineáris függvény:

$$D(x) = D_1 + \frac{D_2 - D_1}{L} x \quad 11.34$$

A folyadék rész teljes gyorsulását a láncszabály alkalmazásával a következő alakban kapjuk:

$$a_{\text{szubsz}} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial D} \frac{dD}{dx} v_x \quad 11.35$$

A 11.35 egyenlet egyes részeit külön-külön felírva, majd konkretizálva az "A" pontra:

$$D(x) = D_1 + \frac{D_2 - D_1}{L} \cdot x = 0.4 + \frac{0.4 - 0.3}{0.3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0.3 \right) = \frac{1}{3} \text{m}$$

$$a_{\text{lok}} = 8 \cdot \frac{D_1^2}{D(x)^2} = 8 \cdot \frac{0.4^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 11.52 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial D} = 8 \cdot t \cdot (-2) \frac{D_1^2}{D(x)^3} = 8 \cdot 2 \cdot (-2) \frac{0.4^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = -138.24 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{D_2 - D_1}{L} = \frac{0.3 - 0.4}{0.3} = -\frac{1}{3}$$

$$v_x(t, x) = v_1(t) \frac{D_1^2}{D(x)^2} = 8 \cdot t \cdot \frac{D_1^2}{D(x)^2} = 8 \cdot 2 \cdot \frac{0.4^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 23.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A részeredményeket a 11.35 egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a rég várt eredményt:

$$a_{\text{szubs}} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial D} \cdot \frac{dD}{dx} \cdot v_x = 11.52 + (-138.24) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 23.04 = 11.52 + 1061 = 1073 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A példa után térjünk vissza a gyorsulás általános felírásához.

A folyadék részecske gyorsulását más alakban is fel lehet írni. Bontsuk két részre a folyadékrészecske konvektív gyorsulását

$$\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{D} \cdot \underline{v} = \underline{D}^* \cdot \underline{v} + (\underline{D} - \underline{D}^*) \cdot \underline{v}$$

Hozzá is adtunk és le is vontunk egy $\underline{D}^* \cdot \underline{v}$ tagot az egyenlethez. A \underline{D}^* a derivált tenzor transzponáltját jelöli.

Matematikai átalakításokkal belátható, hogy

$$\underline{D}^* \cdot \underline{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} \quad \text{és} \quad (\underline{D} - \underline{D}^*) \underline{v} = \text{rot} \underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \text{rot} \underline{v}$$

Ezeket felhasználva a teljes, vagy szubsztanciális gyorsulás a következővel egyenlő:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} \quad 11.36$$

A gyorsulásnak ezt az alakját, a következő fejezetben, az Euler- és a Bernoulli-egyenletek levezetésénél fogjuk alkalmazni.



12. Euler- és Bernoulli-egyenlet

12.1 Euler-egyenlet



A folyadékok dinamikája már nem csak a folyadékmozgás leírásával foglalkozik, hanem vizsgálja azt is, hogy milyen összefüggés van a mozgást létrehozó okok (erők) és a mozgás változása között. Az erők és a mozgásmennyiség megváltozásának kapcsolatát Newton II. (*Isaac Newton 1642-1727* igen jelentős angol természettudós) törvénye írja le:

$$\frac{d(m \cdot \underline{v})}{dt} = \sum \underline{F} \quad 12.1$$

Alkalmazható egy körülhatárolt, véges folyadékrészre. A körülhatárolt folyadék tömeg mozgásmennyiségének idő szerinti megváltozását és rá ható erőket írjuk az egyenletbe. A folyadékrészre általában két fajta erő hat: a tömegre ható térerő (pl. a súlyerő) és a folyadékrész felületén ható felületi erő (nyomásból származó erők, vagy súrlódóerők). Ha a közeg súrlódásmentes, a felületi erőnek nincsen felülettel párhuzamos komponense (a csúsztatófeszültség zérus), csak a felületre merőleges, nyomásból származó erők hatnak. Tekintsük a közeget súrlódásmentesnek.

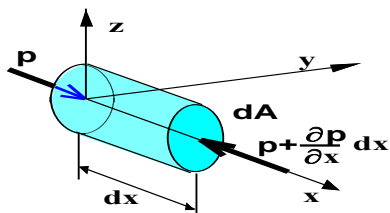
Vizsgáljuk a **12.1 ábrán** látható elemi henger alakú kiragadott folyadékelemet. A henger tengelye egybe esik az "x" tengellyel. A hátsó lapjára ható nyomóerő pozitív, ez első lapjára ható nyomóerő negatív. A két erő eredője negatív "x" irányába mutat és értéke:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dA$$

A térerő "x" irányú összetevője g_x , így a térfogati erők "x" irányban a

$$g_x \cdot dx \cdot dA$$

erőt szolgáltatják.



Több erő hatását nem is vesszük figyelembe, ill. elhanyagolhatónak tételezzük fel az előző két erő mellett. Az eredő okozza a hengerben lévő folyadék impulzusának megváltozását, most már felírható a mozgásegyenlet "x" irányban:

Folyadékrészre ható erők
12.1 ábra

$$\rho \cdot dx \cdot dA \cdot \frac{dv_x}{dt} = \rho \cdot g_x \cdot dx \cdot dA - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dA$$

Osztván a henger térfogatával és a sűrűséggel, a következőt kapjuk:

$$\frac{dv_x}{dt} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad 12.2$$

Az "y" és "z" irányokban teljesen hasonló módon levezethető az összefüggés, amely

$$\frac{dv_y}{dt} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad 12.3$$

$$\frac{dv_z}{dt} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad 12.4$$

A három egyenletet összevonva egy vektoregyenletté

$$\frac{dv_x}{dt} \cdot \underline{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \underline{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \underline{k} = g_x \cdot \underline{i} + g_y \cdot \underline{j} + g_z \cdot \underline{k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \underline{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \underline{j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \underline{k}$$

kapjuk, vagy más írásmódban:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}p \quad 12.5$$

A folyadékmozgás leírására szolgáló egyenletet, megalkotójáról **Euler-egyenlet**nek nevezzük.

A 4.28, 4.29, 4.30 egyenletek figyelembe vételével felírhatjuk a totális gyorsulásokat. Behelyettesítés után az Euler-egyenlet "x, y és z" irányú komponens-egyenletei a következők:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad 12.6$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Az előző fejezet végén a lokális és konvektív gyorsulás átalakítását felhasználva, a bal oldal átalakítását itt is megtehetjük a 11.36 egyenlet felhasználásával:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}p \quad 12.7$$

Az **Euler-egyenlet** ebben a formájában sűrűdásmentes közegre használható, a sűrűség állandósága nem követelmény, tehát összenyomható közeg mozgásának leírására is alkalmas. A **19. gázdinamika fejezetben** fogjuk alkalmazni változó sűrűségű közegre.

Az Euler-egyenlet differenciálegyenlet, amelyet a kontinuitással együtt (11.6 egyenlet) adott perem- és kezdeti feltételek mellett meg lehet oldani. A megoldás azonban nagyon bonyolult matematikai módszereket igényel. Analitikus megoldása csak kivételes, egyszerű esetekben lehetséges. Numerikus megoldása a számítógépek kapacitásának növekedésével egyre több feladatra már lehetséges. A továbbiakban egyszerű feladatokban használjuk az Euler-egyenletet.

12.2 Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben

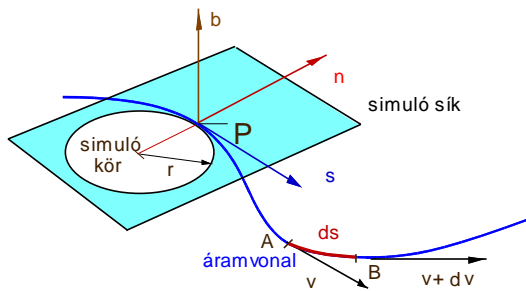
Vizsgáljunk sűrűdásmentes, stacioner áramlást. Amennyiben az áramlás stacioner, az áramvonal, pálya és a nyomvonal egybeesnek. Így a **12.2 ábrán** látható áramvonal egyben a részecske pályája is.

A természetes koordináta-rendszert többféle módon lehet elképzelni. Az első szemlélet szerint a pályához rögzítettek a tengelyek, ebben az esetben a részecske mozog a koordináta-rendszerben.

De vehetünk egy olyan koordináta-rendszert is, amely hozzá van kötve egy folyadék-részecskéhez és azzal együtt mozog a pálya mentén, ez esetben a D'Alembert-féle elvet alkalmazzuk. [**Jean Le Ronald D'Alembert (1717-1783)** francia tudós.]

A pálya érintője, mivel ez egyben áramvonal is a részecske sebességével egy irányba mutat. Vizsgáljuk a pálya egy adott pontját, P-t. A pálya általában térgörbe, amelyhez meg tudjuk rajzolni a simuló síkot és abban a síkban a pályát másodrendben érintő simulókört. A simulókör sugarának meghosszabbítása a "P" ponton keresztül kijelöli a kísérő koordináta-

rendszer "n" tengelyét, amelyet normális iránynak neveznek. A pálya érintője a sebesség irányában kijelöli az érintő irányú koordinátát, "s"-t. A simulósíkra merőleges és az "s" és "n" tengelyekkel jobb rendszert alkot a binormális irány, "b".



Természetes koordináta-rendszer
12.2 ábra

Az egyik lehetőség hidrosztatikai feladatként megközelíteni a problémát, a **10.6 fejezetben** az egyenletesen gyorsuló és a **10.7 fejezetben** a forgó rendszerben megismert elveket alkalmazva (D'Alembert-elv felhasználásával).

Az egyenletesen gyorsuló és a forgó rendszerben a folyadék relatív nyugalomban van, viszont a koordináta-rendszer gyorsulása miatt, a gyorsulásokkal azonos nagyságú, de ellentétes értelmű inercia erőtereket kell a relatív

egyensúlyhoz figyelembe venni.

A folyadékrészecskével együtt mozgó koordináta-rendszer a pálya mentén gyorsul, egyrészt a pálya érintője irányába a sebesség abszolút értéke változik, másrészt a pálya íve mentén a sebesség iránya változik. Ez utóbbit lehet egy körmozgással helyettesíteni, a körpálya adatait a simulókör adja. A binormális irányban nincs görbülete a pályának, így abban az irányban nincs gyorsulás.

Vizsgáljuk meg a koordináta-rendszer gyorsulásait az "s" és az "n" irányokban.

Az érintő irányában csak a sebesség abszolút értékének változását kell vizsgálni.

Az áramvonal "A" és "B" pontja között a "v" sebességről "v+dv"-re változik a "ds" úthosszon.

Az úthossz megtételéhez szükséges idő:

$$dt = \frac{ds}{v} ,$$

a gyorsulás pedig

$$a_s = \frac{v + dv - v}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Az "a_s" a pálya érintője irányába mutat.

A normális irányban a koordináta-rendszer körpályán mozog egy pillanatig, amelynek kerületi sebessége "v" és a pálya sugara "r". A körpályán tartáshoz szükséges centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = -\frac{v^2}{r}$$

A mínusz előjel azért szükséges, mert a felvett koordináta iránnyal ellentétes a gyorsulás.

Térjünk vissza a részecskéhez, amely a gyorsuló koordináta-rendszerhez képest áll, viszont fellépnek az imént kiszámított gyorsulásokkal azonos nagyságú, de ellentétes értelmű inercia erők, pontosabban erőterek.

A részecske egyensúlyát megadhatjuk a természetes koordináta-rendszerben, mint egy hidrosztatikai feladatban. Alkalmazzuk a **10.4 egyenletet**, amely a következő:

$$\text{grad } p = \rho \cdot \underline{g}$$

Osszuk végig az egyenletet a sűrűséggel és rendezzük nullára, ekkor kapjuk, hogy

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \underline{g}$$

A nyomás-gradiens vektor az "s, n és b" koordináta-rendszerben:, amelyben jelöljük az egységvektorokat rendre e_s , e_n és e_b -vel, a következő:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot e_s + \frac{\partial p}{\partial n} \cdot e_n + \frac{\partial p}{\partial b} \cdot e_b$$

A térerő-vektor két részből tevődik össze. Az egyik rész a ténylegesen működő erők eredője, jelöljük ennek komponenseit rendre g_s , g_n és g_b -vel, pl. ez lehet a nehézségi erőtér. A másik a komponens az inercia erőkből fakadó rész, az előbb levezetett a_s és a_{cp} -vel azonos nagyságú, de ellentétes értelmű inercia erőtér, az "s" és az "n" irányokban. Mindezeket felhasználva felírhatjuk a folyadékrezecske egyensúlyát a vele együtt mozgó természetes koordináta-rendszer három irányában. Ez a következő:

$$\text{Érintő irány} \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g_s - v \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$\text{Normális irány} \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g_n + \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Binormális irány} \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} + g_b$$

A fenti levezetés abból a feltevésből indult ki, hogy a koordináta-rendszer mozog és a részecske a rendszerhez képest nyugalomban van. A nullára rendezett alak azt fejezi ki, hogy a részecske gyorsulása mindhárom irányban zérus.

Amennyiben áttérünk egy álló koordináta-rendszerre, mely az adott pontban egybeesik az előbb tárgyalt mozgóval, akkor a részecske gyorsul a rendszerhez képest, így az inercia erők helyett gyorsulások szerepelnek az egyenletekben. Ez a koordináta-transzformáció a fenti egyenletek átrendezését jelenti a szokásos alakjukra, amikor a gyorsulások a bal oldalon szerepelnek, így az **Euler-egyenlet a természetes koordináta-rendszerben** a következő:

$$\text{Érintő} \quad v \cdot \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \quad 12.8$$

$$\text{Normális} \quad \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} - g_n \quad 12.9$$

$$\text{Binormális} \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} + g_b \quad 12.10$$

A térerősség sokszor elhanyagolható a nyomásból származó erő mellett. Ilyen esetben az áramképből a nyomásmegoszlásra, vagy a nyomásmegoszlásból az áramképre következtethetünk. Igen jól lehet alkalmazni a természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet normális irányú komponensét a nyomásváltozás megítélésére. A térerő elhagyása után az 12.9 egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad 12.11$$

Az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés minden esetben egy nem negatív szám, ezért a jobb oldalon is pozitív, vagy zérus értékűnek kell lennie. A görbületi középponttól kifelé haladva a nyomásnak mindig nőnie kell, ha pedig az áramvonalak párhuzamos egyenesek (nincs

görbületük), akkor a rájuk merőleges irányban, az áramlásban a nyomás nem változik, pl. kialakult csőáramlásban, vagy fal melletti párhuzamos áramlásban.

Egy szemléletes példát mutat be Lajos Tamás "Az Áramlástan Alapjai" című munkájában [11]:



Görbült áramvonalak személyautó körül
12.3 ábra

A **12.3 ábrán** látható személyautó karosszériáján kialakuló nyomásmegoszlás jellegét a fenti megfontolásokkal meg lehet határozni. A "+" és "-" jelek a zavartalan áramláshoz tartozó nyomáshoz képesti túlnyomást, ill. depressziót (külsőhöz képest kisebb nyomást) jelölik. Például motorháztető és a szélvédő találkozásánál az áramvonalak görbületéből láthatóan túlnyomás lép fel, ezért itt vezetnek be a szellőző levegőt.

Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben felírt normális irányú komponense igen jól használható síkáramlásban kör

áramvonalak (örvények) esetében. Nézzük erre vonatkozóan a következő feladatot.

12.2.1 Szilárd testként forgó folyadék



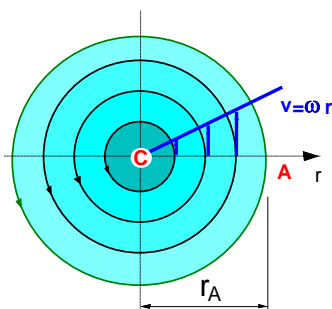
Az **12.4 ábrán** látható kör áramvonalakkal jellemezhető síkáramlás sebességtere a $|\underline{v}| = \omega \cdot r$ függvénnyel írható le. A víz úgy forog, mint egy szilárd test. A **10.7 fejezetben** tárgyalt forgó edény (ld. **2.15 ábra**) egy vízszintes metszete látható az **12.4 ábrán**.

A mostani feladatban egy álló koordináta-rendszerből vizsgáljuk a jelenséget, nem pedig statikai feladatként tárgyaljuk.

Adatok: $r_A = 100 \text{ mm}$; $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\omega = 20 \frac{1}{\text{s}}$

Kérdések:

- a./ Mekkora a nyomáskülönbség a "A" és az "C" pontok között? Használjuk fel a feladatot a rotáció és a cirkuláció átismétlésére is.
- b./ Számítsuk ki az "A" pontban $\text{rot } \underline{v}$ értékét!
- c./ Számítsuk ki az " r_A " sugarú körön a cirkuláció értékét!



Szilárd testként forgó folyadék
12.4 ábra

Megoldás:

a./ Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben felírt, normális irányú komponenséből, *12.11 egyenletből* számolva a nyomásváltozás

$$\frac{dp}{dr} = \rho \cdot \frac{v^2}{r} = \rho \cdot \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \rho \cdot 400 \cdot r$$

A nyomáskülönbséget az "A" és a "C" pontok között ennek integrálásával kapjuk:

$$p_A - p_C = \int_0^{0.1} \frac{dp}{dr} \cdot dr = \int_0^{0.1} 400 \cdot \rho \cdot r \cdot dr = 400 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{0.1} = 400 \cdot 10^3 \cdot \frac{0.1^2}{2} = 2000 \text{ Pa}.$$

A **10.7 fejezetben** pontosan ugyanezt az eredményt számítottuk ki:

$$p_A - p_C = p_A - p_0 - (p_C - p_0) = 4060 - 2060 = 2000 \text{ Pa}$$

b./ A rotáció kiszámításához a *11.25 egyenletet* használjuk, ami a rotáció kiszámítását adja kör áramvonalak esetén

$$(\text{rot } \underline{v})_z = \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} = \frac{20 \cdot r}{r} + 20 = 40 \frac{1}{s}$$

A rotáció nem függ a helytől értéke, tehát az adott "A" helyen is $40 \frac{1}{s}$, ami éppen a statikai feladatban adott " ω "-nak a kétszerese, mint azt az előző fejezetben láttuk.

c./ Egy kör mentén a sebesség állandó, így a cirkulációt a *11.20 egyenlet* felhasználásával könnyen fel tudjuk írni, mert a kör területét egyszerűen meg kell csak szorozni a rajta érvényes sebességgel:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = 2 \cdot \pi \cdot r_A \cdot v_A = 2 \cdot \pi \cdot r_A \cdot 20 \cdot r_A = 2 \cdot \pi \cdot 0.1 \cdot 20 \cdot 0.1 = 1.25 \frac{\text{m}^2}{s}$$

Figyeljünk fel arra, hogy bármilyen sebességmegoszlás esetén a középpontból kifelé haladva nő a nyomás, mivel a $\rho \cdot \frac{v^2}{r}$ kifejezés mindig pozitív. Az örvény középpontjában van a nyomás minimuma.

12.3 A Bernoulli-egyenlet

Az előző feladatban az Euler-egyenletből számítottuk ki a nyomáskülönbséget két adott pont között. Az Euler-egyenletet általános esetben is lehet integrálni a folyadéktér két adott pontja között egy vonal mentén, a sebességfüggvény konkrét ismerete nélkül is. Néhány egyszerűsítő feltétel mellett a megoldása meglepően egyszerű összefüggésre vezet.

Induljunk ki az Euler-egyenlet *12.7 alakjából*

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p$$

Képezzük az áramlási tér két, a térben rögzített pontja között az egyenlet vonalintegrálját. (A hidrosztatika alapegyenletének levezetésénél, **10.1.1 fejezetben** már megkaptuk a vonalintegrált az egyenlet jobb oldalán lévő két tagra, állandó sűrűség és potenciális erőterek esetén, amelynek eredménye a *2.7 egyenlet*.)



$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \cdot d\underline{s} + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\underline{s} - \int_1^2 \underline{v} \times \text{rot } \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g} \cdot d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\underline{s} \quad 12.12$$

I. II. III. IV. V.

A fenti egyenletet, megalkotójáról, Bernoulli-egyenletnek nevezzük. **(Daniel Bernoulli 1700-1782 svájci tudós)**

(A történelmi hitelességhez hozzátartozik, hogy Bernoulli az Euler-

egyenlet megszületése előtt írta fel a róla elnevezett egyenletet, és nem az *12.12 alakját*, hanem az *12.13 alakját*, mégpedig energetikai megfontolások alapján.)

Vizsgáljuk meg, hogy a legáltalánosabb Bernoulli-egyenlet, milyen feltételek teljesülése esetén hozható egyszerűbb alakra!

1./ **A térerősség vektor rendelkezzen potenciálfüggvénnyel**, tehát:

$$\underline{g} = -\text{grad } U$$

Matematikából tudjuk, hogy az gradiens képzés és a vonal menti integrálás inverz műveletek, így a **IV. tagot** a következő egyszerű alakra hozhatjuk:

$$-\int_1^2 \text{grad } U \cdot d\underline{s} = -[U]_1^2$$

2./ **Legyen a közeg sűrűsége állandó.**

Ebben az esetben az **V. tagban** a sűrűség bevezethető a gradiens jel mögé, mivel állandó, és a potenciál függvényhez hasonlóan egyszerűsíthető:

$$-\int_1^2 \text{grad} \frac{p}{\rho} \cdot d\underline{s} = -\left[\frac{p}{\rho}\right]_1^2$$

a **II. jelű tag** minden további nélkül az előbbieket szerint egyszerűsíthető.

$$\int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\underline{s} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2$$

3./ A **III. tag** $-\int_1^2 \underline{v} \text{rot} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0$ **zérus**, a következőkben felsoroltak valamelyike miatt:

- a \underline{v} sebesség zérus, ez a hidrosztatika esete;
- a $\text{rot} \underline{v} = 0$, azaz az áramlás potenciális;
- a $d\underline{s}$ a \underline{v} és $\text{rot} \underline{v}$ vektorok egy síkba esnek, a három vektor biztosan egy síkba esik, ha kettő közülük párhuzamos, így a következő esetekben
- a $d\underline{s} \parallel \underline{v}$, azaz áramvonalon integrálunk;
- a $d\underline{s} \parallel \text{rot} \underline{v}$, azaz örvényvonalon integrálunk;
- az örvényvonal örvényvektorok burkoló görbéje, hasonlóan mint az áramvonal: a sebességvektorok burkoló görbéje;
- $\underline{v} \parallel \text{rot} \underline{v}$, ezt Beltrami-áramlásnak hívják.

4./ **Az áramlás stacionárius**, ebben az esetben az **I. tagja** zérus, $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$.

Ezeket az egyszerűsítéseket betéve a *12.12 egyenletbe* a következőt kapjuk:

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = -\left[\frac{p}{\rho}\right]_1^2 - [U]_1^2$$

Az azonos indexű mennyiségeket egy oldalra rendezve, előttünk áll a **Bernoulli-egyenlet szokásos alakja**:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2 \quad 12.13$$

Az alkalmazhatóságának feltételei összefoglalva a következők:

- az áramlás stacionárius,
- a rotációs tag zérus,
- örvénymentes az áramlás, vagy áramvonalon integrálunk, stb.
- az erőtér potenciális (legtöbbször a Föld nehézségi erőtere hat)
- a sűrűség állandó,
- és természetesen a súrlódás elhanyagolható.

A Bernoulli-egyenlet alkalmazásait egy külön fejezetben, a **13. fejezetben** tárgyaljuk.



13. A Bernoulli-egyenlet alkalmazásai

A Bernoulli-egyenlet alkalmazásakor a következő szempontokat célszerű betartani:

1./ Elsőként el kell dönteni, hogy az alkalmazás feltételei megvannak-e. A feltételek összefoglalását megismételjük:

- az áramlás stacionárius,
- a rotációs tag zérus, örvénymentes az áramlás, vagy áramvonalon integrálunk, stb.,
- az erőtér potenciálos (legtöbbször a Föld nehézségi erőtere hat),
- a sűrűség állandó és a sűrűség elhanyagolható.

2./ A következő lépésben alkalmas koordináta-rendszert kell választani, amelyben egyrészt az áramlás jól leírható, pl. az áramlás stacionárius, másrészt az erőtér potenciálja egyszerűen felírható

3./ A folyadéktérben alkalmas pontokat kell választani, legalább kettőt, de bizonyos esetekben, pl. ha többfajta folyadék található a rendszerben, akkor kettőnél több pontot. A pontok kiválasztásánál a következőket célszerű szem előtt tartani: Az **egyik pontban** lehetőleg minden mennyiséget ismerjünk, **a másik pontban** pedig csak egy ismeretlen, a keresett mennyiség legyen. A célszerű pontok: szabad felszínen, nagy térben, kiömlő sugárban, két folyadék határfelületén stb. De a kontinuitás tétel használatakor lehet két ismeretlen is.

4. Az erőtér potenciál felírása után alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlet megfelelő alakját.

13.1 Örvény a vízfelszínen



Az előző fejezetben a potenciálos örvény sebességterét vizsgáltuk. A sebesség a középponttól mért távolsággal fordítottan arányos. Ez annyit jelentene, hogy a nagyon kis sugarakon a sebesség nagyon nagy értékeket venne fel. A valóságos örvények középpontjában kialakul egy mag, amely szilárd testként forog.

Az **13.1 ábrán** egy vízfelszínen kialakult örvény hosszmetsetét és felülnézetét

látjuk. A szilárd testként forgó magban a szögsebesség $\omega = 2.55 \frac{1}{s} = \text{állandó}$; $r_m = 0.5\text{m}$.

A forgatagban a sebességváltozás a potenciálos örvény sebességterének felel meg, tehát

$$v = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Kérdések:

a./ Adjuk meg a vízfelszín alakját leíró függvényt!

b./ Mekkora a cirkuláció a magot körülzáró körön?

c./ Számítsuk ki a középpont lesüllyedését!

d./ Mutassuk ki, hogy a mag és a forgatag határán nincs törése a vízfelszínnek!

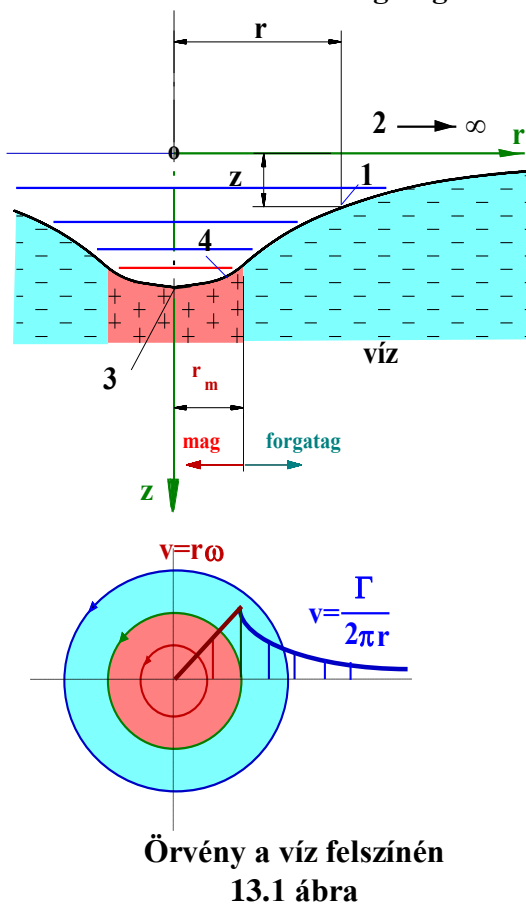
Megoldás:

a./ A magban a $v = \omega \cdot r$, a forgatag részében a $v = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}$ függvény írja le a sebesség abszolút értékének változását a sugár függvényében. Az áramvonalak mindenütt koncentrikus

körök, amelyek a "z" tengelyre merőleges síkokban fekszenek. A rotáció értékét az ilyen típusú (hengerszimmetrikus, kör áramvonalak és a sebesség abszolút értéke csak az "r" koordináta függvénye) áramlásoknál a $(\text{rot } \underline{v})_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}$

kifejezéssel számolhatjuk ki. Alkalmazva a mag és a forgatag sebesség függvényére, a magban $(\text{rot } \underline{v})_z = 2 \cdot \omega$, a **forгатagban** pedig $(\text{rot } \underline{v})_z = 0$ adódik, mint azt az előző fejezetekben láttuk. A forgatagban **álló koordináta-rendszerben** minden további nélkül alkalmazhatjuk a Bernoulli-egyenletet, mert az áramlás örvénymentes, a magban azonban nem tudjuk azt alkalmazni. A **magban**, mint egy hidrosztatikai feladatnál, **együttforgó koordináta-rendszerben** határozhatjuk meg a felszín alakját.

a/1 Alkalmazzuk a forgatagban álló koordináta-rendszerben az "1" és "2" pontok



között a Bernoulli-egyenletet. A "2" pont a "z=0" helyen, de a végtelen sugarú pontban van, ahol a sebesség zérus. A "1" pont "r" és "z" koordinátákkal jellemzett futó pont a forgatagban.

Az erőter potenciál függvényének felírásakor figyelembe kell venni, hogy a "z" tengely lefelé mutat, de a potenciálnak felfelé kell nőnie. Így a potenciálfüggvény az álló koordináta-rendszerben

$$U = -g \cdot z$$

A tévedések elkerülése végett írjuk fel a Bernoulli-egyenlet teljes alakját, 5.13 egyenletet

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

Mindkét pontunk a vízfelszínen található, ahol a nyomás a környezeti p_0 nyomás.

A sebességet a $v = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}$ függvény írja le mind a két pontban. A "2" pontban az "r" végtelen nagy tehát a sebesség zérus.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 + \frac{p_0}{\rho} - g \cdot z = \frac{0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + 0$$

Átrendezve és kifejezve a felszín lesüllyedését "z"-t:

$$z = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 \cdot g \cdot r^2} \text{ ha } r \geq r_m \quad 13.1$$

a/2 A magban együttforgó koordináta-rendszerben alkalmazzuk a Bernoulli-egyenletet a legmélyebb pont, "3" és egy $r < r_m$ "4" futó pont között.

Az együtt forgó rendszerben, a forgó tér potenciálját is fel kell írunk a **10.5 fejezetben** leírtak szerint a potenciálfüggvény

$$U = -g \cdot z - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2}$$

A folyadék sebessége mindenütt zérus a magban, ha együtt forgunk a folyadékkal. A Bernoulli-egyenlet leegyszerűsödik a statika alapegyenletére:

$$\frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + U_2.$$

Behelyettesítve a következőt kapjuk: (z_0 a felszín legmélyebb pontja)

$$-z_0 \cdot g = -z \cdot g - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2},$$

melyből kifejezve z -t (a jobb oldal második tagja nem sebességből, hanem a forgótér potenciáljából adódó tag)

$$z = z_0 - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2g} \text{ ahol } r \leq r_m \quad 13.2$$

A fenti 13.1 és 13.2 összefüggések együttesen írják le a felszín alakját. Tekintettel arra, hogy a " z_0 " és az " Γ " ismeretlenek, ezeket további két kifejezésből kapjuk:

Az első 13.3 azt fejezi ki, hogy a mag és a forgatag határán a sebesség azonos, tehát:

$$r_m \cdot \omega = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r_m}$$

A második összefüggés pedig, hogy a mag és a forgatag határán a " z " lesüllyedés azonos a 13.1 és a 13.2 képletekből számolva, vagyis:

$$\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 \cdot g \cdot r_m^2} = z_0 - \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g}. \quad 13.3$$

Rendezve az egyenleteket " z_0 "-ra és " Γ "-ra, majd beírva azok értékeit az 13.1 és 13.2 összefüggésekbe, a következő függvényt kapjuk a felszín leírására:

$$z = \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} \left[2 - \left(\frac{r}{r_m} \right)^2 \right] \text{ ha } r \leq r_m \text{ vagy } z = \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} \left(\frac{r_m}{r} \right)^2 \text{ ha } r \geq r_m \quad 13.4$$

b./ A mag körüli cirkuláció kiszámításához a 13.3 összefüggést felhasználva könnyen kifejezhetjük Γ -t.

$$\Gamma = 2\pi \cdot r_m^2 \cdot \omega = 2\pi \cdot 0.5^2 \cdot 2.55 = 4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

c./ A felszín leíró egyenletből látható, hogy az örvény középpontjának lesüllyedése z_0 a következő:

$$z_0 = \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{g} = \frac{0.5^2 \cdot 2.55^2}{9.81} = 0.165\text{m}$$

d./ A két felszín törésmentes csatlakozását az r_m helyen a függvények r szerinti derivált függvényei helyettesítési értékeinek azonosságával lehet igazolni. Deriváljuk a 13.4 függvényeket, ekkor

$$\frac{dz}{dr} = -2 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot r \text{ ha } r \leq r_m \text{ vagy } \frac{dz}{dr} = -2 \cdot \frac{r_m^4 \cdot \omega^2}{2 \cdot r^3} \text{ ha } r \geq r_m$$

Látható, hogy $r = r_m$ helyen a két érték azonos, tehát törésmentesen csatlakozik a mag vízfelszíne a forgatagéhoz

13.2 Forgószél

Amennyiben az örvény légnemű közegben alakul ki, pl. forgószél, tornádó, vagy ciklon formájában, akkor a nyomás változását adják meg teljesen hasonló módon a fenti függvények.

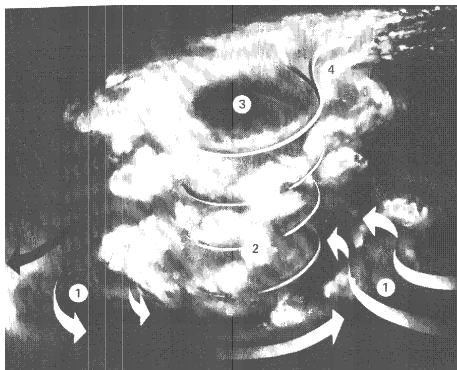
A nyomás függvényt a $z = \frac{p - p_0}{\rho \cdot g}$ helyettesítéssel kapjuk meg, így a nyomás a forgó

$$\text{légörvényben. } p = p_0 - \rho \cdot \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{2} \left[2 - \left(\frac{r}{r_m} \right)^2 \right] \text{ ha } r \leq r_m \quad \text{vagy } p = p_0 - \rho \cdot \frac{r_m^2 \cdot \omega^2}{2} \left(\frac{r}{r_m} \right)^2 \text{ ha } r \geq r_m$$

Látható, hogy minden "r" értéknél depresszió adódik a légörvény belsejében és a legkisebb nyomás a középpontban keletkezik.

A **13.2 ábra** egy hurrikánban zajló légmozgást szemlélteti. (A valóságban az ilyen légörvények több száz kilométer átmérőjűek.) A felszín közeli páradús levegő (1) minden irányból a hurrikán középpontja felé áramlik, majd a forgószél "szeme" (3) körül nagy sebességgel felfelé áramlik és itt már igen nagy a depresszió.

A fől szálló levegő nagy magasságban lép ki a légörvényből.



Hurrikánban lezajló áramlás

Forrás: Természet ABC-je, Reader's Digest

13.2 ábra

A hurrikán szemében (3), amely átlagban 20 km, a levegő sebessége kicsi, szinte áll a környező nagy sebességű zónához képest, ez felel meg az örvény magjának. A (2) zóna a mag és a forgatag határa, itt a legnagyobb a szélsősebesség 200-300 km/óra.

Természetesen a hurrikánban jelentős felfelé áramlás is fellép, így csak közelítőleg azonos a sebességtér az örvénnyel.

A Bernoulli-egyenlet további, fontos alkalmazása.

13.3 Kiömlés tartályból



A tartály keresztmetszete a kifolyó nyíláshoz képest végtelen nagyra vehető, így a felszín süllyedési sebessége elhanyagolható. A vizsgálat ideje alatt a jelenség stacionáriusnak tekinthető.

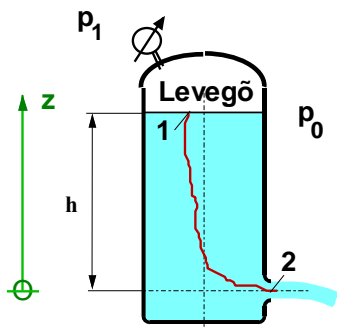
Adatok: $p_1 = 3\text{bar (absz.)}$; $p_0 = 1\text{bar}$; $h = 5\text{m}$

Kérdések:

- Mekkora a kifolyás sebessége, ha $p_1 = 3\text{bar (absz.)}$?
- Mekkora a kifolyás sebessége, ha $p_1 = p_0$, vagyis nyitott a tartály?

Megoldás:

Az áramlás nyugvó térből indul és gyakorlatilag veszteségmentesen áramlik a kifolyónyílásig. Az "1" pont a nyugalomban lévő folyadék felszínén helyezkedik el, a "2" pont a kifolyás helyén. A kifolyó sugárban a környezeti nyomás uralkodik. A potenciál számítása szempontjából célszerű a "2" pont magasságában megválasztanunk a koordináta-rendszer kezdő pontját és egy felfelé mutató "z" tengelyt felvenni. Ekkor az erőter potenciálja



Kiömlés tartályból
13.3 ábra

$$U = g \cdot z$$

Alkalmazva a Bernoulli-egyenletet:

$$\frac{0^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot h = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + 0$$

Ebből kifejezhetjük a keresett sebességet:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} \right)} \quad 13.5$$

a./ Behelyettesítve az értékeket:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \left(5 + \frac{3 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9.81} \right)} = 22.31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b./ Amikor a tartályban a túlnyomást megszüntetjük, akkor a kifolyás sebessége a

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

kifejezésből számítható. A kifejezést Torricelli-formulának is szokták nevezni felfedezőjéről, **Torricelliről**.

A kifolyási sebesség ebben az esetben éppen akkora, mintha a folyadék "h" magasságból szabadon esett volna. Helyzeti energiája teljes mértékben mozgási energiává alakul.

13.4 Szivornya

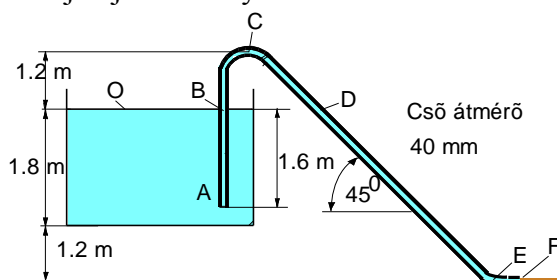


A 13.4 ábra egy szivornyát mutat, amellyel egy medencéből a vizet kiszívják. A medence felszíne sokkal nagyobb a cső keresztmetszeténél. A geometriai adatok az ábrán láthatók. Az áramlási veszteségek a csőben elhanyagolhatók.

Kérdések:

a./ Mekkora a kifolyás sebessége?

b./ Rajzoljuk fel a nyomás változását a cső hossza mentén!



Szivornya
13.4 ábra

Megoldás:

A kifolyó, állandósult sebességét az "O" és az "F" pontok között felírt Bernoulli-egyenletből határozhatjuk meg.

a./ Mivel mindkét pontban légköri nyomás uralkodik, így a sebességet a Torricelli-formulával számíthatjuk ki.

$$v_F = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot (1.2 + 1.8)} = 7.672 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b./ Az ábrába berajzolt pontokban a Bernoulli-egyenlet felhasználásával számíthatjuk ki a nyomásokat. Alkalmazzuk sorra a megadott pontokban.

A potenciál függvény megadásához megint csak felfelé mutató "z" koordinátát célszerű felvenni, az origót pedig a víz felszínén választhatjuk meg.

Mindjárt az "A" pontban probléma adódik, csőbe történő beáramlás helyén bonyolult térbeli áramlás alakul ki a nyomás és a sebesség nagyon rövid szakaszon igen gyorsan változik, ezért csőbe történő beáramlásnál kerülni kell pont kijelölését a Bernoulli-egyenlet alkalmazásához. A problémát úgy tudjuk megoldani, hogy két pontot veszünk fel, egyet közvetlen a cső szája előtt "A₁" és egyet a csőben a belépés után "A₂". A két pont távolsága az ábrán elhanyagolhatóan kicsi, viszont az "A₁" pontban a közegnek még nincs sebessége, az "A₂" pontban pedig már a csőben érvényes sebesség lép fel.

O-A₁ pontok között:

$$p_{A_1} - p_0 = \rho \cdot g \cdot 1.6 = 1000 \cdot 9.81 \cdot 1.6 = 15.69 \text{kPa}$$

O-A₂ pontok között:

$$p_{A_2} - p_0 = \rho \cdot g \cdot 1.6 - \frac{\rho}{2} \cdot v_E^2 = 1000 \cdot 9.81 \cdot 1.6 - \frac{1000}{2} \cdot 7.672^2 = -13.73 \text{kPa}$$

O-B pontok között. A két pont azonos magasságban van, nyomáskülönbséget csak a sebességkülönbség okoz

$$p_B - p_0 = -\frac{\rho}{2} \cdot v_E^2 = -\frac{1000}{2} \cdot 7.672^2 = -29.43 \text{kPa}$$

O-C pontok között:

$$p_C - p_0 = -\rho \cdot g \cdot 1.2 - \frac{\rho}{2} \cdot v_E^2 = -1000 \cdot 9.81 \cdot 1.2 - \frac{1000}{2} \cdot 7.672^2 = -41.2 \text{kPa}$$

A "D" pontban ugyanakkora a nyomás, mint a "B" pontban

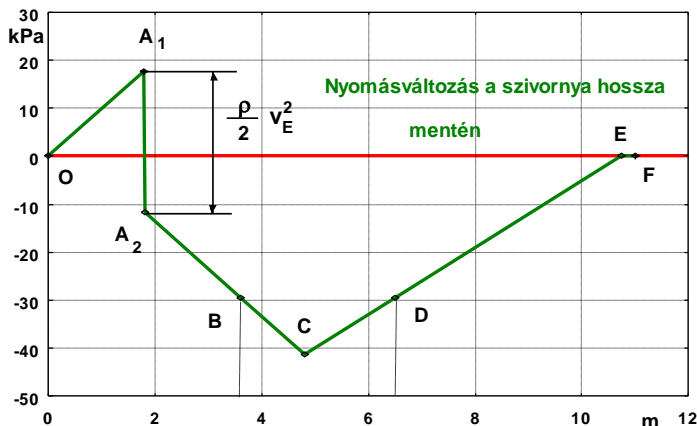
$$p_D - p_0 = -29.43 \text{kPa}$$

O-E pontok között:

$$p_E - p_0 = \rho \cdot g \cdot 3 - \frac{\rho}{2} \cdot v_E^2 = 1000 \cdot 9.81 \cdot 3 - \frac{1000}{2} \cdot 7.672^2 = 0 \text{kPa}$$

Az "E" és "F" pontokban a sebesség a magasság azonos, tehát a nyomásnak is azonosnak kell lennie, így az "E" pontban számítás nélkül megkaphattuk volna a nyomást.

A nyomás lefutását a cső kiterített hossza mentén a **13.5 ábra** mutatja. Az "A₁" és "A₂" pontok között a közeg nulla sebességről felgyorsul a csőbeli sebességre, így a nyomás ennek megfelelő értékkel hirtelen lecsökken.



Nyomásfüggvény a szivornyában
13.5 ábra

A **másik fontos** jelenség, amely a diagramból látható, hogy a "C" pontban a nyomás erősen a légköri nyomás alá csökken. Ha az "O" és az "F" pontok között a távolság nő, azaz a cső kilépő vége mélyebbre kerül, a kilépő sebesség egyre nagyobb lesz és a "C" pontban a nyomás tovább csökken.

Ha a "C" pont nyomása eléri az adott hőmérsékleten érvényes telített gőz nyomását, akkor a csőben lévő folyadékszál elszakad és gőzbuborékok keletkeznek, amelyek

később összeroppannak, amint nagyobb nyomású helyre kerülnek. A folyamatos áramlás megszűnik. Szakaszos, lüktető áramlás jön létre és a rendszerben kavitáció lép fel (ld. 1. fejezet).

13.6 Kiömlés tartályból instacioner esetben

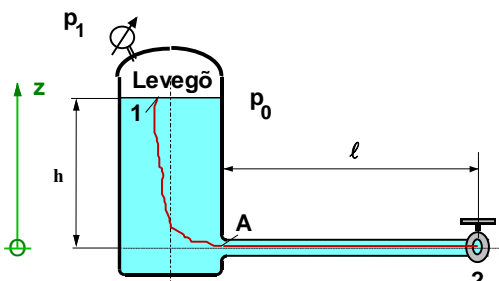


A **13.3 példában** egy végtelen nagy tartályból történő kiömlést vizsgáltunk. A tartályhoz csatlakoztassunk egy viszonylag hosszú csövet (a cső hossza több nagyságrenddel nagyobb, mint az átmérője), amelynek végén egy csap található. A csapot nagyon gyorsan ki lehet nyitni, mint pl. egy golyós csapot.

Lezárt csővég esetén a víz áll a csőben, a nyomás pedig a cső mentén állandó és megegyezik a tartályban lévő vízoszlop nyomásának és a tartályban lévő túlnyomásnak az összegével.

A csap hirtelen nyitásakor a nyomás a csap mögött leesik a légköri nyomásra, majd a csökkenő nyomás egy hullám formájában betérjed a cső többi keresztmetszetébe. A csőben lévő folyadékreszecskekre a nyomás csökkenése folytán gyorsító erő hat, amely megindítja a folyadékoszlopot. A kinyitás pillanatában azonban a folyadék a csőben még áll. A folyadék sebessége a csőben fokozatosan nő, majd elér egy maximális értéket, mégpedig a **13.3 példában** kiszámított stacioner sebességet, amennyiben nincs súrlódás a rendszerben.

Adatok: $p_1 = 3\text{bar (absz.)}$; $p_0 = 1\text{bar}$; $h = 5\text{m}$; $\ell = 15\text{m}$



Instacioner kiömlés tartályból
13.6 ábra

Kérdések:

- Határozzuk meg a kiömlés sebességét állandósult állapotban.
- Határozzuk meg a folyadék sebességét és gyorsulását az idő függvényében a csőben.
- Kb. mennyi idő alatt áll be a stacioner sebesség a fent megadott adatokkal?
- Rajzoljuk fel a nyomás megoszlását a cső mentén $\frac{t}{\tau} = 1$ értéknél!

a./ Stacioner megoldás

Viszonylag hosszú idő elteltével a csőben a sebesség eléri a stacionárius, vagy állandósult sebességet (a tartályban a vízfelszín süllyedése még ekkor is elhanyagolható). A csőben elhanyagolható a súrlódási veszteség, így a **13.3 példában** kapott eredmény itt is alkalmazható. Veszteségmentes esetben ugyanis egy vízszintes, állandó keresztmetszetű csőben, stacioner esetben a nyomás nem változik, tehát a cső végén uralkodó nyomás a tartályig állandó. A légköri nyomás a tartály kiömlő keresztmetszetében is megjelenik, hasonlóan a 13.2 feladathoz. Így a cső végén a stacionárius sebesség a *13.5 egyenlet* szerint (jelöljük v_{st} -vel):

$$v_{st} = v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \left(5 + \frac{(3-1) \cdot 10^5}{1000 \cdot 9.81} \right)} = 22.31 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 13.6$$

Fejezzük ki a sebesség négyzetét az egyenletből, mert a további megoldáshoz szükségünk lesz rá:

$$v_{st}^2 = 2 \cdot g \cdot \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} \right) \quad 13.7$$

b./ Instacioner megoldás

A példában mindazok a feltételek teljesülnek, amely a stacioner tartályból való kifolyás esetében, kivéve, hogy itt a jelenség a **csőben instacioner**.

Ezért a Bernoulli-egyenletnek azt a formáját kell választanunk, amelyben még nem kötöttük ki az időállóság feltételét. Felírva az *5.12 egyenletet*:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s} - \int_1^2 \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g} d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \text{grad} p \cdot d\underline{s}.$$

I. II. III. IV. V.

A **II.-től V. tagig** mind az előző fejezetben leírtak szerint egyszerűsíthető. Az első tagot változatlanul felírva

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 \quad 13.8$$

Az egyenlet első tagja a lokális gyorsulás vonalintegrálja egy adott időpillanatban az "1" és "2" pontok közt felvett út mentén.

Az ábrába berajzolt útvonal egyben áramvonal is minden egyes időpillanatban, így a haladási út és a gyorsulás egyirányúak, egyszerű skalár számok szorzatával helyettesíthető az integranduszban lévő skaláris szorzat.

A gyorsulás vonalintegrálját az alábbi megfontolások alapján fejezzük ki. Ha a tartály elegendően nagy, akkor benne a sebesség elhanyagolható, de akkor a gyorsulás is jó közelítéssel zérus. Ezért az integrálási útvonalat két részre osztjuk: "1-A" és "A-2" szakaszra:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} = \int_1^A \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_A^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s}$$

A jobb oldal első tagja 0, mert a végtelen nagynak tekintett tartályban a közeg gyorsulását elhanyagolhatjuk. Az integrálunk következő egyszerűbb alakot ölti:

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} = \int_A^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} \quad 13.9$$

Az integrál elvégzéséhez a lokális gyorsulás változását kell ismerni a cső hossza mentén. Ha áll., a kontinuitásból következik, hogy a cső bármely keresztmetszetében egy adott pillanatban

azonosnak kell lennie a térfogatáramnak, mert ellenkező esetben a folyadék vagy összenyomódna, vagy szétszakadna:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Feltétel az is, hogy a cső keresztmetszete nem tágul, ill. nem szűkül össze. A fenti egyenletet idő szerint deriválva csak a sebességek függhetnek az időtől, így:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} \cdot A_1 = \frac{\partial v_2}{\partial t} \cdot A_2$$

Jelöljük a sebességek idő szerinti deriváltjait "a"-val, ekkor

$$a_1 A_1 = a_2 A_2 \quad 13.10$$

Ebből következik, hogy állandó sűrűségű közeg lokális gyorsulása állandó keresztmetszetű csőben nem változik a cső hossza mentén. Ezért a 13.9 összefüggés az alábbiak szerint alakítható át:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_A^2 a ds = a \cdot \ell \quad 13.11$$

Írjuk fel ezek után a Bernoulli-egyenlet 13.8 egyenlet többi tagját is az "1" és a "2" pontok között.

$$a \cdot \ell + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot h \quad 13.12$$

Vezessük be a következő jelöléseket $v_2 = v$ és $a = \frac{dv}{dt}$. Azért használhatunk idő szerinti teljes deriváltat, mert a sebesség a csőben csak az időtől függ a helytől nem. Rendezzük át az egyenletet:

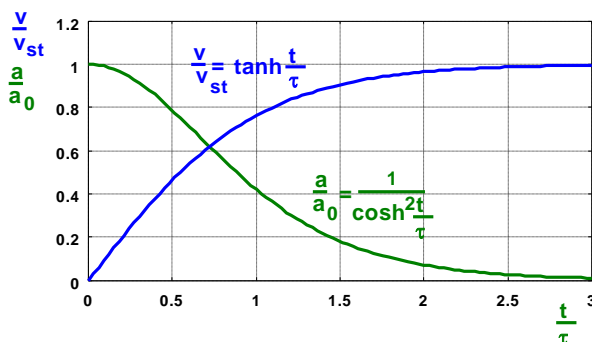
$$2 \cdot \ell \frac{dv}{dt} + v^2 = 2 \cdot \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_0}{\rho} + g \cdot h \right) \quad 13.13$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldala éppen a " v_{st}^2 " stacioner sebesség négyzete (13.7 egyenlet).

Ezt behelyettesítve és szétválasztva a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{dv}{v_{st}^2 - v^2} = \frac{dt}{2 \cdot \ell} \quad 13.14$$

A stacioner sebességgel dimenziótlánítva és kijelölve az integrált:



$$\int_0^{v/v_{st}} \frac{d \frac{v}{v_{st}}}{1 - \left(\frac{v}{v_{st}} \right)^2} = \frac{v_{st}}{2\ell} \int_0^t dt \quad 13.15$$

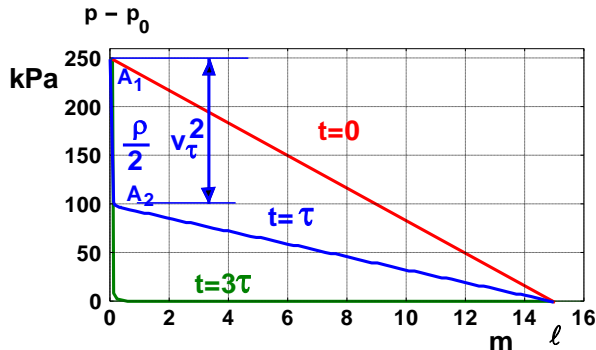
A sebesség és a gyorsulás függvények

13.7 ábra

Integrálás után az $\operatorname{artanh} \frac{v}{v_{st}} = \frac{t \cdot v_{st}}{2 \cdot \ell}$ összefüggés adódik, pl. integrál táblázatból. Vezessük be a

$\tau = \frac{2 \cdot \ell}{v_{st}}$ időt, ahol t a rendszer saját idejének is nevezhetjük. A sebességfüggvényt ezek után

úgy kapjuk, hogy mindkét oldalnak vesszük a "tangens hiperbolikus" függvényét.



A nyomáslefutás a cső hossza mentén
13.8 ábra

$$v = v_{st} \cdot \tanh \frac{t}{\tau} \quad 13.16$$

A gyorsulás függvény a sebesség függvénynek az idő szerinti deriváltja

$$a = \frac{a_0}{\cosh^2 \frac{t}{\tau}},$$

ahol $a_0 = \frac{v_{st}^2}{\tau}$ a kezdeti időpillanatban érvényes gyorsulás. (a "cosh" függvény pedig a koszinusz hiperbolikus függvény).

c./ A 13.7 ábrából látható, hogy kb. $\frac{t}{\tau} = 3$ esetén már a stacioner sebességgel áramlik a csőben a közeg. A konkrét idő kiszámításához a " τ " saját időt kell először meghatározni

$$\tau = \frac{2 \cdot \ell}{v_{st}} = \frac{2 \cdot 15}{22.31} = 1.34 \text{ s}$$

A három saját idő értéke 4 s, amikor $\frac{v}{v_{st}} = 0.995$.

d./ A $\frac{t}{\tau} = 1$ esetén mind a sebességet, mind a gyorsulást meg tudjuk határozni a 13.7 ábrából. Például a diagramból kiolvashatjuk az értékeket.

A sebesség: $v_{\tau} = 0.78 \cdot v_{st} = 0.78 \cdot 22.31 = 17.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

A gyorsulás: $a_{\tau} = 0.4 \cdot a_0 = 0.4 \cdot \frac{v_{st}^2}{2 \cdot \ell}$ $a_{\tau} = 0.4 \cdot \frac{22.31^2}{2 \cdot 15} = 6.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A gyorsulást más módon is meg lehet határozni. Írjuk fel a 13.12 egyenletet

$$a \cdot \ell + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot h,$$

és fejezzük ki belőle a gyorsulást:

$$a_{\tau} = \frac{\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_0}{\rho} + g \cdot h - \frac{v_{\tau}^2}{2}}{\ell} = \frac{\frac{v_{st}^2}{2} - \frac{v_{\tau}^2}{2}}{\ell} = \frac{\frac{22.31^2}{2} - \frac{17.4^2}{2}}{15} = 6.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az eltérés a leolvasás pontatlansága miatt adódott.

A nyomásfüggvény meghatározásához alkalmazzuk az instacioner Bernoulli-egyenletet (13.8 egyenlet) az "A" pont és a "2" pontok között. Az "A" pont elhelyezkedésére ugyanaz

érvényes, mint a szivornya belépő keresztmetszetében, vagyis a beáramlás helyén lévő bonyolult áramlás miatt itt is a sebesség nagyon rövid szakaszon igen gyorsan változik. Az "A₂" pontot most is a csőben a belépés után helyezzük el, az "A₁" pedig a belépés előtt legyen.

$$\int_{A_1}^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2 = \frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + U_1$$

Az integrál megint helyettesíthető a gyorsulás és a hossz szorzatával, a két sebesség és a két potenciál pedig azonos, így

$$a_\tau \cdot \ell + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_A}{\rho}$$

adódik, amelyből a nyomáskülönbség

$$(p_A - p_0)_\tau = \rho \cdot a_\tau \cdot \ell = 1000 \cdot 6.5 \cdot 15 = 97.5 \text{ kPa}$$

A nyomás lefutását a **13.8 ábra** mutatja a $t = \tau$ időpillanatban, a cső mentén lineárisan változik.

Az ábrában feltüntettük a $t = 0$ (piros) és a $t = 3 \cdot \tau$ (zöld), amely megfelel a végtelen idő eltelte után érvényes állapotnak.

13.7 Ventilátorok, Euler-turbinaegyenlet

A ventilátorok a levegőt, vagy más légnemű közeget kisebb nyomású helyről nagyobb nyomású helyre szállítják. A ventilátor a hajtására fordított teljesítmény árán egyrészt nyomáskülönbség ellenében végez munkát, másrészt megnöveli a szállított levegő mozgási energiáját. A ventilátor hasznos teljesítményének kiszámításakor a szállított levegő sűrűségét állandónak tekintjük. Ezt mindaddig megtehetjük, ameddig a sűrűségváltozás kb. 10% alatt marad. Ventilátorok esetében ez mindig fennáll. (Ekkor hívják ugyanis ventilátornak.)

Az áramló levegőben írjuk fel egy áramvonal mentén a Bernoulli-egyenletet (12.13 egyenlet)

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

Levegő áramlásánál a helyzeti energia megváltozása két pont között elhanyagolható, ugyanis egy adott tömegű levegőre ható nehézségi erő és a környező levegő által keltett felhajtóerő egyenlő, ha a levegő nyomása és hőmérséklete nem tér el nagymértékben a környezetétől. Így adott tömegű levegő felemelésekor nem kell munkát befektetni, tehát potenciális energia sem keletkezik. A fenti egyenletből $U_1 - U_2 \approx 0$ feltételt felhasználva és beszorozva a sűrűséggel a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + p_2$$

Képzeljünk el egy levegő sugarat, amellyel egy sík falra fújunk, ld. pl. **14.6 ábra** (következő fejezet). A fal felé közeledő sugárban a sebesség legyen " v_1 " a nyomás pedig " p_1 ". A fal és a sugár tengelyének metszéspontjában lévő "o" pontban a levegő sebessége zérus. Ezt a pontot torlópontnak nevezzük. Az itt kialakuló nyomást pedig össznyomásnak hívjuk, amely nagyobb mint a szabad sugárban lévő nyomás.

$$\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + p_1 = p_s$$

Az egyenlet bal oldalán lévő

" $\frac{\rho}{2} \cdot v^2$ " tagot **dinamikus nyomásnak**, a

"p" tagot pedig **statikus nyomásnak**,

" p_0 ", ami az előző kettő összege, azt **össznyomásnak** hívjuk.

Egy ventilátor hasznos teljesítménye, amit adott nyomáskülönbség legyőzésekor teljesít:

$$P_p = q_v \cdot (p_{ny} - p_{sz}),$$

-ahol p_{sz} a szívóoldali, p_{ny} a nyomóoldali, a keresztmetszeten belül állandónak feltételezett statikus nyomás és " q_v " levegő-térfogatárama.

A légmennyiség mozgási energiájának növelésére fordított hasznos teljesítmény, pedig:

$$P_v = q_v \cdot \frac{\rho}{2} (v_{ny}^2 - v_{sz}^2),$$

-ahol " v_{sz} " a szívóoldali, " v_{ny} " a nyomóoldali, a keresztmetszeten belül állandónak feltételezett sebesség. A hasznos teljesítmény a kettő összege

$$P_h = P_p + P_v$$

Behelyettesítve az előző kifejezéseket, a hasznos teljesítmény:

$$P_h = q_v \cdot \left[\left(p_{ny} + \frac{\rho}{2} v_{ny}^2 \right) - \left(p_{sz} + \frac{\rho}{2} v_{sz}^2 \right) \right] = q_v \cdot (p_{ny0} - p_{sz0}) \quad 13.17$$

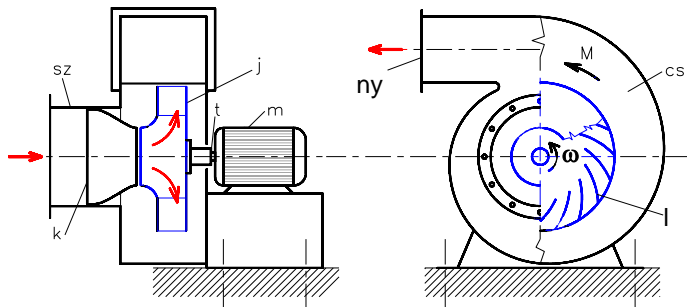
illetve

$$P_h = q_v \cdot \Delta p_0 \quad 13.18$$

ahol " Δp_0 " az össznyomás növekedés.

A **13.9 ábra** egy radiális ventilátor vázlatát mutatja. A levegő az (**sz**) jelű szívócsonkon jut be a gépbe, egy álló konfúzor (**k**) vezet a forgó járókerékhez (**j**), amely az (**m**) motor (**t**) tengelyére van rögzítve. A közeg radiális irányba fordul és áthalad a járókerék (**l**) lapátjai között. A motor (**M**) nyomatékot fejt ki az (ω) szögsebességgel forgó járókerékre. E nyomaték hatására a járókeréken áthaladó közeg forgás irányában eltérül. Bejut a (**cs**) jelű csigaházba, majd a (**ny**) nyomócsonkon keresztül hagyja el a gépet. A motor felől érkező energia a ventilátor járókerékén adódik át az áramló közegnek. A ventilátor működésének megértéséhez a járókerékben lejátszódó folyamatokat kell elsősorban megérteni.

A **13.10 ábra** radiális hátrahajló lapátozású ventilátor járókerékét mutat. A **13.11 ábra** egy radiális hátrahajló lapátozású szivattyú járókerékét mutat. A szivattyúk és a ventilátorok járókerékeinek elvi felépítése nem különbözik egymástól. A szivattyúk járókerékei a nagyobb erőhatások és jobb hatásfok érdekében általában öntött kivitelben és profilos lapátokkal készülnek. Ideális, veszteségmentes esetben a Bernoulli-egyenlettel is meg lehet határozni az össznyomás növekedését. Vizsgáljuk meg közelebbről egy radiális ventilátor járókerékét. Sémáját a **13.12 ábrán** láthatjuk. Válasszunk ki egy lapátot a járókerékből. Tételezzük fel, hogy a járókerékben olyan sok lapátot építették be, hogy az áramlás teljesen hengersizmetrikusnak vehető. A lapátokkal párhuzamosan tud a közeg áramlani, így a lapát is tekinthető egy áramvonalnak.



Radiális ventilátor
13.9 ábra

(Az ábrán csak nyolc lapátot tüntettünk fel.)

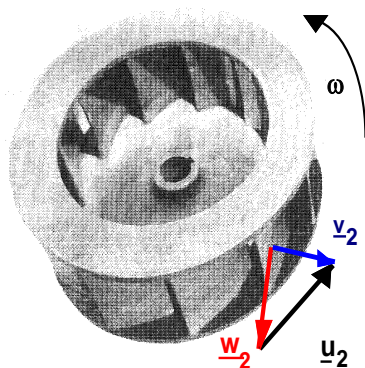
Az "1" pont a lapátok előtt, a belépésnél a "2" pont a lapátok után a kilépésnél található.

A "v" abszolút, "w" relatív és "u" szállító (kerületi) sebesség vektorokat felrajzoltuk egy lapát belépő és kilépő élénél.

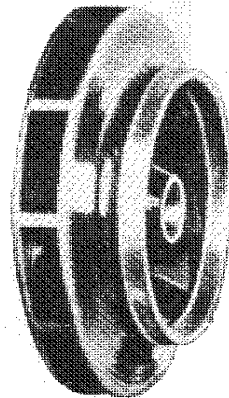
A felrajzoláskor ügyelni kell arra, hogy fennálljon a következő összefüggés a kerületi sebességek között

$$\frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2} = \omega,$$

amely a szilárd testként történő forgás feltétele, valamint arra is kell ügyelni, hogy a megfelelő kerületi sebességek merőlegesek legyenek az adott ponthoz tartozó sugárra. Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet a belépésnél lévő "1" és a kilépésnél lévő "2" pontok között a kerékek együttforgó rendszerben. Az áramlás stacionárius, de nem örvénymentes.



Radiális ventilátorjárókerék
kamleithner budapest kft.
E-POOL VEZÉRKÉPVISELET
13.10 ábra



Radiális szivattyújárókerék
13.11 ábra

Induljunk ki Bernoulli-egyenlet teljesen általános alakjából (12.12 egyenlet).

A sebesség helyére, most a relatív sebességet, "w"-t kell behelyettesíteni.

$$\int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + \int_1^2 \text{grad} \frac{w^2}{2} ds - \int_1^2 \mathbf{\omega} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} ds = \int_1^2 \mathbf{g} ds - \int_1^2 \frac{1}{\rho} ds$$

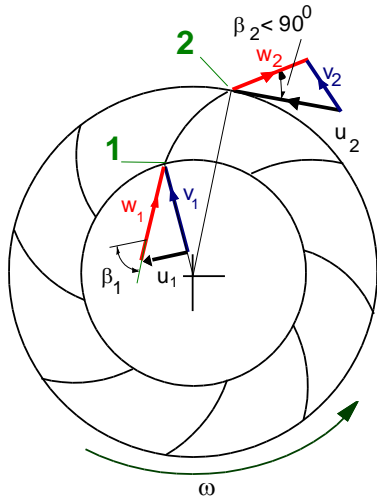
I.

II.

III.

IV.

Az **I. integrál** zérus, miután a \underline{w} relatív sebesség stacionárius. A **II. tag** a definícióból következően $\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}$. A **III. integrál** is zérus, mert "1" és "2" pontok ugyanazon az áramvonalon találhatók, tehát áramvonalon integrálunk. Az **V. tag** áll. következtében $-\frac{p_2 - p_1}{\rho}$



Sebességi háromszögek
13.12 ábra

alakra hozhatjuk.

A **IV. integrál** kifejtése némi megfontolást igényel. Miután a koordináta-rendszerünk forog, fellép a centrifugális erőter. A Föld nehézségi erőterét elhanyagolhatjuk a sokkal nagyobb centrifugális erőter mellett. Ha forgó rendszerben egy tömegpont relatív mozgást végez a rendszerhez képest, akkor fellép a Coriolis-erő, amely egységnyi tömegre nézve a

$$\underline{g}_{\text{Cor}} = 2\underline{w} \times \underline{\omega} \quad 13.20$$

összefüggéssel írható fel, ahol $\underline{\omega}$ a koordináta-rendszer szögsebessége, és megegyezik a kerék szögsebességével. (**G. G. Coriolis 1792-1843** francia fizikus) Figyelembe véve, hogy a centrifugális erőter potenciálja $U = -\frac{r^2\omega^2}{2}$,

a **IV. integrál** az alábbi alakra egyszerűsíthető:

$$\int_1^2 \underline{g} ds = \left(\frac{r_1^2 \omega}{2} - \frac{r_2^2 \omega}{2} \right) + \int_1^2 2\underline{w} \times \underline{\omega} ds \quad 13.21$$

A 13.21 egyenletből látható, hogy a Coriolis-erőter vonal menti integrálja zérus, ha az áramvonalon integrálunk, mert $\underline{w} \parallel ds$.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy ha nem áramvonalon integrálunk, de az abszolút áramlás örvénymentes, akkor a Coriolis-erőteret tartalmazó tag a Bernoulli-egyenlet **III. integráljával** együtt kiesik.

A Bernoulli-egyenlet az egyszerűsítéseket figyelembe véve, a következő:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{r_2^2 \omega^2}{2} \quad 13.22$$

Íjuk fel a relatív sebességet az abszolút és a szállító sebesség vektorok különbségeként (**ld. 13.12 ábra**) $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, amiből következik, négyzetre emelés után, hogy

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} \quad 13.23$$

Helyettesítsük ezt a kifejezést "1" és "2" indexekkel a 13.22 egyenletbe:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{u_1^2}{2} - \underline{v}_1 \underline{u}_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \underline{v}_2 \underline{u}_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad 13.24$$

Tudjuk, hogy $u_1 = r_1 \omega$ és $u_2 = r_2 \omega$ a fenti egyenletbe helyettesítve és egyszerűsítve, valamint a sűrűséggel beszorozva, a következőt kapjuk:

$$\left(p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \right) - \rho \cdot \underline{v}_1 \underline{u}_1 = \left(p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \right) - \rho \cdot \underline{v}_2 \underline{u}_2 \quad 13.25$$

A 13.17 egyenlet szerint $p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_s$ a statikus és dinamikus nyomás összege az össznyomás az abszolút rendszerben. Továbbá vezessük be a következő jelölést $\underline{v}_2 \underline{u}_2 = v_{2u} u_2$, ahol v_{2u} a \underline{v}_2 vektornak a kerületi sebesség irányába eső vetülete. Beírva az egyenletbe

$$\left(p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \right) - \left(p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \right) = \rho \cdot (v_{2u} \cdot u_2 - v_{1u} \cdot u_1) \quad 13.26$$

kifejezést kapjuk.

Ekkor az Euler-turbinaegyenlet ventilátorokra, a következő alakban írható fel:

$$\Delta p_{sid} = \rho (v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1), \quad 13.27$$

amely kimondja, hogy az össznyomás növekedése egyenlő az egyenlet jobb oldalán látható kifejezéssel. A jobb oldal átalakítható

$$\Delta p_{oid} = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot (v_{2u} \cdot r_2 - v_{1u} \cdot r_1) \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \rho \cdot \Gamma \cdot n,$$

ahol " Γ " járókerék által keltett cirkuláció, vagy más néven perdület, " n " pedig a kerék fordulatszám. A járókerék a cirkuláció növelése révén hoz létre nyomásnövekedést. A $2 \cdot \pi \cdot v_{2u} \cdot r_2$ a járókerék külső kerületén elvégzett cirkuláció számítás eredménye. Például a **11.4 fejezetben** a cirkuláció kiszámítása egy potenciális örvényben egy kör áramvonal mentén. A belépésnél legtöbbször nincs kerület irányú sebessége a közegnek, ekkor $v_{1u} = 0$.

Ekkor $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot v_{2u} \cdot r_2$.

Az Euler-turbinaegyenlet nemcsak radiális, de axiális átömlésű áramlástechnikai gépekre is érvényes.

Szivattyúk esetében a szívó és nyomócsanak között is felírható és ekkor a Föld nehézségi erőterét is figyelembe szokták venni, valamint a 13.26 egyenlet bal oldalára a magasságokat is beírják, továbbá a szivattyúk esetében nyomások helyett magasságokat szívesebben alkalmaznak, ekkor az egyenletet " ρg "-vel végigosztják, így az Euler-turbinaegyenlet szivattyúkra a következő:

$$\left(\frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \right) = \frac{v_{2u} \cdot u_2 - v_{1u} \cdot u_1}{g} = H_{tid} \quad 13.28$$

Az egyenlet bal oldalán lévő mennyiséget teljes ideális emelő-magasságnak is nevezik és H_{tid} -al jelölik (teljes ideális, vagy total ideal).

Visszatérve a ventilátorokra, ha a ventilátor előtt a levegő nem forog a csőben, vagy a ventilátor szabadból szív, akkor a lapátokat a belépésnél pontosan sugár irányból éri el a levegő abszolút rendszerből nézve. A **13.12 ábra** éppen ilyen állapotot mutat. Most nincsen a belépő abszolút sebességnek kerület irányú komponense, tehát a 13.27 egyenlet egyszerűsíthető

$$\Delta p_{oid} = \rho \cdot v_{2u} u_2 \quad 13.29$$

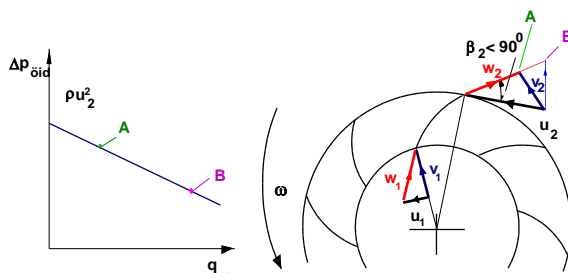
13.8 Radiális ventilátorok elméleti és valóságos jelleggörbéi

13.8.1 A radiális ventilátorok ideális jelleggörbéi

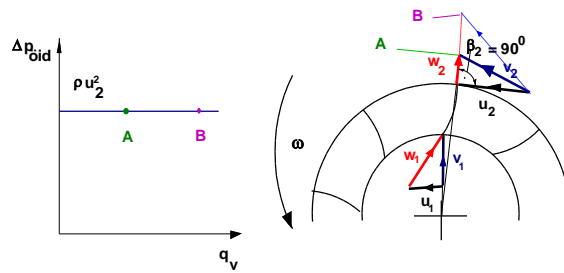
Jelöljük a járókerék szélességét " b_1 "-el és " b_2 "-vel (a rajz síkjára merőleges méret). A sugár irányú sebesség az "1" és "2" helyeken rendre " v_{r1} " és " v_{r2} ". Használjuk a kontinuitás tételt a belépő és a kilépő keresztmetszetekre:

$$v_{r2} = \frac{q_v}{2\pi \cdot r_2 \cdot b_2} \qquad v_{r1} = v_1 = \frac{q_v}{2\pi \cdot r_1 \cdot b_1}$$

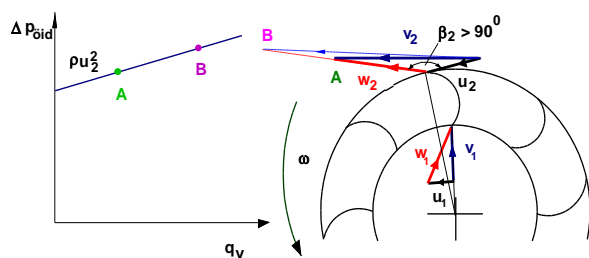
A kilépő sebességi háromszögből $v_{2u} = u_2 - w_2 \cdot \cos\beta_2$ és $w_2 \cdot \sin\beta_2 = v_{r2}$, így a kilépő sebesség kerület irányú komponense:



Hátrahajló lapátos járókerék ideális jelleggörbéje
13.13 ábra



Radiális lapátos járókerék ideális jelleggörbéje
13.14 ábra



Előrehajló lapátos járókerék ideális jelleggörbéje
13.15 ábra

$$v_{2u} = u_2 - v_{r2} \cdot \operatorname{ctg}\beta_2 = u_2 - \frac{q_v \cdot \operatorname{ctg}\beta_2}{2\pi \cdot r_2 \cdot b_2}$$

Ezt a kifejezést a 13.29 egyenletbe helyettesítve és átrendezve adódik az ideális jelleggörbe számítására alkalmas kifejezés:

$$\Delta p_{0id} = \rho \cdot \left(u_2^2 - \frac{u_2}{2\pi \cdot r_2 \cdot b_2} \cdot \operatorname{ctg}\beta_2 \cdot q_v \right) \quad (13.30)$$

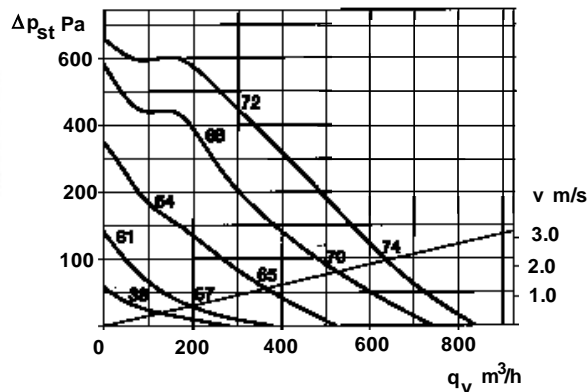
Eszerint az ideális nyomásnövekedés lineáris függvénye a szállított térfogatáramnak.

Amennyiben a kilépés szöge kisebb mint kilencven fok, $\operatorname{ctg}\beta_2 > 0$, akkor hátrahajló lapátos ventilátorról beszélünk. A hátrahajló lapátos ventilátor ideális jelleggörbéjét a 13.13 ábra mutatja.

Amennyiben a kilépés szöge kilencven fok, $\operatorname{ctg}\beta_2 = 0$, akkor radiális lapátos ventilátornak nevezzük. A radiális lapátos ventilátor ideális jelleggörbéjét a 13.14 ábra mutatja. A jelleggörbe vízszintes egyenes.

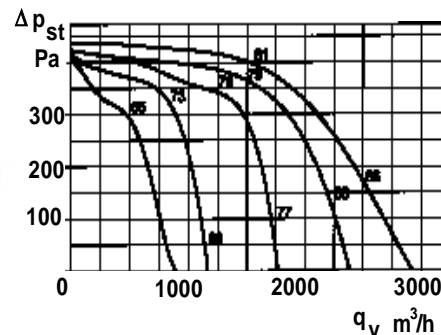
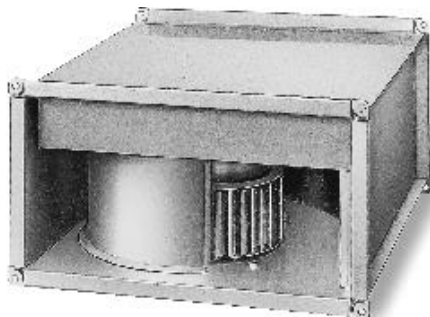
És végül, ha a kilépés szöge nagyobb kilencven foknál, $\operatorname{ctg}\beta_2 < 0$, akkor előrehajló lapátos ventilátornak hívjuk. Az előrehajló lapátos ventilátor ideális jelleggörbéjét a 13.15 ábra mutatja. Növekvő térfogatárammal a nyomásnövekedés is nő.

13.8.2 A ventilátorok valóságos jelleggörbéi



Hátrahajló lapátozású radiális ventilátor és valóságos jelleggörbéi különböző fordulatszámokon

13.16 ábra



Előrehajló lapátozású radiális ventilátor és valóságos jelleggörbéi különböző fordulatszámokon

13.17 ábra



A valóságos jelleggörbe nagymértékben eltér az ideális jelleggörbétől, a járókerékben és a csigaházban fellépő áramlási veszteségek miatt. A **13.16** és a **13.17** ábrákon katalógusból vett ventilátorokat és azok mért jelleggörbéit láthatjuk.

Az össznyomás növekedés helyett az úgynevezett statikus nyomásnövekedést (Δp_{st}) tünteti fel a katalógus, amely a létesített össznyomás növekedéséből levonja a nyomóoldali dinamikusságot. Az össznyomás kifejezésének behelyettesítésével kapjuk:

$$\Delta p_{st} = \Delta p_{\bar{o}} - \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 = \left[\left(\frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + p_2 \right) - \left(\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + p_1 \right) \right] - \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 = p_2 - \left(\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + p_1 \right)$$

Azaz a statikus nyomásnövekedés a nyomóoldali statikus nyomás és a szívóoldali össznyomás különbsége. A ventilátor felhasználóját legtöbb esetben ez a nyomáskülönbség érdekli.

A zérus térfogatáramnál lévő nyomásnövekedés kb. 40-70%-a az ideális esetben adódó értéknek. A hátrahajló lapátozású ventilátorok jelleggörbéjének tendenciája hasonlít az ideális jelleggörbéhez, mert növekvő térfogatáramhoz csökkenő nyomás tartozik. A hátrahajló lapátozású ventilátor hatásfoka jobb az előrehajló és a radiális típusúnál.

Az előrehajló lapátozású ventilátor jelleggörbéjének már a tendenciája is eltér az ideálistól, nemcsak a számértéke. Általában csak nagyon kis szakaszon emelkedik, majd utána szintén növekvő térfogatáramhoz csökkenő nyomásnövekedés tartozik. A hatásfoka általában

rosszabb a hátrahajló típushoz viszonyítva. Viszont nagy előnye, hogy ugyanazokat a paramétereket kisebb méretben lehet megvalósítani, mint hátrahajló változatban. Előrehajló lapátos szivattyúkat nem gyártanak, a rossz hatásfok és a viszonylag instabil munkapont miatt.

13.9 Forgó "S" alakú cső, mint egyszerű szivattyú



A 13.18 ábrán látható "S" alakú csövet függőleges tengely körül állandó " ω " szögsebességgel forgatjuk. A cső ebben az esetben egyszerű szivattyúként működik.

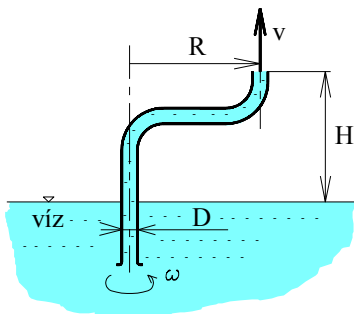
Adatok: $H = 1\text{m}$; $R = 0.5\text{m}$; $D = 0.1\text{m}$; $\omega = 20 \frac{1}{\text{s}}$

Kérdések:

- a./ Mekkora a cső végén kiáramló térfogatáram?
- b./ Mekkora a cső forgatásához szükséges teljesítmény?

I. Megoldás:

a./ Az áramlás beindításához fel kell töltenünk a csövet, majd ezután kezdhethetjük el forgatni. Mivel álló rendszerből szemlélve a jelenség instacionárius, ezért - legalábbis a forgó csövön belül - forgó koordináta-rendszert kell alkalmaznunk. Ha a Földhöz képest álló koordináta-rendszerben örvénymentes áramlást feltételezünk, akkor a forgó rendszerben felírva a Bernoulli-egyenletet a Coriolis-erőtér és a rotációs tag kiejtik egymást.



Egyszerű szivattyú
13.18 ábra

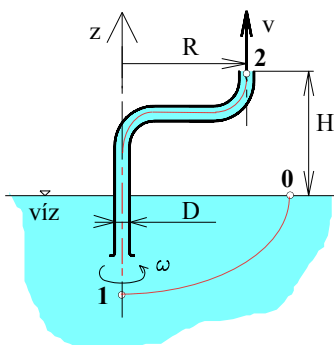
Figyelembe kell vennünk a centrifugális erőtér potenciálját is:

$$\left[\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + gz - \frac{r^2 \omega^2}{2} \right]_0 = 0$$

Forgó rendszerből szemlélve a nyugvó vízfelszín tetszőleges "0" indexű pontját, azt látjuk, hogy " $-\omega r_0$ " kerületi sebességgel forog.

Behelyettesítve a "0-ás" és "2-es" indexű pontok áramlási jellemzőit a fenti egyenletbe, kapjuk:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{(r_0 \omega)^2}{2} - \frac{r_0^2 \omega^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + gH - \frac{R^2 \omega^2}{2}$$



13.19 ábra

A megoldás az " r_0 " pont felvételétől láthatóan nem függ, mert a baloldali második és harmadik tagja kiejtik egymást. Ebből kifejezve az ismeretlen " w_2 "-t:

$$w_2 = \sqrt{2 \left(\frac{R^2 \omega^2}{2} - g \cdot H \right)} = \sqrt{2 \left(\frac{0.5^2 \cdot 20^2}{2} - 9.81 \cdot 1 \right)} = 8.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értéket kapunk. Amelyből a térfogatáram:

$$q_v = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot w_2 = \frac{0.1^2 \cdot \pi}{4} \cdot 8.96 = 0.0704 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

b./ Az energia-befektetést álló rendszerben kell vizsgálnunk. A forgó cső (a súrlódási munkától eltekintve) a folyadék mozgási és helyzeti energiáját növeli.

Egységnyi tömegű folyadék mozgási és helyzeti energiájának megváltozása:

$$\frac{w_2^2 + (R\omega)^2}{2} + gH$$

a "0" indexű pontban az abszolút sebesség zérus, a "2-es" pontbeli abszolút sebesség két egymásra merőleges, "w₂" és "Rω" komponenssel írható fel.

A teljesítményt az egységnyi tömegű folyadék energiájának megváltozása és a tömegáram szorzataként kapjuk.

$$P = q_v \cdot \rho \cdot \left(\frac{w_2^2 + (R \cdot \omega)^2}{2} + g \cdot H \right) = 0.0704 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{8.96^2 + (0.5 \cdot 20)^2}{2} + 9.81 \cdot 1 \right) = 7.04 \text{ kW}$$

II. Megoldás:

Csak az **a./** megoldása változik.

A Bernoulli-egyenlet **0-1** pontok között álló koordináta-rendszerben írjuk fel, mert az áramlás itt stacionárius, majd az **1-2**-ig forgó rendszert alkalmazunk. Mivel az **1** pontot speciálisan a tengelyen vettük fel, ezért a forgó rendszerben, ebben a pontban eltűnik mind a forgótér potenciál, mind pedig a szállító sebesség.

A Bernoulli-egyenlet **0-1**-ig álló rendszerben:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} - gz_1 \quad 13.31$$

A Bernoulli-egyenlet **1-2**-ig forgó rendszerben:

$$\frac{p_1}{\rho} - gz_1 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + gH - \frac{R^2 \omega^2}{2}$$

A két egyenletet összeadva az ismeretlen 1-es indexű tagok kiesnek és "w₂" kifejezhető.

III. Megoldás:

a./ Használjuk az Euler-turbinaegyenlet szivattyúra érvényes formáját: (ld. 13.28 egyenlet)

$$\left(\frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + H \right) - \left(\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \right) = \frac{(v_{2u} \cdot u_2 - v_{1u} \cdot u_1)}{g}$$

Az "1" pontban a sebesség zérus, valamint a 13.31 egyenletből az "1"-es pontbeli nyomás és magasság a légköri nyomással megadható, így az egyenletünk.

$$\left(\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + H \right) - \left(\frac{p_0}{\rho \cdot g} \right) = \frac{v_{2u} \cdot u_2}{g}$$

A kilépő abszolút sebesség kerület irányú komponense éppen a kerületi sebesség a cső felső végén. (A cső olyan mint egy radiális lapátosú járókerék). Behelyettesítve és egyszerűsítve:

$$\frac{v_2^2}{2 \cdot g} + H = \frac{u_2^2}{g} \quad 13.32$$

Használjuk fel, hogy a "2"-es pontban a relatív sebesség merőleges a kerületi sebességre, így a relatív sebesség Pitagorasz-tételével számítható.

$$v_2^2 = w_2^2 + u_2^2$$

Helyettesítsük ezt a 13.32 egyenletbe és fejezzük ki w_2 -t.

$$w_2 = \sqrt{2 \left(\frac{u_2^2}{2} - g \cdot H \right)}$$

Amely megegyezik az előző két esetben kapott megoldással.

b./ Az energia-befektetést a 13.18 egyenlet szerint számíthatjuk, amely a következő:

$$P_h = q_v \cdot \Delta p_{\text{sid}},$$

ahol a térfogatáramot az előzőekhez hasonlóan számíthatjuk, az ideális össznyomás növekedést pedig a 13.29 egyenletből, vagyis az Euler-turbinaegyenletből vehetjük

$$\Delta p_{\text{sid}} = \rho \cdot v_{2u} u_2$$

A kilépő abszolút sebesség kerület irányú komponense éppen u_2 , így a hasznos teljesítmény:

$$P = q_v \cdot \rho \cdot u_2^2 = 0.0704 \cdot 10^3 \cdot (0.5 \cdot 20)^2 = 7.04 \text{ kW}$$



14. Impulzustétel és alkalmazásai

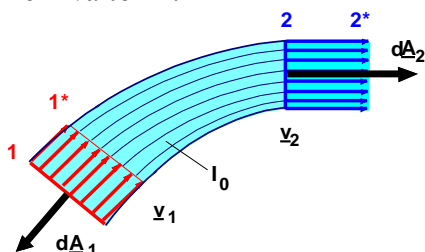
Ebben a fejezetben szintén a folyadékmozgás dinamikai alapegyenletét alkalmazzuk, akárcsak az ötödik fejezetben. Ott a mozgásegyenletet differenciális alakban írtuk fel, amely az Euler-egyenletet eredményezte. Az impulzustétel ugyancsak Newton II. törvényének folyadékokra történő alkalmazása, de integrál egyenlet formájában.

Az erők és a mozgásmennyiség megváltozásának kapcsolatát Newton II. törvénye írja le:

$$\frac{d(m \cdot \underline{v})}{dt} = \sum \underline{F} \quad 14.1$$

Alkalmazható folyadékokra is, amennyiben elhatárolunk egy folyadék részt egy **ellenőrző felülettel**, amely mozgás mennyiségének idő szerinti megváltozását és az arra ható erőket írjuk az egyenletbe.

Vizsgáljuk a **14.1 ábrán** látható áramcső egy darabját. Legyen az áramlás stacionárius, tehát az áramcső térben és időben mindig ugyanazon a helyen marad, a belépő és kilépő sebesség időben nem változik.



Impulzus változás

14.1 ábra

Egy adott "t" időpillanatban az "1" és "2" felületek között az áramcső adott darabjában lévő folyadék rendelkezik egy adott impulzussal. "dt" idő elteltével a folyadék az "1*" és "2*" keresztmetszetekkel határolt részbe kerül, ahol szintén rendelkezik egy bizonyos impulzussal. A két állapot közötti impulzusváltozást szeretnénk meghatározni.

Mivel az áramlás stacionárius, az "1*" és

"2" keresztmetszetek között lévő folyadék impulzusa ugyanaz a "t" és a "t+dt" időpillanatokban is, bár a tér egyes pontjaiba más-más folyadék részecskék kerültek. Jelöljük az ebben a térrészben lévő folyadék impulzusát \underline{I}_0 -al.

A "t" időpillanatban a vizsgált folyadék rész "1"- "2" keresztmetszetek között lévő folyadék impulzusa

$$\underline{v}_1 \cdot d\mathbf{m}_1 + \underline{I}_0$$

A "t+dt" időben a "1*-2*" keresztmetszetek között lévő folyadék impulzusa:

$$\underline{I}_0 + \underline{v}_2 \cdot d\mathbf{m}_2$$

Az ellenőrző felület bal oldalán ugyanannyi tömeg áramlik be, mint amennyi a jobb oldalon kiáramló tömeg.

Fejezzük ki a beáramló tömeget a sebességvektorral és a felületelem vektorral, valamint a sűrűséggel.

$$d\mathbf{m}_1 = -\rho_1 \cdot d\mathbf{A}_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot dt$$

A mínusz előjel azért szükséges, mert a sebesség és a felület irányítása ellentétes, így a skalár szorzatuk negatív. Írjuk fel a "2" keresztmetszetben a kiáramló tömeget:

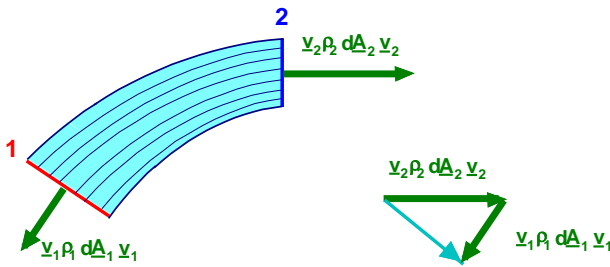
$$d\mathbf{m}_2 = \rho_2 \cdot d\mathbf{A}_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot dt$$

A mozgásmennyiség "dt" idő alatt bekövetkezett megváltozása a "t+dt" időben érvényes impulzusból levonva a "t" időben érvényes impulzust. Az \underline{I}_0 kiesik a kivonáskor, ezek után:

$$d(m \cdot \underline{v}) = d\mathbf{m}_2 \cdot \underline{v}_2 - d\mathbf{m}_1 \cdot \underline{v}_1 = (\rho_2 \cdot d\mathbf{A}_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot dt) \cdot \underline{v}_2 - (-\rho_1 \cdot d\mathbf{A}_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot dt) \cdot \underline{v}_1$$

A "dt" idővel osztva megkapjuk az impulzus megváltozását, ami a következő:

$$\frac{d(\underline{m} \cdot \underline{v})}{dt} = (\rho_2 \cdot d\underline{A}_2 \cdot \underline{v}_2) \cdot \underline{v}_2 + (\rho_1 \cdot d\underline{A}_1 \cdot \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_1$$



Impulsus változás vektorok
14.2 ábra

Az impulzusváltozással a kijelölt ellenőrző felületre ható erők tartanak egyensúlyt. Az erőket az elemi elmozdulás alatt állandónak tekintjük. A folyadékreszekre általában kétfajta erő hat: a tömegre ható térerő (pl. a súlyerő) és a folyadékresz felületén ható felületi erők (nyomásból származó erők, vagy súrlódóerők). Ha a közeg súrlódásmentes, a felületi erőknek nincsen felülettel párhuzamos komponense (a

csúsztatófeszültség zérus), csak a felületre merőleges, nyomásból származó erő hat. Hanyagoljuk el a súrlódó erőket a többi erő mellett. A vizsgált folyadékreszre ható súlyerőt jelöljük $d\underline{G}$ -vel.

A nyomásból származó erőket általában három részből számítjuk:

- az egyik rész azokra a felületekre ható nyomóerők eredője, amelyeken a folyadék átlép,
- a másik rész az áramcső fala mentén ébredő nyomóerők eredője,
- a harmadik rész pedig a szilárd fallal érintkező felületekre ható nyomóerők eredője, amelyet külön fejezetrészben tárgyalunk, amikor a szilárd test benyúlik az ellenőrző felületbe.

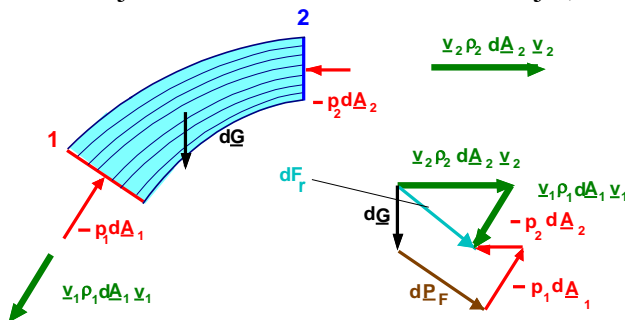
Az áramcső falán fellépő nyomásból származó erők eredőjét (amely származhat részben szilárd faltól is, amely azonban az ellenőrző felületen kívül helyezkedik el) jelöljük $d\underline{P}_F$ -el. A nyomásból származó összes erő eredője:

$$d\underline{P}_F - p_1 \cdot d\underline{A}_1 - p_2 \cdot d\underline{A}_2,$$

ahol a negatív előjelek azt fejezik ki, hogy az erők a felületből kifelé mutató felületi normálissal ellentétesen mutatnak. Egyenlővé téve az impulzusváltozást az erőkkel, a következőt kapjuk:

$$\underline{v}_2 \cdot \rho_2 \cdot (\underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2) + \underline{v}_1 \cdot \rho_1 \cdot (\underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1) = d\underline{G} + d\underline{P}_F - p_1 \cdot d\underline{A}_1 - p_2 \cdot d\underline{A}_2$$

Az összegzést a **14.3 ábrán** megjelölt irányok szerint kell elvégezni. A $d\underline{P}_F$ jelenti a külön a bal- és a jobboldalon lévő vektorok eredőjét, amely természetesen ugyanakkora.

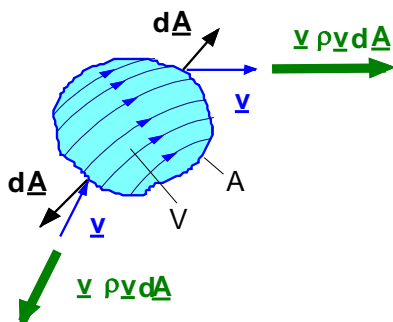


Impulsus változás vektorok
14.3 ábra

Tetszés szerinti felülettel határolt folyadékreszt elemi áramcső darabokból össze lehet rakni. Az elemi áramcsövek közös felületén fellépő erők és impulzus változás vektorok az akció reakció elve alapján kiejtik egymást.

Így tetszés szerinti "A" ellenőrző felületre az impulzustételt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\iint_A \underline{v} \rho (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \rho \cdot \underline{g} dV - \iint_A p d\underline{A} \quad 14.2$$



14.4 ábra

Az egyenlet sűrűdásmentes, stacioner áramlásra érvényes. Az **impulzustétel** nagy előnye a többi áramlástanai egyenlettel szemben, hogy **vektoregyenlet**. Az erők nagyságán kívül azok irányát is megadja. A teljesség kedvéért felírjuk az impulzustételt instacioner, sűrűdásos áramlásra is, amely a következő:

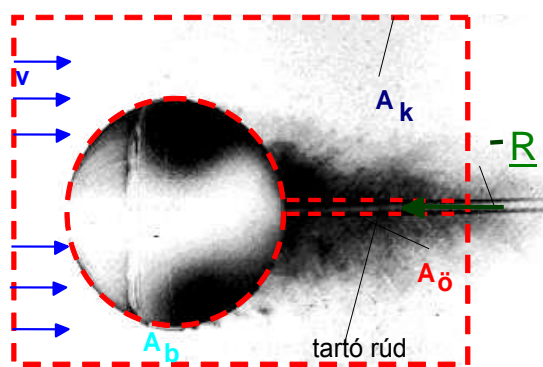
$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \underline{g} dV + \iint_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\mathbf{A}) = \iiint_V \rho \cdot \underline{g} dV - \iint_A \underline{p} d\mathbf{A} + \iint_A \underline{dS}$$

Az impulzustételt legtöbbször olyan esetekben alkalmazzuk, amikor a folyadék szilárd resttel érintkezik, sőt az ellenőrző felületbe benyúlik részben vagy egészen. A fenti megfontolásaink szerint az ellenőrző felületben folyadéknak kell lenni, szilárd test jelenlétét nem feltételeztük a felületben, csak a felület határán.

14.1 Szilárd test az ellenőrző felületben

A következőkben vegyünk egy ellenőrző felületet, amelyen belül **szilárd test helyezkedik el**. Az **áramlás stacionárius és sűrűdásmentes**.

A **14.5 ábrán** egy gömb körüli áramlást láthatunk. A gömbre az áramlás vízszintes erővel hat. Hogy stacioner állapotot tudjunk létrehozni, a gömböt a helyén kell tartani az áramlással szemben. Ezt egy rúd segítségével tudjuk biztosítani, amely az ábra jobb oldalán látható. (A gömb súlya és a rúdban ébredő függőleges erők kiegyenlítik egymást, ezeket nem rajzoltunk az ábrába.) Az áramlásból, a folyadékról a szilárd testre átadódó erőt a rúdban ébredő vízszintes erő, "**-R**"



Szilárd test az ellenőrző felületben
14.5 ábra

egyensúlyozza ki. Vegyük fel az ellenőrző felületet úgy, hogy az "**A_b**" "belső" felülettel zárjuk ki a szilárd testet a "**V**" térfogathoz, ami ezek után az "**A_k**" és "**A_b**" közötti térfogat marad. Az "**A_k**" felület egy henger, vízszintes tengellyel, az "**A_b**" pedig gömb.

Kössük össze őket, hogy eleget tegyünk a zárt felület követelményének, az "**A_ö**" felülettel, amely a tartó rudat körbefogó henger. Ezzel átfúrjuk a két felület között lévő térfogatot. A zárt felület normálisa, megegyezés szerint mindig kifelé mutat a felületből. Ennek úgy tudunk eleget tenni, ha a "**A_k**" felületből kifelé mutatnak a felületelem-vektorok, a "**A_b**" felületnél pedig a gömb középpontja felé mutatnak. Az "**A_ö**" hengerfelületnél pedig annak belseje felé mutatnak a felületi normális vektorok. Így a külső felületről pl. az "**A_ö**" felső felületén, de a cső belsejében, be tudunk jutni a belső felületre, majd az "**A_ö**" felületen vissza tudunk térni, szintén a csőben a külső felületre és eközben mindig a felületből kifelé mutató felületelem-vektorok között, azokat kerülgetve haladunk.

Kössük össze őket, hogy eleget tegyünk a zárt felület követelményének, az "**A_ö**" felülettel, amely a tartó rudat körbefogó henger. Ezzel átfúrjuk a két felület között lévő térfogatot.

A zárt felület normálisa, megegyezés szerint mindig kifelé mutat a felületből. Ennek úgy tudunk eleget tenni, ha a "**A_k**" felületből kifelé mutatnak a felületelem-vektorok, a "**A_b**" felületnél pedig a gömb középpontja felé mutatnak. Az "**A_ö**" hengerfelületnél pedig annak belseje felé mutatnak a felületi normális vektorok. Így a külső felületről pl. az "**A_ö**" felső felületén, de a cső belsejében, be tudunk jutni a belső felületre, majd az "**A_ö**" felületen vissza tudunk térni, szintén a csőben a külső felületre és eközben mindig a felületből kifelé mutató felületelem-vektorok között, azokat kerülgetve haladunk.

Írjuk fel az impulzustétel 14.2 egyenletet szerinti formáját a megrajzolt ellenőrző felületre. Ezt most megtehetjük, mert a kissé komplikált zárt felületből kizártuk a szilárd testeket, a gömböt és az azt tartó rudat. Az egyenletben szereplő zárt felületi integrált három felületből állíthatjuk össze: az " A_k " és a " A_b " felületeken végzett integrálok összegére, valamint az " A_δ " felületen végzett integrálra. Így az egyenlet a következő:

$$\iint_{A_k} \underline{v} \cdot \rho \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) + \iint_{A_b} \underline{v} \cdot \rho \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) + \iint_{A_\delta} \underline{v} \cdot \rho \cdot (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_{V_F} \rho \cdot \underline{g} \cdot dV - \iint_{A_k} p \cdot d\underline{A} - \iint_{A_b} p \cdot d\underline{A} - \iint_{A_\delta} p \cdot d\underline{A}$$

külső felület belső felület összekötő felületfoly. térf. külső belső összekötő

A bal oldal második és harmadik integrálja zérus, mert a szilárd test felületén, és így az ellenőrző felületen keresztül nincsen átáramlás, így a $\underline{v} \cdot d\underline{A}$ szorzat zérus. A jobb oldal utolsó integrálja, vagyis a tartó rúdon ébredő, a nyomásból származó erők eredője szintén zérus, ha feltételezzük, hogy az áramlás hengersizmetrikus, akkor a rúd szemben lévő felületein ébredő erők kiejtik egymást.

A jobb oldal harmadik tagja a gömb felületén a folyadékra ható, nyomásból származó erőt összegzi, a gömb középpontja felé mutató felületi normálissal ellentétesen hatnak az elemi nyomóerők, amelyek a folyadékot nyomják. Az integrálás eredményeként adódó erő a szilárd fal által a folyadéknak átadott erő, amely ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú, mint a folyadékról a szilárd testre ható erő, amit \underline{R} vektorral jelölünk. **Az " \underline{R} " tehát a folyadék által a szilárd testre gyakorolt erő.** Ezt az erőt kell kiegyensúlyoznunk a rúddal, " $-\underline{R}$ "-el. A fenti egyenletet egyszerűsítve kapjuk a következőt:

$$\iint_{A_k} \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \iiint_{V_F} \rho \cdot \underline{g} dV - \iint_{A_k} p d\underline{A} - \underline{R} \quad 14.4$$

Az egyenlet szerint elegendő a külső felületet úgy kezelni, mint ellenőrző felületet, a szilárd test kizárásával nem kell foglalkozni, viszont egy $-\underline{R}$ erőt figyelembe kell venni az egyenlet felírásakor.

A fenti egyenlethez egy másik gondolatmenettel is eljuthatunk.

Amennyiben az " A_k " felület átlátszatlan, vagy egy **fekete dobozként** kezeljük, akkor a belső felületet nem látjuk, a belső felület nagyságát, alakját nem is kell ismernünk, de az impulzustételt mégis alkalmazhatjuk. A bent lévő szilárd test hatását egy koncentrált erő helyettesíti, ami a rúdon keresztül hat. A rudat átvágjuk az " A_k " felülettel. Az átvágás felületén, amely a rúd keresztmetszete, a nyomás megfelel rúdban kialakuló nyomófeszültségnek. A rúd keresztmetszetét végtelen kicsinek is tekinthetjük, amelyen végtelen nagy nyomás ébred, de a kettő szorzata éppen a " $-\underline{R}$ "-et adja. Ez a mechanikából jól ismert koncentrált erő fogalma. (A 14.4 egyenlet egészen pontosan csak ilyen feltétellel teljesül, ugyanis csak ekkor tehető zárttá az " A_k " felület.)

Az impulzustétel tehát a következő formát ölti, ha stacionárius, súrlódásmentes az áramlás és az ellenőrző felületen belül szilárd test helyezkedik el:

$$\iint_A \underline{v} \rho (\underline{v} d\underline{A}) = \iiint_V \rho \cdot \underline{g} dV - \iint_A p d\underline{A} - \underline{R} \quad 14.5$$

Az " A " felületnek, most az " A_k " felület felel meg. Az \underline{R} vektor előtti negatív előjelre azért van szükség, mert az impulzustételben a szilárd testről a folyadékra ható erőt kell szerepeltetni.

A jobb oldal első tagja a térfogatban lévő folyadék és a szilárd test együttes súlyát jelenti a 14.5 egyenletben, ellentétben a 14.4 egyenlettel, ahol szilárd test által elfoglalt térfogatot kirekesztettük az integrál felírása során.

Természetesen a súly számítását külön lehet választani, csak a folyadék, ill. csak a szilárd test súlyának számítására. Ez a probléma feladatok megoldásánál általában nem jelentkezik, mert a felületbe zárt folyadék súlyát az egyéb erők mellett el szoktuk hanyagolni.

14.2 Sík lapra ható erő



Érjen egy vízszintes, "A" keresztmetszetű, "v" abszolút sebességgel rendelkező szabad sugár egy függőleges sík lapot. A sík lap elegendően nagy ahhoz, hogy a sugarat eredeti irányra merőlegesen elterelje. A sík lap "u" sebességgel mozog vízszintes irányban. Mekkora és milyen irányú erővel hat a víz sugar a lapra?

A feladatot az impulzustétel felhasználásával lehet könnyen megoldani. Az impulzustétellel az áramlás részleteinek ismerete nélkül megválaszolható a kérdés. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a lap "u" sebességgel halad. Ekkor a lapra érkező víz sugar sebessége a laphoz képest

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{u},$$

a laphoz kötött koordináta-rendszerben.

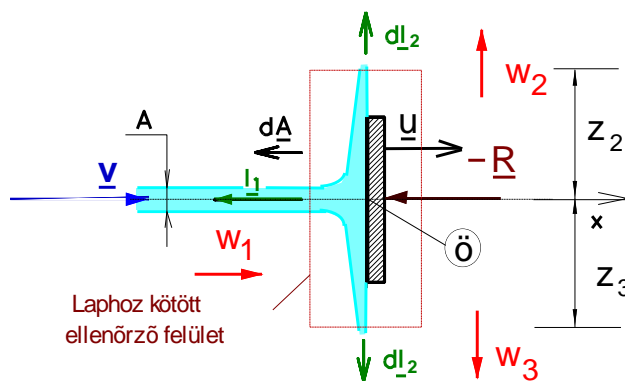
I. Elsőként határozzuk meg a Bernoulli-egyenletből kiindulva a lapot elhagyó víz sugarak relatív sebességét a laphoz kötött koordináta-rendszerben "w₂, w₃" sebességeket:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot z_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot z_1 = \frac{p_3}{\rho} + \frac{w_3^2}{2} + g \cdot z_3$$

Amennyiben elhanyagoljuk a lap kis környezetében a nehézségi erőteret, akkor $z_1 = z_2 = z_3$ feltételezéssel élhetünk. Mindegyik folyadéksugar atmoszférikus nyomású térben halad, ezért $p_1 = p_2 = p_3 = p_0$. E két körülmény figyelembe vételével azt kapjuk, hogy a belépő és a kilépő sugarakban azonos a folyadék relatív sebességének a nagysága: $w_1 = w_2 = w_3$. A jelenség ezzel az egyszerűsítéssel hengersizmetrikusnak tekinthető.

Az impulzustétel alkalmazásakor sokszor élünk ezzel a közelítéssel.



Mozgó sík lapra ható víz sugar

14.6 ábra

II. Második lépésként vegyünk fel egy ellenőrző felületet, amelyet célszerű úgy megrajzolni, hogy

- a jelenség stacioner legyen az ellenőrző felületben (pl. a szilárd test ne menjen ki a felületből),
- ha szilárd testre ható erőt keresünk, akkor a testet vegyük bele az ellenőrző felületbe,
- ahol áramlás van, ott az ellenőrző felület legyen merőleges az áramlási sebességre, vagy legyen azzal párhuzamos, valamint

- az ellenőrző felülettel minden további nélkül kiléphetünk az áramló folyadékból, ha az egyszerűsíti a feladatot.

III. Harmadik lépésként írjuk fel az impulzustételt

$$\iint_A \underline{v} \rho(\underline{v} d\mathbf{A}) = \iiint_V \rho \cdot \underline{g} dV - \iint_A p d\mathbf{A} - \underline{R}$$

(14.5 egyenlet) és állapítsuk meg, hogy mely tagjait kell az adott feladat megoldásánál figyelembe venni.

Mivel a laphoz kötött koordináta-rendszert használunk, a " \underline{v} " abszolút sebesség helyébe a " \underline{w} " relatív sebesség kerül.

Eleve csak stacioner és súrlódásmentes áramlást feltételezünk. Ha a lap áll, az áramlás stacioner, hiszen a vízszög iránya, sebessége időben nem változik. Ha a lap mozog, az áramlás az álló rendszerben instacionárius: A tér egy adott pontjában a mozgó lap helyzetétől függ a sebesség. Ha viszont a koordináta-rendszerünket, és az ellenőrző felületet is, a mozgó laphoz rögzítjük, akkor az áramlás stacionáriussá válik. A jobb oldal első tagját, vagyis a súlyerőt elhanyagoljuk, így az egyenletünk:

$$\iint_A \underline{w} \rho(\underline{w} d\mathbf{A}) = -\iint_A p d\mathbf{A} - \underline{R} \quad 14.6$$

A baloldalon szereplő integrál argumentuma csak az "A" felület azon darabjain lesz zérustól különböző, ahol a folyadék a felületen át kiáramlik, vagy beáramlik. Ezeket a részintegrálokat jelöljük rendre $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$, vektorokkal. $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$ az "A" felületen időegység alatt átáramló folyadékimpulzust fejezik ki, ezért ezeket a továbbiakban impulzusáram vektoroknak, vagy egyszerűen impulzus vektoroknak nevezzük. Ezzel a jelöléssel az egyenlet baloldalán szereplő integrál, amely a folyadék mozgásmennyiségének megváltozását fejezi ki, felírható az impulzusáramok összegeként:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n = \sum_{i=1}^n \underline{I}_i = \iint_A \underline{w} \cdot \rho \cdot \underline{w} \cdot d\mathbf{A} \quad 14.7$$

Hasonló módon a nyomásból származó erők számítását is a részintegrálok összegzésével végezhetjük el:

$$\sum \underline{P} = -\iint_A p \cdot d\mathbf{A} \quad 14.8$$

Ezekkel a jelölésekkel az impulzustétel fenti alakja:

$$\sum \underline{I} = \sum \underline{P} - \underline{R} \quad 14.9$$

azaz a bonyolult felületi integrálok helyett vektorok összeadása szerepel. Az ábrán szereplő ellenőrző felületre mindenütt a légköri nyomás hat, így a nyomóerők eredője zérus. A folyadéksugarakon kívül eső részen ez természetes. A folyadéksugarakban, mint azt korábban láttuk, (Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben), a párhuzamos, egyenes áramvonalakra merőlegesen a nyomás nem változik, azaz egy szabad sugárban állandó a nyomás, és megegyezik a külső nyomással.

Az előző megfontolásokkal a 14.9 egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\sum \underline{I} = -\underline{R} \quad 14.10$$

IV. Negyedik lépésként a teljes, zárt "A" ellenőrző felületre vonatkozó integrált több felületrészen számolt integrál összegeként határozzuk meg.

$\underline{I}_1 = \iint_{A_1} \underline{w}_1 \cdot \rho \cdot (\underline{w}_1 d\mathbf{A})$ tehát a vektor nagysága $|\underline{I}_1| = w_1^2 \rho A_1$ és mivel \underline{w}_1 ellentétes értelmű

$d\mathbf{A}$ -val \underline{I}_1 az ellenőrző felületből kifelé mutat. Általános esetben is az impulzusáram vektorok az ellenőrző felületből kifelé mutatnak, és mindig a sebességgel párhuzamosak.

A lapról körkörös leáramló folyadék elemi impulzusvektorai eredőben zérus vektort eredményeznek, így több impulzusvektor jelen feladatunkban nincs.

A nyomásból származó erők eredője zérus, mert minden pontjában környezeti nyomás, p_0 hat. A súrlódás elhanyagolása miatt, csak a lapra merőleges erők ébredhetnek, tehát az R iránya is csak ilyen lehet.

V. Ötödik lépésként vagy vektorábrát készítünk a 14.9 egyenlet alapján, mint az a 14.3 ábrán látható, vagy felvesszünk egy koordináta-rendszert és koordináta-irányonként írjuk fel az erők egyensúlyát. Figyelembe véve, hogy a vektor megegyező, vagy ellentétes irányítású az "x" tengely pozitív irányításával, az egyes vektorok (esetünkben az \underline{I}_1 vektor) abszolút értékeit vagy pozitív, vagy negatív előjellel kell beírni a 14.10 egyenlet megfelelő oldalára: "x" irányú egyensúly:

$$-I_1 = -R_x \text{ azaz } -\rho w_1^2 A_1 = -R_x = -R$$

azaz az álló lapra ható a folyadékról átadódó erő az

$$R = \rho \cdot w_1^2 \cdot A_1 \quad 14.11$$

képletből számolható.

Felhasználva a $w_1 = v_1 - u$ kifejezést:

$$R = \rho(v_1 - u)^2 A_1$$

Ha a lap a sugárral szemben mozog, akkor a relatív sebesség $v_1 + u$, amennyiben a lap áll akkor az "u" sebesség kiesik a kifejezésből.

14.3 Pelton-turbina



1880-ban az egyesült államokbeli mérnök, **Lester Pelton** feltalálta az akciós, vagy szabadsugár-rendszerű vízturbinát, amely Pelton-turbina néven vált ismertté. Különösen a nagy magasságból alázuhanó víz energiájának felhasználására alkalmas. Kisméretű Pelton-turbinákat alkalmaznak pl. csévélfelhető öntözőberendezéseknél a csévélféldob mozgatására.



Pelton-turbina
14.6 ábra

A 14.6 ábrán egy Pelton-turbina járókerekét látjuk. A Pelton-turbina a nagy sebességgel rálövelt vízszugár mozgási energiáját alakítja mechanikai teljesítménnyé. Nyomásváltozás a lapát előtt és után nincs a sugárban (akciós vízturbina). A számítás során közelítésként feltesszük, hogy azok a lapátok, melyek a vízszugárral érintkeznek, mindig merőlegesen állnak a vízszugárral szemben. (A valóságban a lapátok elfordulása kissé csökkenti a kerületi erőt.) A turbina "D" átmérőjű járókereke " ω " szögsebességgel forog.

Adatok: $D = 1100\text{mm}$; $\omega = \frac{\pi}{2} \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}$; $\vartheta = 80^\circ$; $v_1 = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$A_1 = 10\text{cm}^2$

Kérdések:

a./Határozzuk meg a turbina egy lapátjára ható erőt!

b./Határozzuk meg a turbinára ható átlagos kerület irányú erőt!

c./Határozzuk meg a kerületi sebesség irányába eső R_{kx} erő időbeli változását, ha a turbinalapátok száma $z=18$!

d./Mekkora a turbina teljesítménye az adott üzemállapotban, és hogyan függ a teljesítmény a kerületi sebesség változásától?

Megoldást a következő négy fejezetekben mutatjuk be.

14.3.1 Egy lapátra ható erő

a./ Egy darab "u" sebességgel mozgó turbinalapátra ható erő az impulzustétel alapján határozható meg. A megoldás teljesen hasonlóan történik, mint a mozgó sík lap esetében. A különbség csupán annyi, hogy a lapátról lelépő vízszugárnak is van hatása. A lapáttal együtt mozgó koordináta-rendszerben, az "x" tengely felfelé mutat, felrajzoljuk az ellenőrző felületet, amely körbe veszi a lapátot merőlegesen metszve a vízszugarakat.

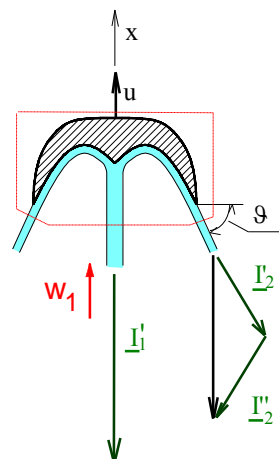
Az ellenőrző felület mentén mindenütt légköri nyomás uralkodik, így a nyomásból származó erők kiesnek. A jelenség stacionárius a lapáthoz kötött koordináta-rendszerben, és a súlyerőt elhanyagoljuk. Így a 14.6 egyenletből a következő tagok maradnak:

$$\iint_A \underline{w} \rho (\underline{w} dA) = -\underline{R}$$

Az egyenlet bal oldalán három impulzusvektor marad, amelyeket a 14.7 ábrán láthatunk:

$$\underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 = -\underline{R}$$

Az "x" irányú összetevők:



Egy lapátra ható erő
14.7 ábra

$$-I'_1 - (I'_2 + I''_2) \sin \vartheta = -R_{1x},$$

ahol az impulzus vektorok a relatív rendszerben

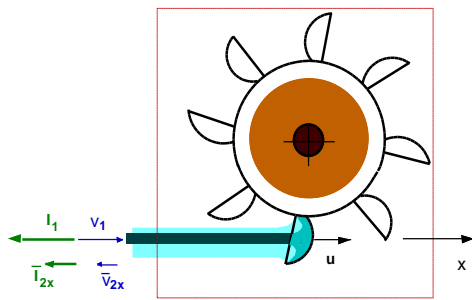
$$I'_1 = \rho A_1 w_1^2 \quad \text{és}$$

$$I'_2 = I''_2 = \frac{1}{2} \rho A_1 w_1^2.$$

Behelyettesítve az "x" irányú egyenletbe kapjuk, hogy az egy lapátra ható erő:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= \rho A_1 w_1^2 \left(1 + \frac{2 \cdot \sin \vartheta}{2} \right) = \\ &= 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 76.8^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sin 80^\circ}{2} \right) = 11706 \text{ N} \end{aligned}$$

14.3.2 Kerékre ható átlagos erő



A kerékre ható erő
14.8 ábra

sebessége jóval kisebb, mint a belépő sebesség, így a vízszög keresztmetszete viszont sokkal nagyobb a belépő keresztmetszetenél. (A gravitáció által okozott sugárelhajlástól eltekintettünk.)

Az impulzustétel "x" irányú egyenlete nagyon egyszerűen adódik, ha az impulzus vektorokat már ismerjük:

$$-I_1 - \bar{I}_{2x} = -\bar{R}_{kx} \quad 14.13$$

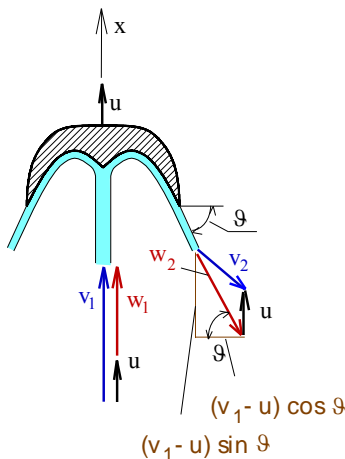
Az impulzus vektorok az abszolút rendszerben:

$$I_1 = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot v_1 \quad 14.14$$

A zárójelben lévő mennyiség az egységnyi idő alatt a kerékre áramló tömeg mennyisége.

A kilépő impulzus "x" irányú komponensét úgy kaphatjuk meg, hogy az időegység alatt kilépő tömeg mennyiségét, (ami ugyanannyi, mint a belépő tömeg) megszorozzuk a kilépő sugár abszolút sebességével, pontosabban annak "x" irányú komponensével "v_{2x}"-el. Tehát

$$\bar{I}_{2x} = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot \bar{v}_{2x} \quad 14.15$$



14.9 ábra

A "v₂" sebesség meghatározásához rajzoljuk fel a turbina forgástengelye alatt tartózkodó lapátra érkező és a lapátot elhagyó folyadéksugarak sebességi háromszögeit (ld. 14.9 ábra). Számítsuk ki elsőként a kerületi sebességet:

$$u = \frac{D}{2} \cdot \omega = \frac{1.1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 50 = 43.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A lapátra érkező és a lapátot elhagyó relatív sebességek abszolút értéke azonos:

$$w_1 = w_2 = v_1 - u = 120 - 43.2 = 76.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A kilépő sebességi háromszög alapján a kilépő abszolút sebesség "x" irányú vetülete:

$$v_{2x} = (v_1 - u) \cdot \sin \vartheta - u = (120 - 43.2) \cdot \sin(80^\circ) - 43.2 = 32.43 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 14.16$$

Feltételezzük, hogy az egy lapátról lelépő abszolút sebesség nem különbözik nagymértékben a kerékből kilépő átlagos abszolút sebesség "x" irányú komponensétől. Amennyiben a különbség számottevő, akkor egy csökkentő faktorról lehet ezt figyelembe venni a következő egyenletben.

Behelyettesítve a 14.13 egyenletbe kapjuk az eredményt:

$$\overline{R}_{kx} = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot (v_1 + v_{2x}) = 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot (120 + 32.43) = 18292\text{N} \quad 14.17$$

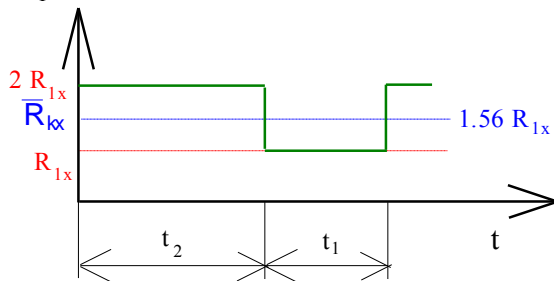
A kerékre ható átlagos erő nem egyezik meg az egy lapátra ható erővel, ugyanis a vízszöglet egyidejűleg több lapátra is hathat.

14.3.3 A kerületi erő változása

c./ Átlagos kerületi erő és az egy lapátra ható erő aránya:

$$\frac{\overline{R}_{kx}}{R_{1x}} = \frac{18292}{11706} = 1.56$$

Az egy időben működő lapátok száma több mint egy. Ez azt jelenti, hogy hol "1", hol "2" lapátra hat erő, a jelenség fordulatonként 18-szor ismétlődik. Azokban a pillanatokban, amikor egy újabb lapát bemetsz a vízszögletbe a működő lapátok száma eggyel megnő 1-ről 2-re. Két lapát egyidejű működésének időtartamát jelöljük "t₂-vel", egy lapát tartózkodási ideje "t₁".



Kerületi erő változása
14.10 ábra

Számítsuk ki "t₁" és "t₂" időket az egy lapátra ható és az átlagos kerületi erők alapján:

$$2 \cdot R_{1x} \cdot t_2 + R_{1x} \cdot t_1 = \overline{R}_{kx} \cdot (t_1 + t_2),$$

valamint

$$t_2 + t_1 = T.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega z} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{2} \cdot 50 \cdot 18} = 4.44\text{ms}$$

$$t_2 = T \cdot \left(\frac{\overline{R}_{kx}}{R_{1x}} - 1 \right) = 4.44 \cdot (1.56 - 1) = 2.49\text{ms},$$

$$t_1 = 1.95\text{ms}$$

14.3.4 A teljesítmény kiszámítása

d./

d/1 megoldás

A turbina teljesítményét a kerületi erőből és a kerületi sebességből kaphatjuk meg:

14.18

$$P_e = R_{kx} \cdot u = 18292 \cdot 43.2 = 790\text{kW}$$

A teljesítmény függését a kerületi sebességtől felírhatjuk, ha a 14.18 egyenletbe behelyettesítjük a 14.17 egyenletet

$$P_e = R_{kx} \cdot u = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot (v_1 + \overline{v}_{2x}) \cdot u \quad 14.19$$

A kapott kifejezésben a \overline{v}_{2x} függ a kerületi sebességtől, amit a 14.16 egyenletből kapunk

$$P_e = R_{kx} \cdot u = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot (v_1 + (v_1 - u) \cdot \sin \vartheta - u) \cdot u$$

$$P_e = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot (1 + \sin \vartheta) \cdot (v_1 - u) \cdot u \quad 14.20$$

A kapott kifejezésből könnyen belátható, hogy ha $u = 0$ és ha $u = v_1$, akkor a teljesítmény zérus. A teljesítmény parabolikusan változik és a maximuma $u = \frac{v_1}{2}$ értéknél adódik. A maximális teljesítmény:

$$P_{\max} = (\rho \cdot A_1 \cdot v_1) \cdot \frac{(1 + \sin \vartheta)}{2} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

Amennyiben a $\sin \vartheta \approx 1$, akkor a maximális teljesítménynél a vízben rejlő összes mozgási energiát felhasználja a turbina.

A szélsőérték ellenőrzését hasznos gyakorlatként az olvasóra bízuk.

d/2 megoldás:

Feltételeztük, hogy nincsenek veszteségek az áramlásban, ezért a víz által elvesztett mozgási energia a kerék hajtására fordítódik.

Az előző fejezetben a forgó "S" alakú csőnél alkalmazott megfontolást használjuk itt is.

Az egységnyi tömegű víz által elvesztett mozgási energia:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2},$$

ahol " v_1 " a belépő, " v_2 " a kilépő vízszög abszolút sebessége.

A " v_2 " sebesség meghatározásához felhasználjuk a v_{2x} kifejezését a 14.16 egyenletből valamint a " v_2 " vízszintes komponensét a 14.9 ábra alapján adhatjuk meg

$$v_{2x} = (v_1 - u) \cdot \sin \vartheta - u$$

és

$$v_{2y} = (v_1 - u) \cdot \cos \vartheta.$$

A kilépő abszolút sebesség négyzete ezek alapján:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (v_1 - u)^2 - 2 \cdot u \cdot (v_1 - u) \cdot \sin \vartheta + u^2 = \\ &= (120 - 43.2)^2 - 2 \cdot 43.2 \cdot (120 - 43.2) \cdot \sin(80^\circ) + 43.2^2 = 35.06^2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

A tömegáram:

$$q_m = v_1 \rho A_1 = 120 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Így a turbina elméleti teljesítménye:

$$P_e = q_m \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right) = 120 \cdot \left(\frac{120^2}{2} - \frac{35.06^2}{2} \right) = 790 \text{ kW}$$

Természetesen a számok behelyettesítése nélkül, a " v_2 " behelyettesítésével a 14.20 egyenlet alakjára lehet hozni ezt a kifejezést is. Ezt hasznos gyakorlatként szintén az olvasóra bízuk.

d/3 megoldás:

Az Euler-turbinaegyenletet is felhasználhatjuk a teljesítmény kiszámítására ugyanúgy, mint a forgó "S" alakú cső esetében.

Az egyenlet használatánál arra kell vigyáznunk, hogy az "1" és "2" indexű pontok helyetcsereélnek, mivel turbináról és nem szivattyúról van szó. A turbinában a közeg energiavesztesége révén hajtja a turbinát.

A 6.28 egyenlet felcserélt indexekkel a következő:

$$H_e = \left(\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + z_2 \right) = \frac{(v_{1u} \cdot u_1 - v_{2u} \cdot u_2)}{g}$$

Az "1" indexű pont a belépő, a "2" indexű a kilépő sugárban van.

A H_e -t elméleti esésmagasságnak, vagy idegen szóval diszponibilis esésnek nevezik (szivattyúknál ez az elméleti szállítomagasság).

A nyomás mindenütt légköri, a magasságok azonosak, a kerületi sebességek azonosak (u), így a turbina elméleti esésmagassága:

$$H_e = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{(v_{1u} - v_{2u}) \cdot u}{g}$$

Az egyenlet jobb oldalán lévő mennyiségeket a **14.9 ábrából** könnyen kiolvashatjuk

$$v_{1u} = v_1 \quad \text{és} \quad v_{2u} = -v_{2x}$$

A második kifejezésben azért szerepel negatív előjel, mert az "u" sebességgel ellentétesen mutat a "v₂" sebesség.

$$H_e = \frac{(v_{1u} - v_{2u}) \cdot u}{g} = \frac{[v_1 + (v_1 - u) \cdot \sin \vartheta - u] \cdot u}{g} = \frac{(v_1 - u) \cdot (1 + \sin \vartheta) \cdot u}{g}$$

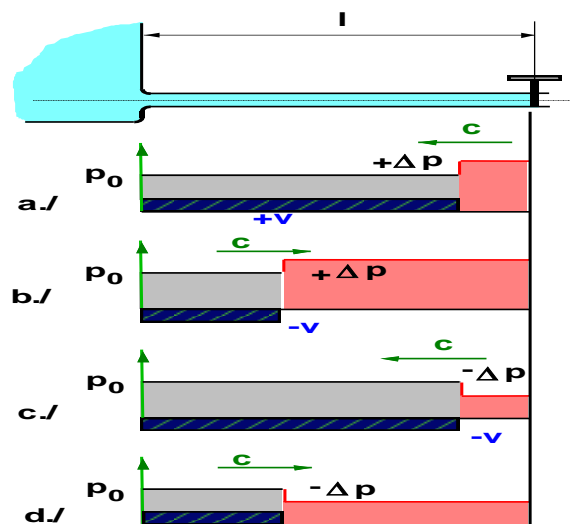
Az elméleti teljesítményt a következők szerint számíthatjuk:

$$P_e = q_v \cdot \rho \cdot g \cdot H_e = (A_1 \cdot v_1) \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{(v_1 - u) \cdot (1 + \sin \vartheta) \cdot u}{g}$$

A kapott kifejezés megegyezik a 14.20 egyenlettel.

14.4 Csővezeték hirtelen zárása

A 13.6 fejezetben egy tartályból kiinduló, viszonylag hosszú csövön keresztül kiáramló folyadék sebességének és gyorsulásának időbeli lefutását vizsgáltuk a cső végén lévő csap hirtelen kinyitásakor. A mostani példánkban azt elemezzük, hogy mi történik abban az esetben, ha hirtelen lezárjuk a folyadék útját a cső végén lévő csappal. Ha az elzárás valóban végtelen rövid idő alatt történne, és sem a csőfalnak, sem a folyadéknak nem volna rugalmassága, akkor elvileg végtelen nagy nyomás keletkezne az elzárás helyén. Ez nem lehetséges, így a jelen példában **nem hanyagolhatjuk el a víz összenyomhatóságát és a csőfal rugalmasságát.**



Csővezeték hirtelen zárásának fázisai
14.11 ábra

14.4.1 A hirtelen záraskor fellépő nyomáslengések

A hirtelen záraskor egy nyomásnövekedési hullám indul el a zárás helyétől "c" sebességgel. A nyomásnövekedés nagysága és haladási sebessége a cső anyagától, geometriai méretétől és az áramló folyadék sebességétől és anyagától függ.

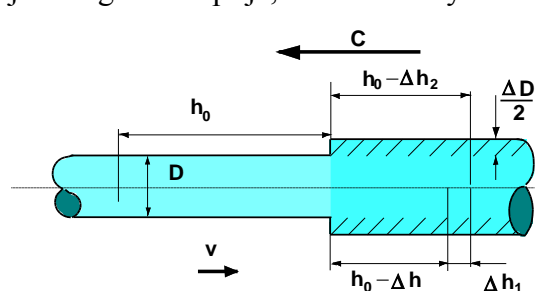
A lezárás helyétől kiindulva egyre több folyadékreszecske megáll, és a cső fala kitágul, valamint a folyadék összenyomódik. A víz eddigi mozgási energiája felhalmozódik egy potenciális energia formájában (ld. **14.11/a ábra**).

A következő fázisban a végtelen nagyra tekinthető tartályról a hullám ellenfázisban visszaverődik. A felfúvódott csőfalban és a folyadékban felhalmozott energia a vizet igyekszik visszalökni a tartályba (ld. **14.11/b ábra**).

A fázis végén az egész csőben a folyadék "v" sebességgel a tartályba áramlik.

A harmadik fázisban a lezárás helyén ismét megállnak a folyadékreszecskek és egy depresszió hullám indul el a lezárt végről. A kifelé áramló folyadék dugó megszívja a csövet (ld. **14.11/c ábra**).

A negyedik fázisban a depresszió alatt lévő cső magába szívja a folyadékot a tartályból, (ld. **14.11/d ábra**), majd a folyamat elindul az első fázistól. A folyadékban lévő belső súrlódás a jelenséget csillapítja, anélkül a folyamat nem állna le.



14.12 ábra

Vizsgáljuk meg részletesebben az első fázisból a hullámfront környékét (ld. **14.12 ábra**). A jelenség elméletét *Allievi olasz tudós* dolgozta ki.

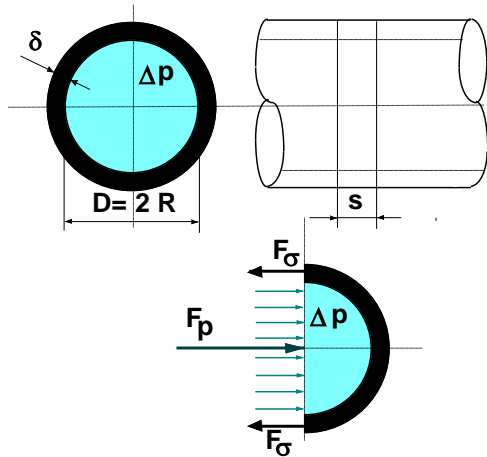
Az **14.12 ábra** bal oldalán a még zavartalanul "v" sebességgel áramlik a víz, a jobb oldalon a víz sebessége hirtelen zérusra esik vissza, a nyomás megnövekszik " Δp " értékkel. A víz kissé összenyomódik, és a csőfal kitágul.

14.4.2 A vízszlop rövidülése

A zavartalan áramlásban válasszunk ki egy " h_0 " hosszúságú vízszlopot. A nagyobb nyomású helyen a cső tágulása miatt, és az összenyomódás miatt a vízszlop csak egy " $h_0 - \Delta h$ " hosszúságú foglalt el. Tételezzük fel, hogy a folyadék összenyomódás miatti " Δh_1 " és a csőfal kitágulása miatti " Δh_2 " rövidülések egymástól függetlenül kiszámíthatók. A

szilárdságtanból jól ismert $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ Hooke-törvény felhasználásával a víz összenyomódását nagyon egyszerűen adhatjuk meg:

$$\frac{\Delta h_1}{h_0} = \frac{\Delta p}{E_v}$$



Csőfalban ébredő feszültség
14.13 ábra

A rugalmas csőfal tágulása miatti vízoszlop rövidülés legyen " Δh_2 ". Így a rövidülés miatti térfogat a megnövekedett gyűrűkeresztmetszetben foglal helyet, vagyis,

$$\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot \Delta h_2 = \frac{(D + \Delta D)^2 - D^2}{4} \pi (h_0 - \Delta h_2).$$

Beszorozva a jobb oldalon és egyszerűsítve:

$$(D + \Delta D)^2 \cdot \Delta h_2 = 2 \cdot \Delta D \cdot \left(D + \frac{\Delta D}{2} \right) \cdot h_0$$

A zárójelben a " D " mellett elhanyagolható a " ΔD ", így a csőtágulás miatti folyadékoszlop relatív rövidülése

$$\frac{\Delta h_2}{h_0} = 2 \cdot \frac{\Delta D}{D} \quad 14.22$$

A csőfalban ébredő feszültséget a **14.13 ábra** alapján adhatjuk meg. A cső egy " s " szélességű darabját vizsgáljuk. A csövet hossz tengelye mentén elvágva felírhatjuk. Írjuk fel az egyensúlyát:

$$F_p = 2 \cdot F_\sigma$$

A nyomásból származó erőt és a feszültségből származó erőket felírva:

$$\Delta p \cdot D \cdot s = 2 \cdot \Delta \sigma_t \cdot \delta \cdot s$$

Amiből a csőfalban ébredő többletfeszültség:

$$\Delta \sigma_t = \frac{\Delta p \cdot D}{2 \cdot \delta} \quad 14.23$$

(A kapott kifejezés vékony falú csövekre érvényes és kazánformulának nevezik.)

Így a csőfal és a vele arányos átmérő fajlagos megnyúlása, megint csak a Hooke-törvényt alkalmazva megadható:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta \sigma_t}{E_{cs}} = \frac{\Delta p \cdot D}{2 \cdot \delta \cdot E_{cs}} \quad 14.24$$

Ezt behelyettesítve a **14.22 egyenletbe**, megkapjuk a csőfal tágulása miatti relatív rövidülést.

$$\frac{\Delta h_2}{h_0} = \frac{\Delta p}{\frac{\delta}{D} \cdot E_{cs}} \quad 14.25$$

A vízoszlop fajlagos rövidülése, a víz összenyomódása és a csőfal tágulásának összege:

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{h_0} = \frac{\Delta p}{E_v} + \frac{\Delta p}{\frac{\delta}{D} \cdot E_{cs}} = \frac{\Delta p}{E_r} \quad 14.26$$

Az " E_r ", az úgynevezett "redukált" rugalmassági modulus, melynek értéke a fenti egyenletből:

Rugalmassági modulus

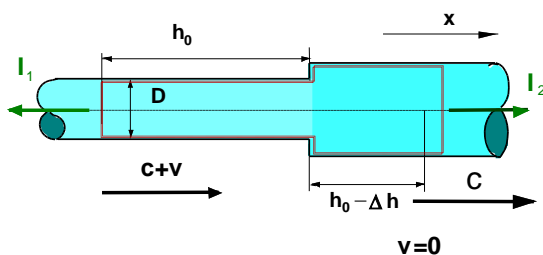
14.1 táblázat

Víz	$2.1 \cdot 10^9$ Pa
Acél	$2 \cdot 10^{11}$ Pa
Öntött vas	$1 \cdot 10^{11}$ Pa

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_v} + \frac{1}{\frac{\delta}{D} \cdot E_{cs}} \quad 14.27$$

A gyakorlatban legtöbbször előforduló anyagok rugalmassági modulus értékei **14.1 táblázatban** találhatóak.

14.4.3 A nyomásnövekedés kiszámítása



14.14 ábra

A **14.11/a ábrán** a nyomáshullám "c" sebességgel terjed jobbról balra. Ha együtt mozgunk a hullámmal, akkor a **14.14 ábrának** megfelelően felvehetünk egy ellenőrző felületet, amin a jelenséget vizsgálva stacioner áramlást látunk.

Írjuk fel a kontinuitás tételét az ellenőrző felület bal és jobb oldali keresztmetszetére. Alkalmazzuk a **14.12 ábra** méreteit.

A baloldali keresztmetszeten "c+v" sebességgel, "D" átmérőn "ρ" sűrűséggel érkezik a víz. A jobb oldali keresztmetszeten pedig "c" sebességgel "D+ΔD" átmérőn és "ρ+Δρ" sűrűséggel távozik.

$$(c+v) \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot \rho = c \cdot \frac{(D+\Delta D)^2 \cdot \pi}{4} \cdot (\rho + \Delta \rho) \quad 14.28$$

Az impulzustételt alkalmazva a **14.14 ábrába** berajzolt ellenőrző felületre, amely közvetlenül a csőfal mellett halad.

$$\begin{aligned} & -(c+v) \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot \rho \cdot (c+v) + c \cdot \frac{(D+\Delta D)^2 \cdot \pi}{4} \cdot (\rho + \Delta \rho) \cdot c = \\ & = \left[\frac{(D+\Delta D)^2 - D^2}{4} \right] \cdot \pi \cdot \Delta p - \frac{(D+\Delta D)^2 \cdot \pi}{4} \cdot \Delta p \end{aligned}$$

A nyomásból származó erők felírásakor csak a p_0 -hoz képesti túlnyomásból származó erőket vettük figyelembe. Ez nagyon sok feladat megoldásánál igen hasznosnak bizonyul.

A jobb oldal első tagja a megnövekedett gyűrűfelületen ébredő nyomóerő.

A bal oldal második tagjába helyettesítsük a tömegáramot a kontinuitásból, valamint a jobb oldalon végezzük el a műveleteket és egyszerűsítsünk, így

$$-(c+v) \cdot D^2 \cdot \rho \cdot (c+v) + (c+v) \cdot D^2 \cdot \rho \cdot c = -D^2 \cdot \Delta p$$

Végigosztva az átmérő négyzetével és kifejezve a nyomásnövekedést, a következőt kapjuk:

$$\Delta p = \rho \cdot (c+v) \cdot v \quad 14.29$$

A folyadék áramlási sebessége több nagyságrenddel kisebb mint "c", a hullám terjedési sebessége, ezért a nyomásnövekedésre:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot v \quad 14.30$$

kifejezést szokták alkalmazni.

14.4.4 A hullámterjedés sebessége

A **14.14 ábrán** lévő ellenőrző felületbe " Δt " idő alatt " $c+v$ " sebességgel " h_0 " hosszúságú folyadékoszlop lép be. Ugyanezen " Δt " idő alatt " c " sebességgel csak " $h_0 - \Delta h$ " hosszúságú folyadékoszlop lép ki. Felírva a " Δt " időt mindkét oldalra kapjuk:

$$\frac{h_0}{c+v} = \frac{h_0 - \Delta h}{c}$$

Fejezzük ki $\frac{\Delta h}{h_0}$ értékét a fenti egyenletből:

$$\frac{c}{c+v} = \frac{h_0 - \Delta h}{h_0} \qquad \frac{c+v}{c+v} - \frac{v}{c+v} = \frac{h_0}{h_0} - \frac{\Delta h}{h_0}$$

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{v}{c+v} \quad 14.31$$

Hasonlítsuk össze a kapott kifejezést a *14.26 egyenlettel*:

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\Delta p}{E_r}$$

A " Δp " helyére írjuk a *14.29 kifejezést* ekkor a következőt kapjuk:

$$\frac{v}{c+v} = \frac{\rho \cdot (c+v) \cdot v}{E_r},$$

amelyből kifejezve a sebesség "+" hullámsebesség értékét

$$c+v = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}} \quad 14.32$$

A hullámsebesség mellett általában elhanyagolható az áramlási sebesség, így a szokásos felírása a hullámterjedés sebességének

$$c = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_{\text{víz}}}} \quad 14.33$$



Egy vízvezetékrendszerben $\ell = 200$ m hosszú egyenes szakasz végén egy gyors zárásra alkalmas tolózárat építettek be. Mekkora nyomásnövekedés jön létre az öntöttvasból készült vezetékben hirtelen záráskor. A vezeték átmérője

$D = 250$ mm, falvastagsága $\delta = 10$ mm. A víz áramlási sebessége $v = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Megoldás:

Elsőként számítsuk ki a redukált rugalmassági modulust a 14.27 egyenletből, az adatokat a 14.1 táblázatból vettük:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_v} + \frac{1}{\frac{\delta}{D} \cdot E_{cs}} = \frac{1}{2.1 \cdot 10^9} + \frac{1}{\frac{10}{250} \cdot 10^{11}} = 7.26 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$E_r = 1.377 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

Látható, hogy az eredő rugalmassági modulus mind a cső, mind a víz rugalmassági modulusánál kisebb. A 14.33 egyenletből a hullámsebesség

$$c = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_{\text{víz}}}} = \sqrt{\frac{1.377 \cdot 10^9}{10^3}} = 1173 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

és végül a nyomásnövekedés 14.30 egyenlet szerint:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot v = 10^3 \cdot 1173 \cdot 1.8 = 21.1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 21.1 \text{ bar}$$

A hirtelen záraskor fellépő nyomásnövekedés jelentős, hisz a vízvezeték rendszerben lévő kb. 10 bar alacsonyomáshoz képest annak majdnem a duplája adódik még hozzá az alacsonyomáshoz. Hirtelen zárásnak minősül a zárás, ha annak helyétől kiinduló hullám visszaérkezése előtt lezárjuk teljesen a szerelvényt. Jelen esetben a hullám oda és visszaverődése:

$$t = \frac{2 \cdot \ell}{c} = \frac{2 \cdot 200}{1173} = 0.341 \text{ s}$$

Ha a tolózárát ennél az időnél rövidebb idő alatt zárjuk le, akkor hirtelen zárásnak minősül, ennél lassúbb zárásnál pedig nem. A lassúbb záraskor a nyomásnövekedés mértéke kisebb a fent kiszámítottnál.

A normál tolózárakat perces nagyságrendű idő alatt lehet csak lezárni. Viszont pl. a golyóscsapokkal a háztartási vízvezetékrendszerben könnyen elő lehet állítani hirtelen zárást és nyitást. Hirtelen nyitáskor hasonló jelenség játszódik le a rendszerben, mint záraskor.

A hirtelen zárás és nyitás az emberi érrendszerben minden szívdobbanáskor bekövetkezik. A szívből lüktetésszerűen kiáramló vér hoz létre hasonló lökéshullámokat. Az érfal rugalmassági modulusa több nagyságrenddel kisebb mint a vizé, vagy vére. Így az eredő rugalmassági modulus, és ezen keresztül a hullámsebesség és a nyomásnövekedés is sokkal kisebb, mint az előző példában. A hullámsebességet mindenki saját magán is megmérheti, például a nyaki és a bokán lévő verőereken a pulzust egyszerre kitapintva, a bokán kb. 0.1-0.2 s-al később érzékeljük a dobbanást. Ebből következtetni lehet, hogy az érrendszerben

$10 \div 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a hullám terjedési sebessége.

14.5 Szárnyrács számítása

Az áramlástechnikai gépek méretezésének alapja Zsukovszkij szárnyelmélete, ill. ennek egyik további kiterjesztése, a szárnyrácsok elmélete. (**Nyikolaj Jegorovics Zsukovszkij 1847-1921** orosz tudós) A ventilátorokban, vagy turbinákban lévő körrácsokat végtelen síkbeli rácsokra képezhetjük le. Az itt végzett számításokat alkalmazhatjuk a forgó rácsokban is.

A 14.15 ábrán egy végtelen szárnyrács részletét látjuk. Az áramlás síkáramlásnak tekinthető. A "z" irányban egységnyi hosszú szárnyakat vizsgálunk.

Adatok: $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\alpha_1 = 40^\circ$; $\alpha_2 = 25^\circ$; $t = 0.3\text{m}$; $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Kérdések:

a./ Mekkora az egy lapátra ható \underline{R} erő, mint vektor?

b./ Bizonyítsa be, hogy az $\underline{R} \perp \underline{v}_\infty$!

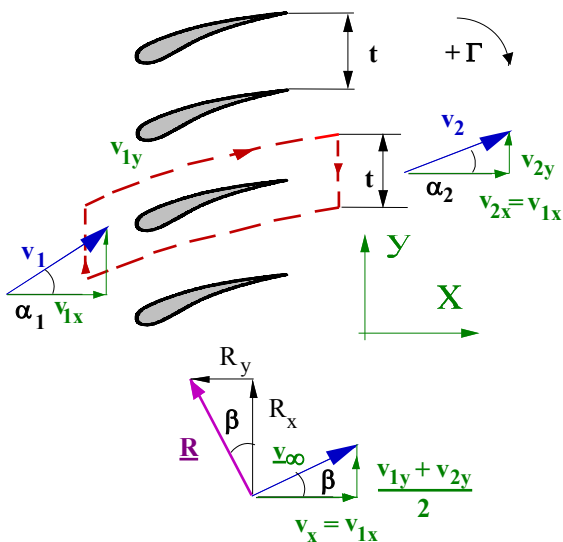
c./ Mekkora a lapátcirkuláció és hogyan értelmezhető $t \rightarrow \infty$ esetében?

Megoldás:

Az **14.15 ábrán** berajzolt ellenőrző felületet alkalmazzuk a megoldáshoz. Alulról és felülről ugyanaz a "t" osztással eltoló áramvonal határolja. A két áramvonal mentén a nyomás és a sebesség azonos módon változik. Jobbról és balról egy-egy függőleges "t" magasságú vonal zárja le a felületet.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos \alpha_1; v_{1y} = v_1 \cdot \sin \alpha_1; v_{2x} = v_2 \cdot \cos \alpha_2; v_{2y} = v_2 \cdot \sin \alpha_2$$



**Szárnyrács
14.15 ábra**

A kontinuitás tétel szerint:

$$v_{1x} \cdot t = v_{2x} \cdot t,$$

tehát

$$v_{1x} = v_{2x}$$

Írjuk fel a Bernoulli-egyenletet az egyik áramvonal két végpontja között:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

Fejezzük ki a nyomáskülönbséget és alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 - v_{1x}^2 - v_{1y}^2)$$

$$p_1 - p_2 = -\rho \cdot (v_{1y} - v_{2y}) \cdot \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}$$

Írjuk fel az impulzustételt a megadott koordináta-rendszerben:

$$0 = (p_1 - p_2) \cdot t - R_x$$

"x" irány:

"y" irányban:

$$-\rho \cdot v_{1x} \cdot t \cdot v_{1y} + \rho \cdot v_{1x} \cdot t \cdot v_{2y} = -R_y$$

ahol a " $\rho \cdot v_{1x} \cdot t$ " kifejezi a be- és kiáramló tömegáramot egyaránt.

A két áramvonalon ébredő, nyomásból származó erők kiejtik egymást. (Bár nyomatékot létrehoznak, de ezzel most nem foglalkozunk. Repülőgépeknél a nyomatékoknak is fontos szerepe van a repülőgép stabilitása szempontjából.)

Rendezzük a két erőkomponensre az előző kifejezést és helyettesítsük be az egyéb egyenletekből a nyomást, így a két erőkomponens a következő:

$$R_x = -\rho \cdot (v_{1y} - v_{2y}) \cdot t \cdot \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}$$

$$R_y = \rho \cdot (v_{1y} - v_{2y}) \cdot t \cdot v_{1x}$$

Vezessünk be a következő jelölést:

$$v_\infty = \sqrt{v_{1x}^2 + \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}\right)^2}$$

A v_∞ , a v_1 és a v_2 vektorok számtani átlaga. Ennek fizikai jelentése is van: messze a rács előtt és után a sebességnek ez az iránya és nagysága.

A $\Gamma = (v_{1y} - v_{2y}) \cdot t$ a berajzolt zárt görbén a óramutató járásával azonos, pozitív értelmű cirkuláció, a két áramvonalon ugyanazt a sebességmezőt kell integrálni ellentétes előjellel, ezért kiesnek az integrálás során.

(A cirkuláció, mint ismeretes, a sebesség zárt görbén vett integrálja $\oint_{\ell} \underline{v} \cdot d\underline{s}$. Eddig a pozitív

körüljárást az óramutató járásával ellentétesen vettük, Zsukovszkij nyomán tértünk át, és csak itt, az ellentétes előjelre.)

Behelyettesítve az erők kifejezésébe:

$$R_x = -\rho \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}\right)$$

$$R_y = \rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x}$$

Tehát:

$$|\underline{R}| = \sqrt{\left[-\rho \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}\right)\right]^2 + [\rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x}]^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot v_\infty \quad 14.34$$

Ez a **Zsukovszkij-tétel**, amely egyedülálló szárnyakra is érvényes.



a./ Az adott feladatban elsőként az " v_2 " sebességet számítjuk ki a kontinuitás felhasználásával:

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{30 \cdot \cos 40^\circ}{\cos 25^\circ} = 25.35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A kilépő sebesség kisebb, mint a belépő, az áramlás lassul, ezért az ilyen típusú szárnyrácsot lassító rácsnak nevezzük. A sebesség csökkenésével a nyomás növekszik, ami előnyös pl. bizonyos típusú ventilátorok vagy szivattyúk járókerekének kialakításakor.

A megadott adatokkal:

$$\Gamma = (v_{1y} - v_{2y}) \cdot t = (v_1 \cdot \sin \alpha_1 - v_2 \cdot \sin \alpha_2) \cdot t = (30 \cdot \sin 40^\circ - 25.35 \cdot \sin 25^\circ) \cdot 0.3$$

$$\Gamma = 2.57 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$v_\infty = \sqrt{v_{1x}^2 + \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}\right)^2} = \sqrt{(30 \cdot \cos 40^\circ)^2 + \left(\frac{30 \cdot \sin 40^\circ + 25.35 \cdot \sin 25^\circ}{2}\right)^2} = 27.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

És végül az erő nagysága:

$$|\underline{R}| = \rho \cdot \Gamma \cdot v_\infty = 1.2 \cdot 2.57 \cdot 27.44 = 84.6 \text{N}$$

Az erő iránya:

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{\rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x}}{\rho \cdot \Gamma \cdot v_\infty} = \frac{30 \cdot \cos 40^\circ}{27.44} = 0.837 \quad \underline{\beta = 33.2^\circ}$$

Az "y" tengelytől balra felfelé mutat "β" szögben az "y" tengelyhez viszonyítva.

b./ Az erő és a megfűvási sebesség vektorok merőlegesek, ha a skalár szorzatuk zérus. Írjuk fel a két vektort és a skalár szorzatukat:

$$\underline{R} = -\rho \cdot \Gamma \cdot \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \cdot \underline{i} + \rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x} \cdot \underline{j} \quad \text{és} \quad \underline{v}_\infty = v_{1x} \cdot \underline{i} + \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \cdot \underline{j}$$

$$\underline{R} \cdot \underline{v}_\infty = -\rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x} \cdot \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} + \rho \cdot \Gamma \cdot v_{1x} \cdot \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} = 0$$

c./ A $\Gamma = (v_{1y} - v_{2y}) \cdot t$ kifejezésben, ha $t \rightarrow \infty$, akkor $v_{1y} \rightarrow v_{2y}$, de a szorzatuk állandó marad.

Hasonlóan a potenciális örvényhez, ha a középpontot körülvevő körön vizsgáljuk a cirkulációt, akkor:

$$\Gamma = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

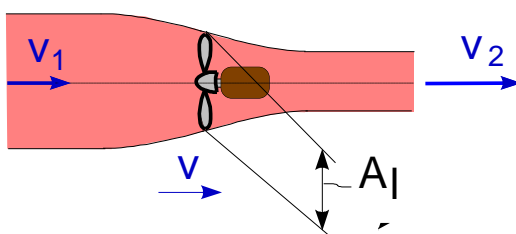
a befoglaló körök sugarától függetlenül a cirkuláció állandó marad.

A 14.34 tétel olyan esetekben is érvényes, ha a "Γ" cirkulációt nem szárny, hanem bármi más (pl. forgó henger, megpörgetett ping-pong, vagy teniszlabda) hozza létre.

Érdeemes megjegyezni, hogy egy szárny körül kialakuló cirkulációt a szárny felületén ébredő sűrűdés hozza létre. A szárnytól távolabb a sűrűdésnek a hatása csökken, ezért használhattuk ott a Bernoulli-egyenletet.

14.6 Légcsavar sugárelmélete

A légcsavar repülőgép, helikopter, vagy egyéb jármű hajtására szolgál. A szükséges tolóerőt a levegőből, annak gyorsítása révén szolgáltatja. A szabad légtérben légcsavarral hajtott repülőgép halad " v_1 " sebességgel. A légcsavar a haladás irányával ellentétes irányban tovább gyorsítja a szembejövő levegőt, ezáltal szolgáltat vonóerőt a repülő számára. A 14.16 ábra a légcsavaron áthaladó levegőt határoló áramcsövet mutatja a repülőgéphez kötött rendszerben.

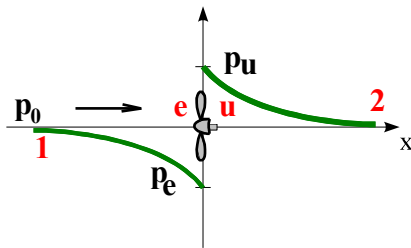


Légcsavar
14.16 ábra

Határozzuk meg a légcsavarra ható erő nagyságát! Úgy tekinthetjük, hogy a légcsavar a rajta átáramló levegő nyomását ugrásszerűen megnöveli. A légcsavarhoz hozzááramló és a légcsavart elhagyó levegő jó közelítéssel sűrűdésmentesnek tekinthető áramlással folyamatosan gyorsul.

Az "1" és "2" pontok között közvetlenül nem alkalmazhatjuk a Bernoulli-egyenletet, mert szilárd testen, a légcsavaron kellene áthaladnunk, ezért alkalmazzuk a Bernoulli-egyenletet a 14.17 ábrán látható "1-e" és "u-2" szakaszokon:

$$p_0 - p_e = \frac{\rho}{2} (v_e^2 - v_1^2) \quad p_u - p_0 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_u^2)$$



Nyomás változása a légsavár közelében
14.17 ábra

Az "e" és "u" pontokban az áramlási sebesség közelítőleg azonos és megegyezik a légsavaron átáramló levegő sebességével. Összeadva a fenti két egyenletet a következőt kapjuk:

$$p_u - p_e = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad 14.35$$

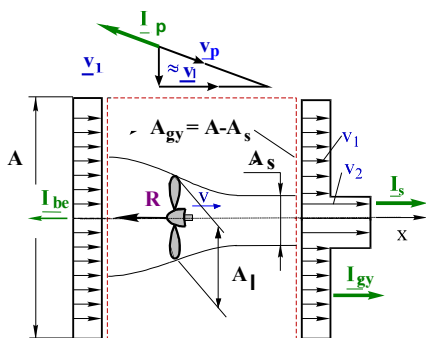
Amelyből a vonóerő meghatározható:

$$F_v = A_\ell(p_u - p_e) = A_\ell \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad 14.36$$

A légsavaron áthaladó levegő átlagsebességének meghatározásához az impulzustételt kell alkalmazni.

Válasszuk az ellenőrző felületet egy olyan nagyméretű hengernek, amely mentén a nyomás már állandónak tekinthető. Mozogjon az ellenőrző felület a repülőgép sebességével, így az áramlás stacionárius. A légsavarra ható erő a ki- és belépő impulzusáram vektorok eredőjéből számítható:

$$\underline{I}_{be} + \underline{I}_s + \underline{I}_{gy} + \underline{I}_p = -\underline{R}$$



14.18 ábra

Az ábrán megrajzoltuk annak az áramcsőnek a meridián metszetét amelyben a légsavaron áthaladó levegő áramlik. Ebben az áramcsőben a levegő "v1" sebességről "v2" sebességre gyorsul fel, és "As" sugárkeresztmetszetben hagyja el az ellenőrző felületet.

A kontinuitás szerint az ellenőrző felületen be- és kiáramló tömegáramok összege zérus, ezért a paláston beáramló tömeg a következő összefüggéssel számítható:

$$q_{mp} = (v_2 - v_1)\rho A_s$$

A paláston áthaladó áramvonalak igen kis szögben metszik az ellenőrző felületet, ezért az impulzusáram számításakor a helyi sebesség tengellyel párhuzamos összetevője jól közelíthető a "v1" sebességgel. Így

$$\underline{I}_p = \int_{A_p} \underline{v}_p \rho \underline{v}_p dA \cong \underline{v}_1 \int_{A_p} \rho \underline{v}_p dA = \underline{v}_1 q_{mp}$$

A forgásszimmetria miatt a vektorok az "x" tengellyel párhuzamosak:

$$I_{be} = v_1^2 \rho A, \quad I_{gy} = v_1^2 \rho (A - A_s)$$

$$I_s = v_2^2 \rho A_s, \quad I_p = v_1 (v_2 - v_1) \rho A_s$$

$$-v_1^2 \rho A + v_2^2 \rho A_s + v_1^2 \rho (A - A_s) - v_1 A_s \rho (v_2 - v_1) = -R$$

$$\rho A_s v_2 (v_2 - v_1) = -R$$

Tehát a vonóerő negatív koordinátairányba mutat: $F_v = |R|$

Az áramcsőre alkalmazható kontinuitás szerint: $\rho A_s v_2 = \rho A_\ell v$

$$F_v = \rho A_s v_2 (v_2 - v_1) = \rho A_\ell v (v_2 - v_1) \quad 14.37$$

Az impulzustételből és a korábban felírt Bernoulli-egyenletből kapott végeredményeket egyenlővé téve:

$$F_v = \rho A_\ell v (v_2 - v_1) = \frac{\rho}{2} A_\ell (v_2^2 - v_1^2) = \rho A_\ell \frac{v_2 + v_1}{2} (v_2 - v_1) \quad 14.38$$

Ebből a légsavaron átáramló levegő sebessége:

$$v = \frac{v_2 + v_1}{2}, \quad 14.39$$

vagyis a légsavaron való átáramlás átlagsebessége egyenlő a légsavarsugárban messze a légsavar előtt és messze a légsavar mögött uralkodó sebességek számtani közepével.

A levezetésben a légsavart idealizáltuk, a sebességeket mindenütt a tengellyel párhuzamosnak vettük és figyelmem kívül hagytuk, hogy a légsavar meg is forgatja a levegősugarat, valamint azt sem vettük figyelembe, hogy a légsugár a környező levegőből magával ragad bizonyos mennyiségű levegőt, ami a sebesség csökkenésével és a mozgatott légmennyiség növekedésével jár. (Ez utóbbi azért nem okoz hibát, mert az impulzus nem változik. Belső erő a rendszer impulzusát nem változtatja meg.)

A repülőgépre szerelt légsavar "v₁" sebességgel hasznos teljesítményt szolgáltat.

$$P_h = F_v \cdot v_1 \quad 14.40$$

Az ideális légsavar hajtásához szükséges teljesítményt megkaphatjuk akkor, ha a légsavar által a levegőnek átadott teljesítményt meghatározzuk. Például oly módon, mint ahogy az Euler-turbinaegyenletnél tettük (12.18 egyenlet):

$$P_{\text{oid}} = q_v \cdot \Delta p_{\text{ö}} = v \cdot A_\ell \cdot (p_u - p_e) \quad 14.41$$

Az össznyomás változása megegyezik a légsavaron létrejött statikus nyomás növekedésével, hisz a sebességet azonosnak vettük az "e" és "u" pontokban. A $A_\ell \cdot (p_u - p_e)$ kifejezés éppen a légsavarra ható vonóerővel egyenlő, így

$$P_{\text{oid}} = v \cdot F_v$$

Az ideális légsavar úgynevezett **propulziós hatásfoka** a következőt jelenti:

$$\eta_{\text{pr}} = \frac{P_h}{P_{\text{oid}}} = \frac{F_v \cdot v_1}{F_v \cdot v} = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\frac{v_1 + v_2}{2}} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} \quad 14.42$$



A propulziós hatásfok ideális, veszteségmentes esetben adja meg a hajtás hatásfokát.

Adatok: $A_\ell = 1 \text{ m}^2$; $v_1 = 90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Kérdések:

a./ Számítsuk ki az "A₁" felületű légsavarra ható vonóerőt (vagy hajócsavar esetén tolóerőt), ha a "v₁" sebességgel mozgó repülőgéphez rögzített koordináta-rendszerben a légsavart elhagyó levegő "v₂" sebességre gyorsul fel!

b./ Határozzuk meg a légsavar ideális propulziós hatásfokát!

Megoldás:

a./ A 14.36 egyenletből számíthatjuk ki a vonóerőt

$$F_v = A_\ell \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = 1 \cdot \frac{1.2}{2} \cdot (150^2 - 90^2) = 8640 \text{ N}$$

b./ A 14.42 egyenletből számíthatjuk ki a propulziós hatásfokot:

$$\eta_{pr} = \frac{P_h}{P_{sid}} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} = \frac{2}{1 + \frac{150}{90}} = 0.75$$

14.7 Az ideális szélgenerátor

A szélmotor segítségével a szél mozgási energiáját lehet átalakítani számunkra hasznos, energiává, pl. villamos energiává. A szél, mint megújuló energiaforrás, a Föld bizonyos helyein jól, és már ma is gazdaságosan felhasználható energiaforrás. Hollandiában például már évszázadok óta szélmalomokat használnak víz szivattyúzására és egyéb célokra. A fényképen látható szélérőmű tengelye kb. 50-60 m magasságú és a szélkerék átmérője is eléri az 50 m-t. A névleges teljesítménye 450 kW. (Magyarországon folynak a szélenergia gazdaságos hasznosításának vizsgálatai.) A szélkerék megfordított munkafolyamatú légsavár. A szélgenerátor a levegő lelassítása árán munkát szolgáltat. A **14.19 ábrán** egy szélgenerátort látunk, lapátokkal, generátorral és a szélirányba állító szerkezettel. Az ideális szélgenerátor elméletében a légsavarnál levezetett összefüggéseket alkalmazhatjuk, csak figyelembe kell vennünk, hogy a szélkerék előtti sebesség nagyobb mint a szélkerék utáni. A szélgenerátoron áthaladó légsugarat a **14.20 ábrán** látjuk. Határozzuk meg az ideális szélgenerátor által a szélből kivehető hasznos teljesítményt! A szélgenerátor felületén átáramló levegő tömegáramát a

$$q_m = \rho \cdot A_{sz} \cdot v$$

kifejezés adja, ahol a "v" sebesség a szélgenerátor síkjában érvényes átlagos axiális sebesség.



Kulcsi szélgenerátor

<http://www.alternativenergia.hu/kulcsi-szeleromu-video/6903>

14.19 ábra

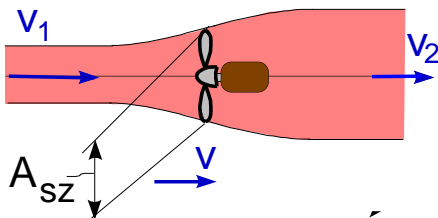
Ha figyelembe vesszük, hogy ez a sebesség a szélgenerátor előtti és a szélgenerátor utáni sebesség számtani közepeként számítható, akkor a térfogatáram

$$q_m = \rho \cdot A_{sz} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Az ideális szélgenerátor a levegő által leadott energiát teljes egészében hasznosítja. Jelen esetben az átalakított energia kiszámításához elegendő mozgási energia csökkenésével számolni, mert a nyomás az "1" és "2" pontokban azonos, így az ideális teljesítmény:

$$P_{id} = q_m \cdot \frac{1}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_{sz} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

Adott " v_1 " szélességnél kérdéses, hogy mennyire kell lelassítanunk a szelet, hogy a legtöbb energiát nyerjük?



Szélgenerátor
14.20 ábra

Az előző gondolatmenetet folytatva, ha a szél által elveszített mozgási energiát hasznosítja a kerék, akkor a kerék mögött meg kell állítani a szelet. Csakhogy ebben az esetben a levegő a szélgenerátor mögöl nem fog eltávozni. (El kell onnan "lapátolni".) Tehát a kilépő sugárban is kell mozgási energiát hagyni, a levegő eltávozására.

Vizsgáljuk meg a fenti kifejezést a " v_2 " sebességet változtatva, mikor kapunk maximális teljesítményt adott

" v_1 " sebességnél. Tehát keressük a teljesítmény deriváltjának zérushelyét.

$$\frac{\partial P_{id}}{\partial v_2} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot A_{sz} \cdot \frac{\partial [v_1^3 + v_1^2 \cdot v_2 - v_1 \cdot v_2^2 - v_2^3]}{\partial v_2} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot A_{sz} \cdot (v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 - 3 \cdot v_2^2)$$

A zárójelben lévő kifejezés zérushelyén van szélsőérték. Átrendezve a zárójelben lévő kifejezést és nullával egyenlővé téve:

$$3 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right) - 1 = 0,$$

amelyből

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \left\langle$$

-1

Számunkra csak a pozitív gyöknek van fizikai jelentése. Még meg kell vizsgálnunk, hogy maximuma van-e a kifejezésnek, vagy minimuma. Ezt a második derivált alapján tudjuk eldönteni, ha az adott értéknél a második derivált negatív, akkor valóban maximuma van a teljesítménynek.

$$\frac{\partial^2 P_{id}}{\partial v_2^2} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot A_{sz} \cdot (-2 \cdot v_1 - 6 \cdot v_2) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot A_{sz} \cdot (-12 \cdot v_2) < 0$$

Az adott esetben ez fennáll. Nézzük ezek után, hogy mekkora a maximális teljesítmény, amikor a szélkerék az előtte uralkodó szél sebességét $\frac{1}{3}$ -ra fékezi le. Visszahelyettesítve a kilépő sebesség helyére a belépő sebesség $\frac{1}{3}$ -át, a maximális ideális teljesítmény:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_{\text{sz}} \cdot \frac{v_1 + \frac{v_1}{3}}{2} \cdot \left[v_1^2 - \left(\frac{v_1}{3} \right)^2 \right] = \frac{16}{27} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_{\text{sz}} \cdot v_1^3$$

A kifejezés szerint, az adott keresztmetszeten átáramló széltejesítménynek ideális esetben is csak a $\frac{16}{27}$ részét tudjuk hasznosítani. Ez a kifejezés a Betz-féle formula. A valóságos szélgenerátor a különböző veszteségek miatt ennek a teljesítménynek mintegy 65-80% szolgáltatja.



Példaként válasszunk egy kiskertben szokásosan felállított kb. 2 m átmérőjű szélkereket $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ szélességnél

$$P_{\max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_{\text{sz}} \cdot v_1^3 = \frac{16}{27} \cdot \frac{1.2}{2} \cdot \frac{2^2 \cdot \pi}{4} \cdot 10^3 = 1117 \text{ W}$$

teljesítményt szolgáltat ideális esetben. Ez a kifejezés a Betz-féle formula.

Megjegyzés:

Magyarországon bizonyos területek szóbajöhetnek a szélenergia gazdaságos hasznosítására. A legtöbb esetben a szélesség néhány m/s értékben mérhető a szélkerék átlagos elhelyezésének magasságában, amely legalább 8-15 m kell legyen, hogy az épületek, fák zavaró hatását kizárjuk. A fényképen látható szélkerék jóval nagyobb kb. 50-60 m magasságú és a szélkerék átmérője is eléri az 50 m-t. Egy ekkora szélkeréknek a fenti példa szerinti maximális ideális teljesítménye 698 kW. A névleges teljesítmény ennek 65-80%-a, figyelembe véve az áramlási és elektromos veszteségeket is, így kb. 450 kW névleges teljesítményt kapunk.

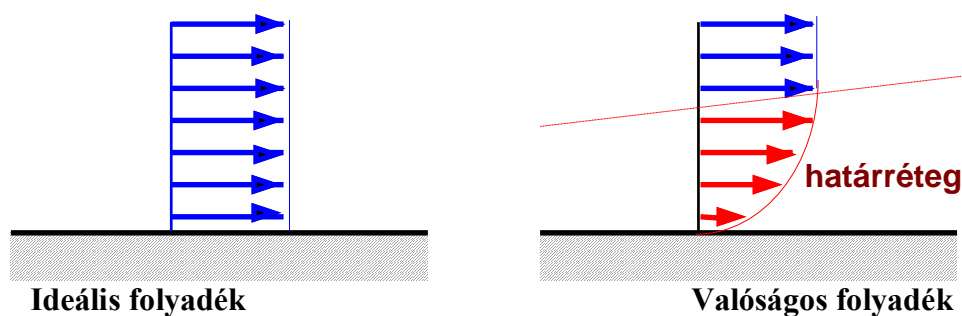


15. Súrlódásos folyadékok

15.1 Viszkózitás

Az eddigi tárgyalásban elhanyagoltuk a folyadék belsejében ébredő súrlódást. Ez nagymértékben egyszerűsítette a mozgás matematikai leírását. A súrlódás elhanyagolásával kapott eredmények a valóság jó közelítését adják kis belső súrlódású folyadékok esetében, és ha a sebesség az áramlás irányában növekszik (konfúzoros áramlás). Nem hanyagolható el a súrlódás a nagy belső súrlódású folyadékokban, mint pl. olaj áramlása csapágyban. Kis belső súrlódású folyadékokban is megváltoztatja a súrlódás az áramlást olyankor, amikor a sebesség az áramlás irányában haladva csökken (diffúzoros áramlás).

Szilárd fal közelében minden súrlódásos folyadékban alapvetően megváltozik az áramlás jellege. Az ideális folyadék közvetlenül a fal mellett is véges nagyságú sebességgel rendelkezik, tehát csak a falra merőleges sebesség zérus. **A viszkózus folyadék pedig hozzátapad a falhoz, így a szilárd falhoz viszonyítva sebessége mindig zérus.** A faltól távolabb éri el a külső áramlás sebességét. Az áramlásnak ez a rétege a **határréteg**, amely nagy jelentőséggel bír az áramlás kialakításában.

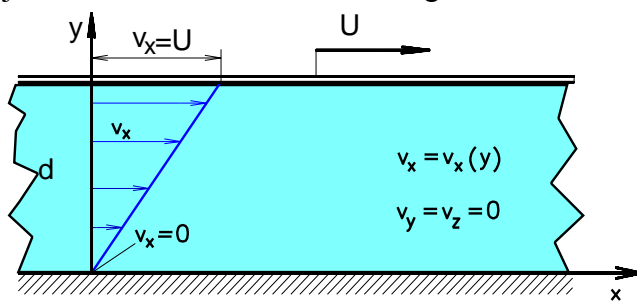


15.1 ábra

A folyadéksúrlódás definíciója Newtontól származik.

Vizsgáljunk két sík lap között áramló folyadékot. Az alsó sík lap áll, a felső pedig "U" sebességgel párhuzamosan halad az alsóval (ld. **15.2 ábra**). A folyadék hozzátapad mind az alsó, mind a felső laphoz, így a felül "U" sebességgel alul pedig zérus sebességgel áramlik a közeg. A lapok között, azokkal párhuzamos áramlás alakul ki, így csak "x" irányú sebességgel rendelkezik a folyadék. A két lap között a sebesség lineárisan változik.

A sík lap mozgatásához bizonyos erőt kell kifejteni, ennek az erőnek az egységnyi felületre jutó mértéke a csúsztatófeszültség.



Két sík lap közötti áramlás
15.2 ábra

A sebesség változása és a csúsztatófeszültség közötti kapcsolatot Newton fedezte fel, amely kimondja, hogy

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv_x}{dy} \quad 15.1$$

A " μ " egy, a folyadék tulajdonságaitól függő arányossági tényező, a **dinamikai viszkózitás**, amelynek mértékegységét az egyenletből történő kifejezése után az alábbi módon adhatjuk meg:

$$[\mu] = [\tau] \left[\frac{1}{\frac{dv_x}{dy}} \right] = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2 \text{m}^2} \frac{1}{\frac{\text{m/s}}{\text{m}}} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

Az áramlástani törvényekben gyakran a használjuk a **kinematikai viszkozitást** is, ami a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad 15.2$$

$$[\nu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

A viszkozitás néhány gyakran előforduló egyéb egységét, valamint a víz és a levegő dinamikai és kinematikai viszkozitását adtuk meg a **15.1 táblázatban**. A dinamikai viszkozitás a hőmérséklettől függ, a nyomástól való függése csekély. Csak a gázoknál tapasztalható kismértékű nyomástól való függés.

Különböző anyagok dinamikai viszkozitását a hőmérséklet függvényében az **1. függelékben** ábrázoltuk.

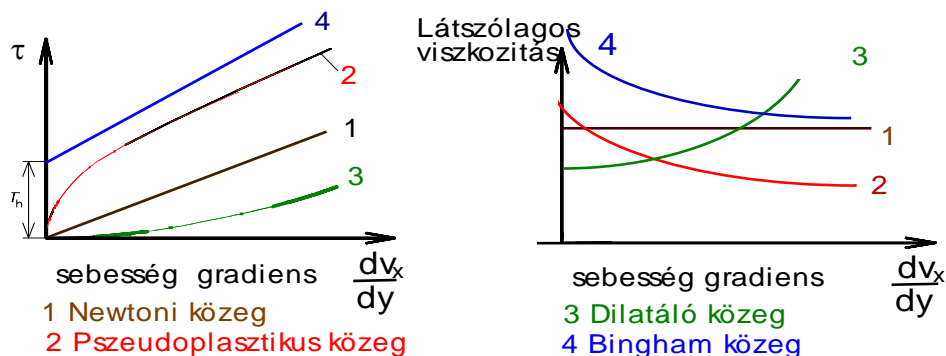
Azokat a folyadékokat, amelyek a Newton-féle viszkozitási törvény szerint viselkednek, *(15.1 egyenlet)* **newtoni folyadékoknak** nevezzük.

15.1 táblázat Kinematikai és dinamikai viszkozitás egységei és értékei

	Dinamikai viszkozitás	Kinematikai viszkozitás
SI	$\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$, Pa · s, vagy $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
cgs egység	poise = $\frac{\text{dyn} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}}$ centipoise = poise/100	stokes = $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ centistokes = stokes/100
Víz 4 °C	$130 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$	$1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
Levegő 0 °C; 1bar	$1.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$	$14.4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

A Newtoni folyadékok a mérnöki gyakorlatban legtöbbször előforduló közegek: pl. a víz, a levegő, olajok, gázok.

Számos olyan folyadék van azonban, amelyeknél a csúsztatófeszültség nem egyenesen arányos a deformáció sebességével. Ezeket a folyadékokat **nemnewtoni** folyadékoknak nevezzük. A nemnewtoni közegekkel a reológia tudománya foglalkozik.



Különböző közegek reológiai görbéi
15.3 ábra

A 15.3. ábra bal oldali diagramján néhány közeg reológiai görbét láthatjuk, amelyek a folyadékokban keletkező " τ " csúsztatófeszültség és a $\frac{dv_x}{dy}$, deformáció sebesség kapcsolatát mutatják. A jobboldali diagramon pedig a látszólagos viszkozitást rajzoltuk fel a különböző anyagokra. Ezek az anyagok, mind időtől független reológiai görbével rendelkeznek. Az "1" jelű görbe egy newtoni közegre vonatkozik, ennek viszkozitása állandó. A "2" és "3" jelű görbék az ún. **hatványfüggvény közegekre** vonatkoznak, amelyeknél a csúsztatófeszültség és a deformáció sebesség közötti kapcsolatot egy hatványfüggvény írja le:

$$\tau = k \cdot \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^n$$

$n < 1$ esetén a "2" **pszeudoplasztikus közegről** beszélünk, mert a görbe jellege hasonlít a "4" jelű közegéhez, amit **plastikus**, vagy **Bingham-közegnek** neveznek. Ezek a közegek általában hosszú láncú molekulákat tartalmaznak. E molekulák "elrendezéséig" a deformáció sebesség adott növekedéséhez nagy csúsztatófeszültség-változás tartozik, később kisebb. Ilyen anyagok például a vérplazma, polietilén és vízzel kevert agyag.

Az $n > 1$ hatványkitevővel rendelkező "3" jelű, ún. **dilatáló** közegekre jellemző, hogy kis sebességű deformációjához viszonylag kis csúsztatófeszültség tartozik, növekvő deformáció-sebességhez rohamosan növekvő csúsztatófeszültség párosul. Ilyen közegek pl. az ásványi porokat tartalmazó zagyok. Kis sebességnél a részecskék között lévő folyadék az egymáson elmozduló szilárd részecskék között kenőanyagként szolgál. Nagyobb sebességnél a szilárd részecskék egyre gyakrabban egymáshoz ütközve nagyobb belső súrlódást produkálnak.

A "4" jelű a **Bingham-közeg**, vagy **pszeudoplasztikus folyadékra**, amelynek egy meghatározott " τ_h " határ-csúsztató feszültség elérése után kezdenek egymáson elcsúszni a közeg rétegei. Ameddig a csúsztatófeszültség nem éri el a határfeszültséget, addig az anyag rugalmas, deformálható testként viselkedik, deformálódik, de a feszültség megszűnése után visszanyeri eredeti alakját. A határfeszültség felett az anyag megfolyik, a feszültség megszűnése után nem nyeri vissza eredeti alakját. (Tulajdonképpen az acél is a folyáshatáron túl ilyen anyagként viselkedik.)

$$\tau = \tau_h + \mu_\infty \frac{dv_x}{dy},$$

ahol " μ_∞ " a közeg sajátosságaitól függő állandó. A **plastikus folyadékokra** általában valamilyen térhálós szerkezet a jellemző, amelynek τ_h hatására bekövetkező összeomlása

után kezd áramlani a közeg. Plasztikus közeg pl. az olajfesték, fogkrém, aszfalt, csokoládé, vaj és zsírok.

Bizonyos anyagoknál a látszólagos viszkozitás egyéb tényezőktől is **függ**, például **az időtől**, vagy a megelőző deformáció sebességétől. Ide tartoznak az "emlékező", dilatáló stb. anyagok. A nylon, néhány gél, több polimer tartozik az anyagoknak ebbe a csoportjába.

15.2 Súrlódásos közeg mozgásegyenlete

A folyadékmozgás leírásában eddig nem vettük figyelembe a belső súrlódás hatását. A mozgásegyenletekben: az **Euler-egyenletben** (ld. 12.5 és 12.6 egyenletek) és az **impulzustételben** a körülhatárolt folyadékra ható erők közül csak a nyomásból származó erőket, mint a felületen ható erőt, és a súlyerőt, mint térfogati erőt vettük figyelembe.

A súrlódás figyelembe vétele a mozgásegyenletben bonyolult levezetés során lehetséges, amelyet jelen jegyzetben nem részletezünk.

Newtoni közeget és állandó sűrűséget feltételezve a mozgásegyenletre a **Navier-Stokes egyenletet** kapjuk:

(**Claude-Louis Navier francia és George Gabriel Stokes 1819-1903** egymástól függetlenül vezettek le.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad 15.3$$

A négy ismeretlen (v_x, v_y, v_z és p) meghatározásához szükséges negyedik egyenlet a folytonosság tétele, amely $\rho = \text{áll.}$ esetén a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad 15.4$$

alakban írható fel. A fenti bonyolult egyenletrendszer különböző egyszerűsített esetekben analitikusan is megoldották. A siklócsapágyak elméletében több csapágy típusra sikerült analitikus, vagy félig analitikus megoldásokat találni stacionárius esetben. A határréteg elméletben egy egyszerűsített egyenletrendszer hoztak létre a Navier-Stokes-egyenletből, amely határréteg-egyenlet néven ismert az áramlástanban.

Az utóbbi időben instacioner, turbulens, háromdimenziós áramlásokra is előállították a megoldását.

Vektoros írásmódban a Navier-Stokes-egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad 15.5$$

Látható, hogy a Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldal utolsó tagjában, a $\nu \Delta \mathbf{v}$ tagban különbözik a súrlódásmentes esetre levezetett Euler-egyenlettől (ld. 12.6 egyenlet).

15.3 Navier-Stokes-egyenlet megoldása két sík lap között

A 15.2 ábrán látható álló és mozgó sík lap között kialakuló áramlást, sebességmegoszlást határozzuk meg a N-S-egyenletből. Természetesen a megoldását már előre tudjuk, hisz az ábrába berajzolt lineáris sebességprofil az eredmény.

A Navier-Stokes-egyenletek és a kontinuitás egyenletből a következő egyszerűsítéseket tehetjük a feladatban megadott esetre:

- stacioner áramlást vizsgálunk
- legyen $v_x = u$

$v_y = v_z = 0$; valamint azok összes deriváltja is zérus

- valamint minden változó "z" és "x" irányú változása is legyen zérus, így síkáramlást feltételezünk, és minden "x" helyen azonos nyomást és sebességet feltételezünk.
- a nehézségi erőtér hatását elhanyagolhatjuk; $g_x = g_y = g_z = 0$

A fenti egyszerűsítések után a következőket kapjuk (mivel minden csak "y"-tól függ, ezért egyenes "d" használható a parciális derivált helyett):

$$0 = \nu \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} \quad 15.6$$

$$0 = \frac{dp}{dy} \quad 15.7$$

A második egyenlet szerint az áramvonalakra merőlegesen a nyomás nem változik. Az első egyenletet " ν "-vel osztva és kétszer integrálva a következőt kapjuk:

$$u = C_1 \cdot y + C_2$$

Két peremfeltétel megadása szükséges az egyértelmű megoldáshoz, amik a tapadás törvényéből $y = 0$ -nál

$$u = 0$$

$y = d$ -nél

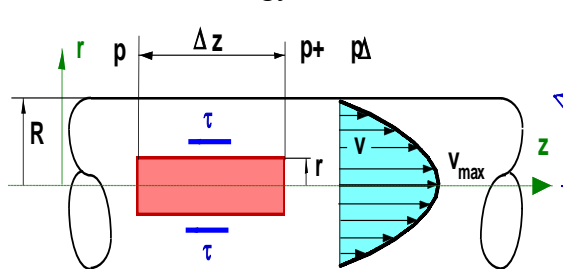
$$u = U.$$

Ezeket behelyettesítve kapjuk a sebesség változását egy álló és egy mozgó sík lap között:

$$u = \frac{U}{d} \cdot y$$

15.3 Megoldás hengeres csőben

A csővezetékben eddig mindig csak átlagsebességekkel számoltunk, akár a kontinuitást akár a Bernoulli-egyenletet használtuk. A valóságos áramlásokban a csővezetékben a



Lamináris sebességprofil csőben
15.4 ábra

sebesség a cső sugara mentén változik. Hosszú egyenes csővekben a sebességprofil állandósul és a tengely mentén nem változik, hengerszimmetrikus és a cső tengelye körül nem forog, ezt kialakult csőáramlásnak nevezzük. A következő fejezetben tárgyaljuk a lamináris és turbulens áramlásokat. A most következő példában lamináris áramlást

tételezzünk fel!

A N-S-egyenletet fel kell írunk hengerkoordinátás alakban (r, φ, z görbevonalú koordinátarendszerben). A henger-koordinátarendszerben a teljesen általános Navier-Stokes-egyenlet és a kontinuitás a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} &= g_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned} \quad 15.8$$

Az egyenletrendszer igen bonyolult, de rövid néhány gondolat után barátságosabb formára egyszerűsíthető.

Egyszerűsítő feltétel, hogy a $v_r = v_\varphi = 0$, valamint hogy " φ " irányban nem változik semmi, azaz hengerszimmetrikus az áramlás, továbbá a nehézségi erőt hanyagoljuk el $g_r = g_\varphi = g_z = 0$. Ezek után már sokkal kevesebb egyenlet, és azokban sokkal kevesebb tag marad:

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad 15.9$$

A felső egyenlet annyi információt ad számunkra, hogy a nyomás egy keresztmetszet mentén állandó.

A második egyenletet tovább egyszerűsíthetjük, ha tudjuk, hogy a sebesség a cső tengelye mentén nem változik, tehát csak a sugártól függő tagok maradnak az egyenletben. A nyomás pedig csak a " z " koordinátától függ, továbbá csak egy sebesség van, így a " z " index elhagyható. Ezek után az egyenlet:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} + v \cdot \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} \right) \quad 15.10$$

A nyomás csökkenése a cső hossza mentén állandó. Az egyenletet át lehet alakítani a következő alakra:

$$\frac{r}{\rho \cdot v} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{d \left(r \cdot \frac{dv}{dr} \right)}{dr}$$

Kétszer integrálva az egyenletet, adódik:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2 \cdot \rho \cdot v} \cdot \frac{dp}{dz} + C_1 \quad 15.11$$

A " C_1 " konstans értéke nulla, mert a tengelyen $r=0$ -nál a sebesség változása nulla kell legyen.

$$v = \frac{r^2}{4 \cdot \rho \cdot \nu} \cdot \frac{dp}{dz} + C_2$$

Ha $r=R$, azaz a csőfalon a sebesség $v=0$, a folyadék odatapad a cső falához. Ezt a peremfeltételt behelyettesítve megkapjuk az integrálási állandót, majd "v"-t kifejezve a

$$v = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot [R^2 - r^2]$$

függvényt kapjuk. A sebességmegoszlás másodfokú forgási paraboloid szerint változik, a nyomás "z" szerinti változására a következő gondolatmenet után visszatérünk.

A sebességfüggvény kiszámításához más gondolatmenet útján is eljuthatunk.

Vegyünk fel egy, a cső tengelyével koncentrikus "r" sugarú, " Δz " hosszúságú hengert, és írjuk fel az erre ható erők egyensúlyát (ld. **15.4 ábra**). A folyadékhenger nem gyorsul, ezért a rá ható erőknek ki kell egyensúlyozniuk egymást. A hengerre az alap- és fedőlapján lévő nyomások különbségéből származó erő és a paláston keletkező, csúsztatófeszültségből származó erő hat.

$$r^2 \cdot \pi \cdot p - r^2 \cdot \pi \cdot (p + \Delta p) + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta \ell \cdot \tau = 0 \quad 15.13$$

Behelyettesítés és egyszerűsítés után $2 \cdot \tau \cdot \Delta z = r \cdot \Delta p$ adódik, amelyből a csúsztatófeszültség megoszlása:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\Delta p}{\Delta z} \quad 15.14$$

A Newton féle viszkozitási törvény *15.1 egyenlet* ebben az esetben egyszerűen átírható hengerszimmetrikus esetre (a másik két koordináta irányában nem ilyen egyszerűen az átírás):

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dz} \quad 15.15$$

Egyenlővé téve a *15.14* és *15.15* egyenleteket a

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\Delta p}{\Delta z} \tau = \mu \cdot \frac{dv_x}{dy} \quad 15.16$$

adódik, amely a *15.11 egyenletnek* teljes mértékben megfelel. A differenciálegyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg:

$$\int dv = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta z} \int r dr$$

$$v = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta z} \cdot r^2 + C \quad 15.17$$

Ha $r=R$, azaz a csőfalon a sebesség $v=0$. Ezt a peremfeltételt behelyettesítve megkapjuk az integrálási állandót, majd "v"-t kifejezve a

$$v = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta z} \cdot [R^2 - r^2] \quad 15.18$$

Látható, hogy akkor egyezik meg az áramlás iránya a "z" tengely pozitív irányításával, ha $\frac{\Delta p}{\Delta z} < 0$, azaz a nyomás növekvő "z" koordináták irányában csökken. (Áramlás irányában csökkenő nyomásból származó erő mozgatja a közeget a súrlódó erőkkel szemben.) Vezessük be a " Δp " súrlódási veszteség fogalmát, ami itt a súrlódás következtében bekövetkező

nyomáscsökkenés, amelyet általában pozitív mennyiségként kezelnek, ezért írhatjuk, hogy:

$\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{\Delta p'}{\ell}$, ahol " ℓ " az a csőhossz, amelyen a $\Delta p'$ nyomáscsökkenés bekövetkezik.

Ezzel a 15.14 és a 15.18 kifejezések a következő alakban írhatók:

$$\tau = -\frac{\Delta p'}{2 \cdot \ell} r, \quad 15.19$$

$$v_z = \frac{\Delta p'}{4 \cdot \mu \cdot \ell} [R^2 - r^2] \quad 15.20$$

A 15.4 ábrán felrajzoltuk a csúsztatófeszültség és a sebesség sugár menti változását. Látható, hogy a " τ " negatív és abszolútértéke a sugár függvényében nő.

A maximális sebesség $r=0$ -nál adódik: $v_{\max} = \frac{\Delta p' R^2}{4\mu\ell}$. Másodfokú paraboloid alakú

sebességmegoszlás $\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2}$.

Így írható:

$$\bar{v} = \frac{\Delta p'}{8 \cdot \mu \cdot \ell} R^2,$$

ill. a nyomásvesztéséget kifejezve:

$$\Delta p' = \frac{8 \cdot \mu \cdot \bar{v} \cdot \ell}{R^2}. \quad 15.21$$

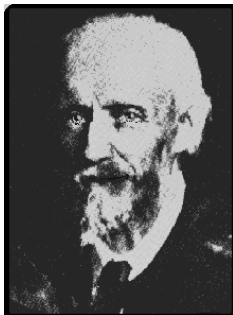
A csúsztatófeszültség a 15.19 összefüggésből a falnál $\tau_{\text{fal}} = -\frac{\Delta p' \cdot R}{2 \cdot \ell}$ értéket vesz fel.



16. Viszkózus folyadékok csőáramlása

Ebben a fejezetben, a mérnöki gyakorlat számára igen fontos problémával, a csővezetékekben kialakuló különböző típusú áramlásokkal foglalkozunk. Csővezeték, csővezeték-rendszer majdnem minden mérnöki alkotásban előfordul. A csővekben lejátszódó áramlási jelenségeket nagyon sokan vizsgálták, elméleti és gyakorlati megközelítésben. A csőben áramló folyadék bizonyos feltételek mellett nyugodt, réteges, vagy **lamináris áramlást** mutat, más feltételek esetén pedig az áramlás térben és időben ingadozó kaotikus áramlást mutat, idegen szóval **turbulens az áramlás**.

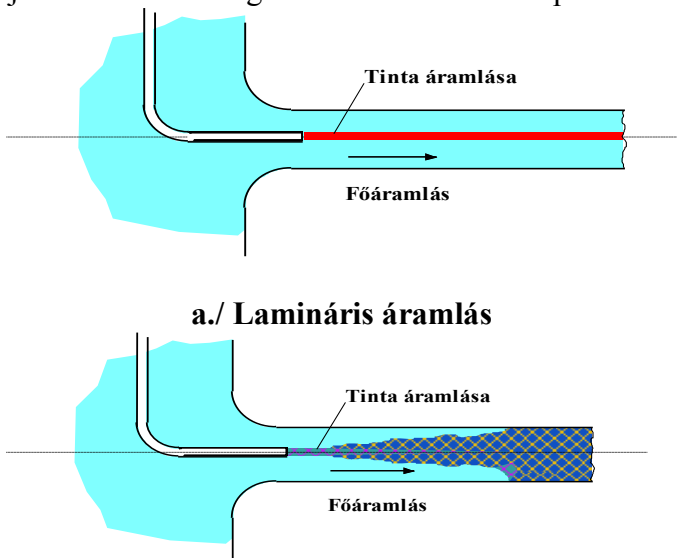
16.1. Lamináris és turbulens áramlás



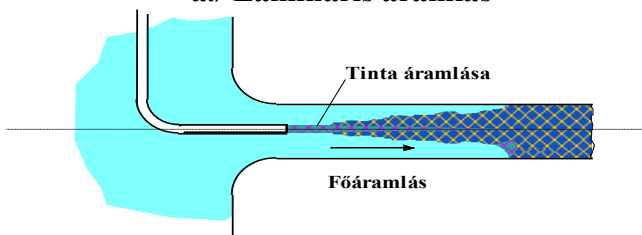
A múlt század végén végezte alapvető kísérleteit (**Osborn Reynolds 1842-1912**) a csővezetékekben kialakuló áramlások sajátosságainak feltárására. A **16.1 ábrán** egy nagyméretű tartályból induló kifolyócső látható. A kiáramló víz sebessége a csőben szabályozható.

Az üvegből készült kifolyócső tengelyébe egy másik, vékonyabb csövön keresztül megfestett folyadékot, pl. piros tintát vezetnek.

A főáramlás kis sebességénél, a festett folyadékszál a cső tengelyében egy határozott, gyakorlatilag állandó keresztmetszetben áramlik, nem keveredik a főáramlással. A főáramlás jól elkülönülő rétegekben áramlik. Ezt a típusú áramlást **lamináris vagy réteges áramlásnak**



a./ Lamináris áramlás

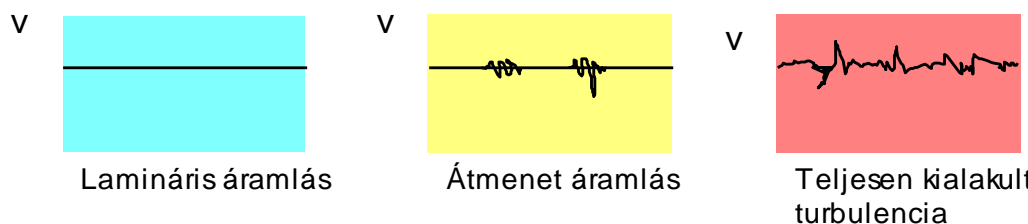


b./ Turbulens áramlás

16.1. ábra

nevezzük. A **sebességvektor a cső bármely pontján időben nem változik, az áramlás stacionárius**. A **16.1/a ábra** lamináris áramlást mutat.

Növelve a főáramlás sebességét, a festett folyadékszál időnkénti megzavarását tapasztalhatjuk, a festett folyadékszál elkezd hullámzó mozgást végezni, de a főáramlástól még jól elkülöníthető áramcsövet alkot. Tovább növelve a főáramlás sebességét a kigyózó színes áramcső szétszakadozik és összekeveredik a főáramlással. Bizonyos távolságban már teljesen összekeveredik a két folyadék és a főáramlás egyenletesen pirossá válik (**16.1/b ábra**).



a

b

c

A főáramlás egy pontjában vizsgálva a sebesség időbeli változását, a következőket figyelhetjük meg:

A **lamináris áramlásban** a sebesség időben nem változik **16.2/a ábra**. Amikor a tintaszál hullámzó mozgást végez, akkor a főáramlás egy kiválasztott pontjában a sebesség időnként megváltozik, de utána visszatér a stacioner állapothoz **16.2/b ábra**.

Amint a sebesség olyan nagy a főáramlásban, hogy a tinta már az egész keresztmetszetben elkeveredik, akkor a főáramlás egy pontjában a sebesség teljesen sztohasztikusán változik. Semmiféle periodikusság nem fedezhető fel az időbeli változásban. Az áramlás instacionáriussá válik, ezt nevezzük teljes, vagy **kialakult turbulenciának** **16.2/c ábra**.

A sebességet vizsgálva a turbulens áramlásban nemcsak azt tapasztaljuk, hogy a sebesség időben, hanem térben is ingadozik, ami annyit jelent, hogy egy-egy pontban a cső tengelyére merőleges komponens is létrejön. Ez a merőleges komponens keveri a tintát a főáramlásba.

Reynolds a kísérletei során arra az eredményre jutott, hogy a turbulens és lamináris áramlás létrejötte alapvetően egy dimenziótlan számtól függ

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} , \quad 16.1$$

amelyet Reynolds-számnak nevezünk, ahol

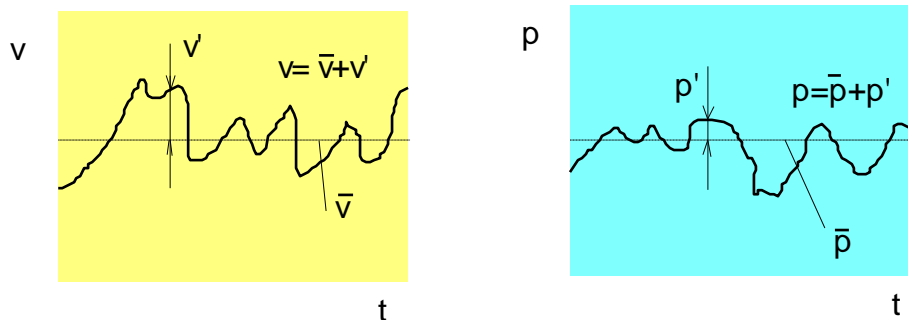
"v" a csőben mérhető átlagsebesség,

"d" a cső átmérője,

"ρ" a közeg sűrűsége és

"μ" a dinamikai viszkozitás.

Ha a cső, ill. ezáltal az áramlás rezgéseknek, zavarásnak van kitéve, akkor a **lamináris-turbulens átalakulás** $Re \cong 2300$ körül megy végbe. Ha kellően zavarmentessé tesszük az áramlást és a cső belső fala tökéletesen sima, akkor, ennél lényegesen nagyobb Reynolds-szám értékek mellett is lamináris áramlást érhetünk el. Ez az állapot azonban nagyon instabil és a legkisebb megzavarás hatására azonnal turbulensbe csap át az áramlás.



A sebesség és a nyomás időbeli változása turbulens áramlásban
16.3 ábra

Az ipari gyakorlatban legtöbb esetben turbulens áramlással találkozhatunk. Az ingadozás mértéke általában nem nagy, néhány százalék csupán, ezért a legtöbbször a sebesség, vagy a nyomás időbeli átlaga jól jellemzi az áramlást.

Az átlagértékek:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_T v \cdot dt \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_T p \cdot dt \quad 16.2$$

A sebesség pillanatnyi értékét egy adott időben az átlagérték és az eltérés összegeként adhatjuk meg, tehát.

$$v = \bar{v} + v'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

Természetesen a sebesség és a nyomás ingadozására fennáll, hogy az időbeli átlaguk zérus.

$$0 = \frac{1}{T} \int_T v' \cdot dt \quad 0 = \frac{1}{T} \int_T p' \cdot dt \quad 16.4$$

A "T" integrálási idő az ingadozás átlagos periódusidejéhez képest elegendően nagy kell, hogy legyen.

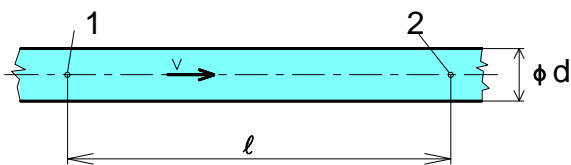
A **turbulencia-fok** jellemzésére az ingadozás négyzetének időbeli átlagából képzett négyzetgyök értékét viszonyítjuk az átlagsebességhez.

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{(v')^2}}}{\bar{v}} \quad 16.5$$

A turbulencia-fok tipikus értéke 0.1-20%, turbulens mellékmovgások frekvenciái 1-10000 Hz nagyságúak nagysebességű áramlásban.

16.2 Darcy-formula

Az előző fejezetben vizsgáltuk a Navier-Stokes-egyenlet megoldását kör keresztmetszetű csövekben. Arra a megállapításra jutottunk, hogy az áramlás irányában haladva a nyomás csökken. Ez a nyomáscsökkenés hajtja előre a közeget a csőfalán ébredő súrlódás ellenében. A nyomáscsökkenést más oldalról is megközelíthetjük. A **16.4 ábrán** látható vízszintes



16.4 ábra

egyenes csőszakaszra alkalmazzuk a Bernoulli-egyenletet az "1" és "2" pontok között. Az egyenlet az eddigi formájában nyilván nem lesz érvényes, mert azonos sebesség, azonos magasság esetén, veszteségmentes áramlásban azonos

nyomásnak is kellene lennie, ehelyett a "2" pontban a nyomás kisebb mint az "1" pontban. Az egyenlőség helyreállítása érdekében az áramlás irányába eső pontba, az egyenlet jobb oldalára a disszipációval arányos tagot kell figyelembe vennünk, **amit $\Delta p'$ -vel jelölünk, és súrlódási veszteségnek nevezünk:**

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Delta p' \quad 16.6$$

A **16.6 összefüggést veszteséges Bernoulli-egyenletnek** hívjuk. (Bár Bernoullinak a veszteséges taghoz semmi köze nem volt.).

A $\Delta p'$ nyomásveszteséget egyenes csövekre a

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda \quad 16.7$$

kifejezésből számoljuk, ahol a " λ " dimenziótlan mennyiség és **csősúrlódási tényezőnek** nevezük. A **16.7 egyenlet** Darcy-Weisbach-egyenletként vonult be a szakirodalomba. (**Julius Weisbach** német professzor 1850-ben publikálta az első modernnek számító hidrodinamika könyvben.) Az előző fejezetben vizsgáltuk a Navier-Stokes-egyenlet megoldásakor a csőbeni

áramlást. A második megoldásban az áramlásból kiragadott körhenger egyensúlyát vizsgálva a nyomásesésre a csúsztatófeszültségre kaptuk a 8.21 összefüggést.

$$\Delta p' = \frac{8 \cdot \mu \cdot \bar{v} \cdot \ell}{R^2} \quad 16.8$$

A cső sugara helyett használjuk az átmérőt a kifejezésben, ekkor

$$\Delta p' = \frac{32 \cdot \mu \cdot \bar{v} \cdot \ell}{d^2}$$

egyenletet kapjuk. Tegyük egyenlővé ezt a kifejezést a 16.7 egyenlettel, ekkor kapjuk:

$$\frac{\rho}{2} \cdot \bar{v}^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda = \frac{32 \cdot \mu \cdot \bar{v} \cdot \ell}{d^2} \quad 16.9$$

Rendezzük a kifejezést " λ "-ra:

$$\lambda = \frac{64}{\bar{v} \cdot d \cdot \rho} = \frac{64}{Re \cdot \mu} \quad 16.10$$

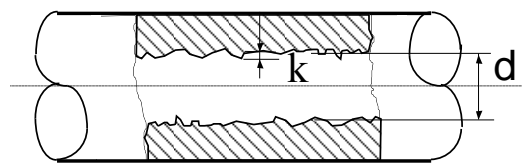
Eredményül tehát azt kaptuk, hogy **lamináris áramlásban a " λ " csősúrlódási tényező a Reynolds-számmal fordítottan arányosan változik.** A lamináris-turbulens átmenet $Re \cong 2300$ érték körül megy végbe. Ezért a 16.10 összefüggés a $Re \leq 2300$ tartományra érvényes. Hogyan függ a " λ " csősúrlódási tényező a Reynolds-számtól kör keresztmetszetű csövek és turbulens áramlás esetén?

16.2.1 Turbulens megoldás

A lamináris megoldás azt sugallja, hogy turbulens esetben is határozzuk meg az átlagsebesség és a nyomásvesztés közötti kapcsolatot a turbulens sebességprofilból, és megkapjuk a " λ " csősúrlódási tényezőt. A helyzet sajnos nem ilyen egyszerű, mert turbulens esetben a Navier-Stokes-egyenlet a turbulens mellékmozgások miatt instacionárius megoldást követel, másrészt a cső érdessége is erősen befolyásolja a csősúrlódási tényezőt.

Több elmélet és félempirikus elmélet született a csősúrlódási tényező meghatározására.

Elsőként ismerkedjünk meg a **fali érdesség** és a **lamináris alapréteg** fogalmával.



Érdes csőfal

16.5 ábra

A csőfal a gyártás és a korrózió következtében nem sima, hanem rendelkezik egy érdes felülettel. Az átlagos érdesség és a belső csőátmérő viszonyát képezve megkapjuk a relatív érdességet, illetve ennek reciprokát szívesebben használják a $\frac{d}{k}$ értékét, vagy a cső sugarával is össze szokták

hasonlítani, ekkor $\frac{r}{k}$. A kis értékeknél relatíve nagyobb az érdesség.

Turbulens áramlásban és sima (hidraulikailag) cső esetén, is létezik a fal közelében egy úgynevezett viszkózus, vagy lamináris alapréteg. Ennek a vastagságát jelöljük y_v -vel. Az alapréteg vastagsága és a csőátmérő viszonya a következő kifejezéssel határozható meg:

$$\frac{y_v}{d} = \frac{14.1}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \quad 16.11$$

amelyet a határréteg-elméletből lehet levezetni. Látható, hogy egyre nagyobb Reynolds-számoknál a viszkózus alapréteg vastagsága egyre kisebb.

16.2.2 Nikuradse-diagram

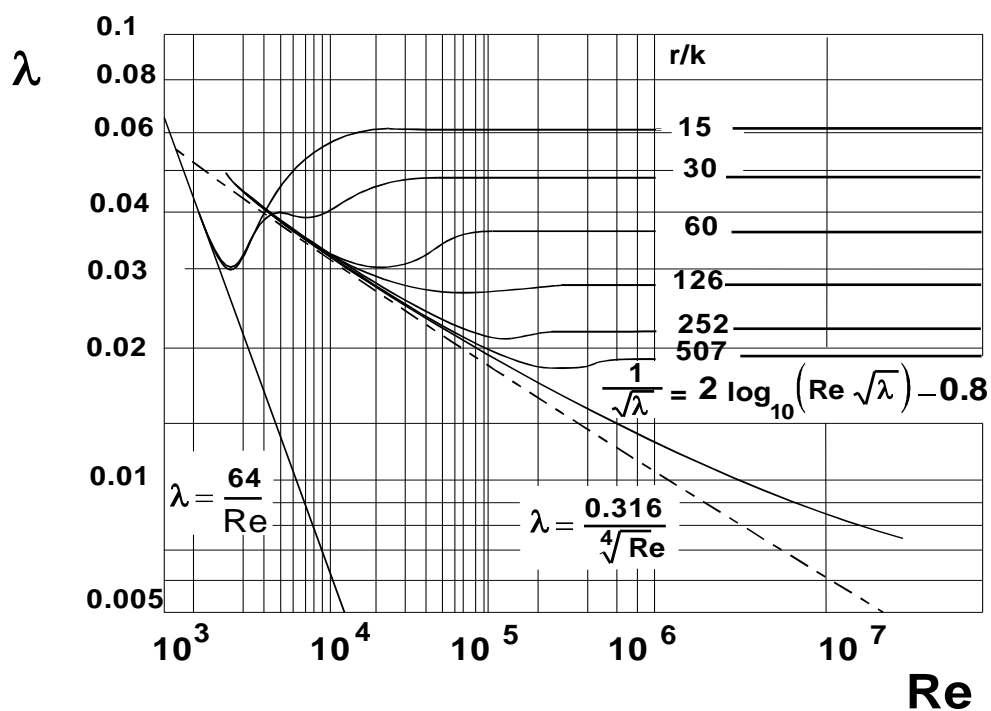
A csősúrlódási tényező változására **Nikuradse**, Prandtl tanítványa végzett kísérleteket (**Ludwig Prandtl** 1875-1953 német fizikus). A fali érdességet úgy állította elő, hogy a ragasztóval bekent belső csőfalra homogén szemcseeloszlású homokot szórt. Így elért egy közel állandó érdességű belső felületet. A különböző Reynolds-számoknál egy-egy állandó relatív érdességnél mért eredményeit egy diagramban foglalta össze, amit a **16.6 ábrán** láthatunk.

Lamináris áramlás esetén az érdességnek nincsen hatása a csősúrlódási tényezőre.

Turbulens áramlásban ($Re > 2300$) viszont az érdesség hatása jelentős: az $\frac{r}{k} = \text{áll.}$ görbék

növekvő Reynolds-számnál egy határ Reynolds-szám értékig azonos görbén futnak, ennél nagyobb Reynolds-számnál elválnak a görbétől és vízszintesbe mennek át. Ebben a Reynolds-szám tartományban " λ " csak az $\frac{r}{k}$ függvénye, ezt teljes érdesség tartományának nevezik. Azt a görbét, amelyből a különböző érdességű csövekhez tartozó görbék kiágaznak, az összefüggés írja le.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{turb}}}} = 2 \cdot \lg(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_{\text{turb}}}) - 0.8 \quad 16.12$$



Nikuradse-diagram

16.6 ábra

Amíg az érdes cső " λ " görbéje együtt fut a sima cső görbéjével *16.12 összefüggéssel* leírt görbén találjuk, addig az érdességnek nincs hatása, ekkor **hidraulikailag sima csőről beszélünk**. A hidraulikailag sima csövek csősúrlódási tényezőjét a Reynolds-szám

ismeretében a *16.12 összefüggésből*, vagy azt a $4000 \leq Re \leq 10^5$ tartományban jól közelítő **Blasius-képlettel** határozhatjuk meg:

$$\lambda_{\text{turb}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad 16.13$$

Az érdesség hatása a csősúrlódási tényezőre a következőkkel magyarázható: Ha a *16.11 összefüggésből* kiszámítható viszkózus alapréteg vastagsága elfedi a csőfal érdességét, akkor az érdességnek nincs hatása a csősúrlódási tényezőre, viszont ha a viszkózus alapréteget az érdesség átdöfi, akkor a belső áramlásra már hatni tud. Növekvő Reynolds-számmal az érdesség egyre nagyobb része kiemelkedik viszkózus fali rétegből, majd egy adott Re-szám felett a viszkózus fali réteg simító szerepe teljesen eltűnik, ekkor jutunk a teljes érdesség tartományába, ahol a görbék már vízszintes egyenesek.

16.2.3 A Moody-diagram

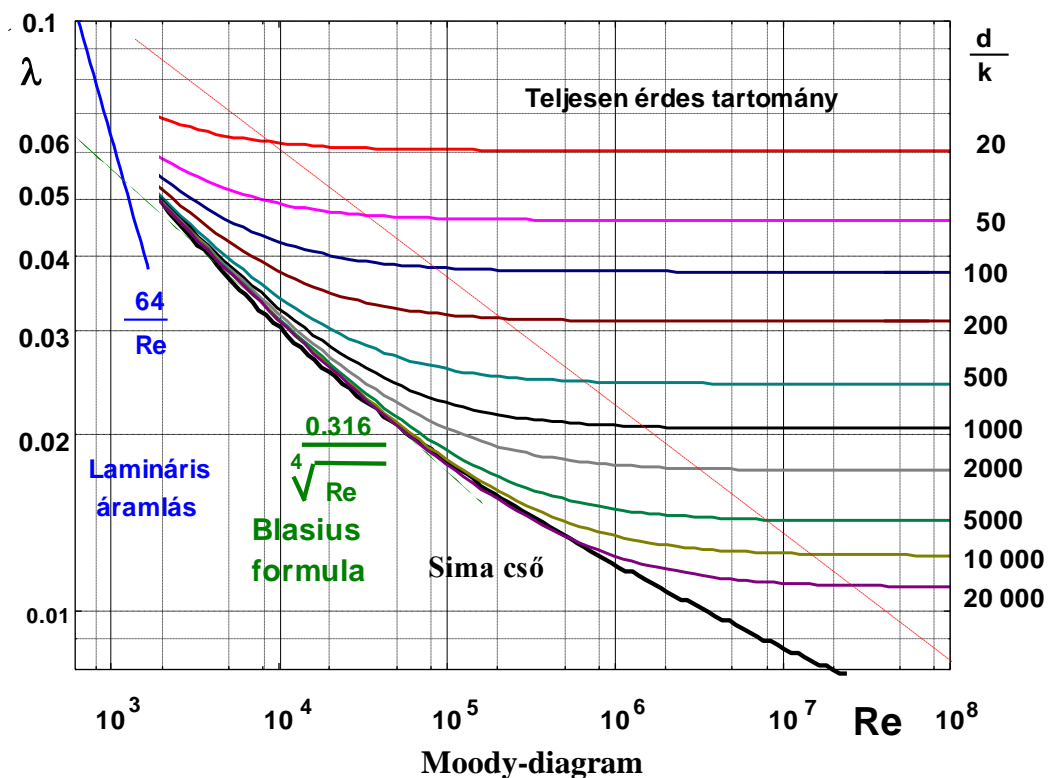
A Nikuradse-diagram egyenletes homokszemcsékkel érdesített csövek felhasználásával készült. Az iparban használt csövek érdességét nem homogén eloszlású kiemelkedések okozzák. A gyártáskor keletkező érdesség általában az anyag és a technológia függvénye.

A mérések azt mutatták, hogy általános érdesség esetén minden cső, kb $Re = 4000$ értékig a sima csőnek megfelelően viselkedik. E fölött viszont hirtelen felnövekszik a csősúrlódási tényezője, majd fokozatosan csökkenve eléri a teljes érdességre jellemző értékét.

1939-ben **C.F. Coolebrook** ajánlotta a következő formulát, amely a sima és az érdes cső kifejezéseit egyesíti.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{3.7 \cdot \frac{d}{k}} + \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right) \quad 16.14$$

Az implicit kifejezés nehézségeinek elkerülésére **L. F. Moody** 1944-ben diagramot készített a



Moody-diagram
16.7 ábra

képlet alapján, amit azóta Moody-diagramnak neveznek, és a **16.7 ábrán** látható.

Moody különböző mérések alapján összeállított egy táblázatot is, amelyben a szokásos csőanyagok érdességét felsorolta, ezt a **16.1 táblázatban** találjuk.

A Moody-diagram használata helyett több közelítő kifejezést is ajánlottak a turbulens tartomány leírására, amelyekből explicit ki lehet számítani adott Re-szám és relatív érdesség esetén a " λ " csőúrlódási tényezőt. Például **Haaland** ajánlotta a következő összefüggést:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{k}{3.7d} \right)^{1.11} \right] \quad 16.15$$

A szerző szerint a diagram és a képlet eltérése a turbulens tartományban kisebb, mint 2%.

16.1 táblázat Anyagok átlagos érdessége

Anvag	k [mm]
Szegecselt acélcső	0.9 - 16.0
Beton	0.3 - 3.0
Fa csatorna	0.18 - 0.9
Öntöttvas	0.26-0.6
Horganzott acél	0.1-0.15
Aszfalozott öntöttvas	0.1-0.15
Acél. kissé rozsdás	0.1-0.3
Szokványos acél	0.02-0.046
Húzott acél	0.0015-0.03
Üveg	Sima

16.3 Csőáramlási probléma három típusa

A Moody-diagrammal, ill. az abban lévő közelítő képletekkel, majdnem minden csőáramlási problémát meg lehet oldani, amelyben csak egyenes cső található.

Sok feladatnál iterációt kell alkalmazni, a diagram, vagy a hozzá kapcsolódó képletek használatakor, mert a " λ " kiszámításához ismerni kell a relatív érdességet és a Re-számot is.

(A továbbiakban a csővezetékben kialakuló átlagsebességet csak egyszerűen "v"-vel fogjuk jelölni.)

Háromféle alapfeladat lehetséges a csővesztesség számításánál:

I. Adott a cső átmérője " d ", hossza " l ", és az átlagsebesség " v ", vagy a térfogatáram " q_v ", valamint a közeg sűrűsége " ρ " és viszkozitása " ν ", és ki kell számítani a **nyomásesést " Δp "-t.**

II. Adott a cső átmérője " d ", hossza " l ", és a nyomásvesztesség $\Delta p'$, valamint a közeg sűrűsége " ρ " és viszkozitása " ν ", és ki kell számítani a **térfogatáramot " q_v "-t.**

III. Adott a cső hossza " l ", a nyomásvesztesség $\Delta p'$, a térfogatáram " q_v ", valamint a közeg sűrűsége " ρ " és viszkozitása " ν ", és ki kell számítani a **cső átmérőjét, "d"-t.**

16.3.1 I. feladat: Számítsuk ki a nyomásesést!



Számítsuk ki a nyomásvesztést egy aszfaltozott öntöttvas vezetékben, amelyben víz áramlik.

$$\text{Adatok: } \ell = 60\text{m}; d = 150\text{mm}; \bar{v} = 0.15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kérdés: $\Delta p'$ nyomásesés

Megoldás: Elsőként a víz sűrűségét és dinamikai viszkozitását kell táblázatból meghatározni. A sűrűsége $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. A viszkozitást a 8.1 táblázatból vehetjük:

$$\nu = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

A következő lépésben a Re-számot számítjuk ki a 16.1 egyenlet szerint:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0.15 \cdot 0.15}{1.3 \cdot 10^{-6}} = 1.73 \cdot 10^4$$

Az érdesség értékét **16.1 táblázatból** véve, pl. $k = 0.12\text{mm}$ értéknek, majd a relatív érdesség az adatokból:

$$\frac{d}{k} = \frac{0.15}{0.00012} = 1250$$

Keressük meg a Moody-diagramban a $\frac{d}{k} = 1250$ -es vonalat és kövessük, ameddig el nem metszik a $\text{Re} = 1.73 \cdot 10^4$ függőlegest. Kiolvashatjuk, hogy $\lambda = 0.028$, vagy a diagram helyett használhatjuk a 16.15 kifejezést is, miszerint:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\frac{k}{d}}{3.7} \right)^{1.11} \right] = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{17300} + \left(\frac{1}{\frac{1250}{3.7}} \right)^{1.11} \right] = 5.966,$$

amelyből

$$\lambda = 0.028$$

De még akkor sem követünk el nagy hibát, ha a Blasius-formulából a sima csőnek megfelelő képletből, számítjuk a csősúrlódási veszteséget.

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{17300}} = 0.0275$$

Végül a 16.7 összefüggésből kiszámítjuk a nyomásesést:

$$\Delta p_{\text{cs}} = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda = \frac{1000}{2} \cdot 0.15^2 \cdot \frac{60}{0.15} \cdot 0.028 = 126\text{Pa}$$

Moody rámutatott, hogy a számítás nem tartalmaz nagyobb hibát, mint kb ± 10 százalékot.

16.3.2 II. feladat: Keressük meg az átlagsebességet!



Mivel a sebesség (vagy a térfogatáram) megjelenik mind a " λ "-ban, mind a Re -számban, iterációval tudjuk csak a feladatot megoldani. Szerencsére az iteráció nagyon gyors, mert a " λ " lassan változik a Re -számmal.

Számítsuk ki az átlagsebességet az aszfaltozott öntöttvas vezetékben, amely vizet szállít!

Adatok: $\ell = 60\text{m}$; $d = 150\text{mm}$; $\nu = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $\Delta p' = 5000\text{Pa}$

Kérdés: térfogatáram q_v

A **16.1 táblázatból** kikeressük az adott csőanyaghoz tartozó érdességet és meghatározzuk a relatív érdességet, ami megfelel az előző probléma adatainak, így $\frac{d}{k} = 1250$, de most nem tudjuk a Re -szám értékét, mivel az átlagsebesség ismeretlen. Így a λ -ra fel kell vennünk egy kiinduló értéket. Kezdjünk pl. $\lambda_0 = 0.02 - 0.03$, vagy a teljes érdességnek megfelelő csőszűrlődési tényezővel, ami jelen esetben $\lambda_0 = 0.02$.

A **16.7 egyenletet** felírva $\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda$ amiből ki tudjuk rendezni az átlagsebességet. Ez a következő:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p' \cdot d}{\rho \cdot \ell}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad 16.16$$

Természetesen a " λ " bent marad a kifejezésben.

16.2 táblázat

λ	$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p' \cdot d}{\rho \cdot \ell}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$	Re_d
0.02	0.353	40730
0.026	0.31	35770

Az iteráció lépéseit a **16.2 táblázatban** adtuk meg, a Moody-diagramot felhasználva.

A számítás nagyon gyorsan konvergál. Természetesen, ha más kezdő " λ " értéket veszünk fel, a konvergencia akkor is gyors lesz és a végeredmény pedig nem változik, csak az iterációs lépések száma nő, vagy csökken.

16.3.3 III. feladat: Számítsuk ki a csőátmérőt!



Most a csőátmérő a kérdés. Mivel az átmérőtől függ mind a " λ ", mind a Re -szám, mind pedig a $\frac{k}{d}$ relatív érdesség, ezért megint csak iterációval tudjuk a feladatot megoldani. Szerencsére az iteráció ez esetben is nagyon gyors.

Fejezzük ki a sebességet a térfogatáram és az átmérő segítségével a kontinuitásból, $v = \frac{4 \cdot q_v}{d^2 \pi}$, majd tegyük ezt a $\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda$ egyenletbe. A következőt

kapjuk:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} \left(\frac{4 \cdot q_v}{d^2 \pi} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda = \frac{C}{d^5} \quad 16.17$$

Ezt követően fejezzük ki az átmérőt, amely természetesen a csőúrlódási tényező függvénye is:

$$d = \sqrt[5]{\frac{\rho}{2} \left(\frac{4 \cdot q_v}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{\Delta p'} \cdot \sqrt[5]{\lambda}} \quad 16.18$$

Ha tudnánk a " λ " értékét, akkor az átmérőt is ki tudnánk számítani. A számítást a következő feladatban adjuk meg.

Számítsuk ki az aszfalozott acélcső vezeték átmérőjét, amely vizet szállít!

Adatok: $\ell = 60\text{m}$; $v = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$; $\Delta p' = 12000 \text{ Pa}$, $q_v = 5.37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Kérdés: átmérő „ d ”

Nem ismerjük sem a relatív érdességet, $\frac{d}{k}$ -t, sem a Re-számot. Mivel az átmérőtől függ mind a λ , mind a Re-szám, mind pedig a relatív érdesség, ezért megint csak iterációval tudjuk megoldani a feladatot. A feladat megoldásához egy szabványos, kereskedelemben kapható csőátmérőt, pl. a **16.3. táblázatból**.

A csőátmérő kiválasztásakor, ha pl. vízvezeték rendszer tervezünk, akkor a vízsebesség ne haladja meg az 1-2 m/s sebességet. A választott csőátmérő az 4 in (colos) $d=102,3 \text{ mm}$.

Ezután a probléma az I. csőproblémához hasonlít. Elsőként kiszámítjuk az áramlási sebességet.

16.3 táblázat Gyártott csövek

$$v = \frac{q_v}{d^2 \cdot \pi / 4} = \frac{5,37 \cdot 10^{-3}}{0,1023^2 \cdot \pi / 4} = 3,99 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Láthatóan az első választott csőátmérő kicsinek bizonyult, mert túl nagy a sebesség. Választunk egy nagyobbát, a 6 in (colos) $d=154,1 \text{ mm}$.

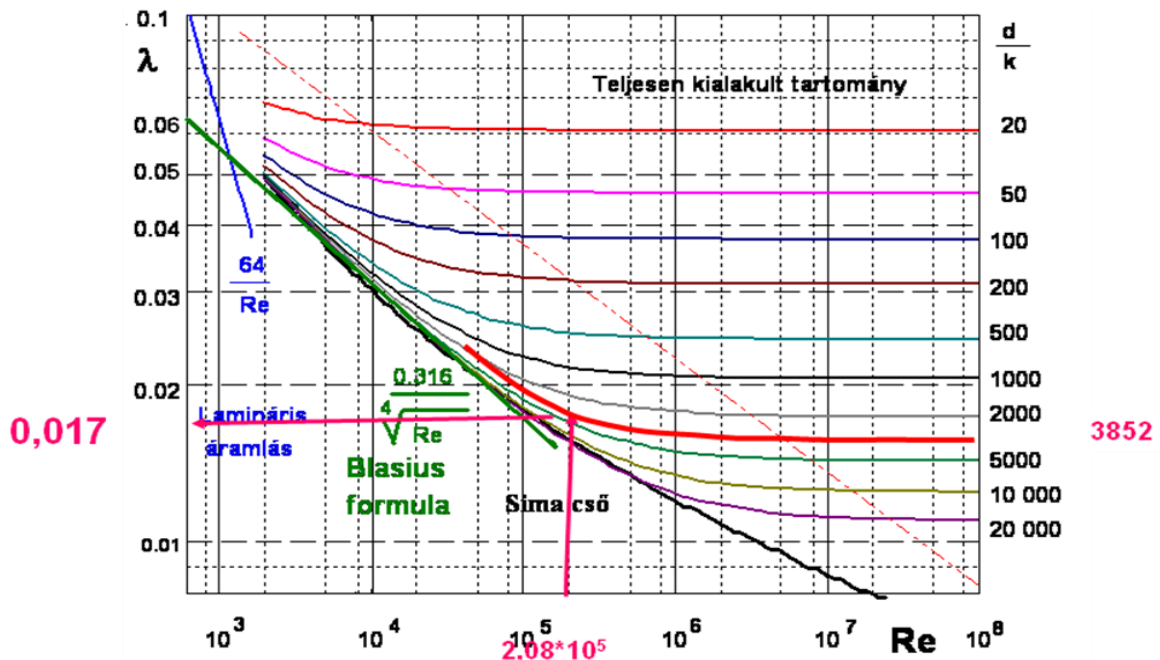
$$v = \frac{q_v}{d^2 \cdot \pi / 4} = \frac{5,37 \cdot 10^{-3}}{0,1541^2 \cdot \pi / 4} = 1,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Itt már megfelelő a sebesség, így számolhatunk tovább, következő a Re-szám.

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} = \frac{1,76 \cdot 0,1541 \cdot 1000}{1,3 \cdot 10^{-3}} = 208764 = 2,08 \cdot 10^5$$

Névleges átmérő [in]	Tényleges belső átmérő [mm]
2	52.5
2 $\frac{1}{2}$	62.7
3	77.9
3 $\frac{1}{2}$	90.1
4	102.3
5	128.2
6	154.1
8	202.7
10	254.5

Az érdesség acélcső esetén legyen $k = 0,04 \text{ mm}$. Az érdességi szám $\frac{d}{k} = \frac{0,1541}{0,00004} = 3852$.



Csőúrlódási tényező kiválasztása a Moody-diagramból
16.8 ábra

A megadott értékekkel kiszámítjuk a nyomásvesztéséget.

$$\Delta p'_{sz} = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \lambda = \frac{1000}{2} \cdot 1,76^2 \cdot \frac{60}{0,1541} \cdot 0,017 = 10251 \text{ Pa}$$

Ha a kiszámított nyomásvesztés nagyobb, mint a megadott nyomásvesztés, akkor egy nagyobb csőátmérőt kell választanunk, és újra kell számolni a feladatot! Jelen megoldásban ez fennáll, így újabb, nagyobb átmérőt kell választanunk a jó megoldáshoz. Ezt a megoldást az olvasóra bízom.

Ha kisebb a kiszámított nyomásvesztés, akkor megfelelő a számításunk. De ha sokkal kisebb a számított, mint a megadott, akkor kisebb csőátmérőt kell választanunk, mert ekkor feleslegesen nagy lesz a cső, és annak az ára!

A **16.3 táblázatban** a kapható csőátmérő sorozatot láthatjuk. A **16.17 összefüggésből** tudjuk, hogy a nyomásvesztés fordítva arányos az átmérő ötödik hatványával. Így ha a csőátmérő 10%-al csökken, akkor a nyomásvesztés kb 50%-al megnő. Tehát a számításból kapott átmérőnél mindenképp nagyobb csőátmérőt kell választani. Áramlástan szempontból minél nagyobb átmérő választása célszerű, azonban minél nagyobb a csőátmérő, annál drágább a vezeték. Tehát a számítottnál csak egy lépcsővel nagyobb átmérőt válasszunk.

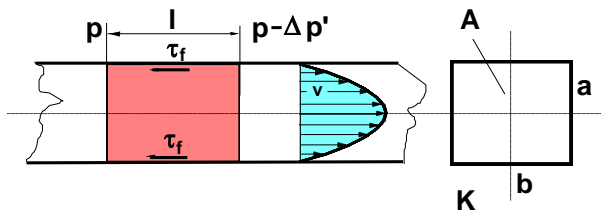
A jó választás a 8 in névleges, 202.7 mm tényleges belső átmérőjű.

Az egész világon tendencia, az SI (Nemzetközi Mértékrendszer) ellenére, hogy a csővezetékek névleges átmérőjét inch-ben (colban, 1col = 2.54cm) adják meg.

16.4 Nem körkeresztmetszetű vezetékek áramlási vesztesége

Gyakran használnak nem kör keresztmetszetű csővezetékeket, pl. az épületgépészeti szerkezetekben. A kialakult csőáramlásban a veszteség számítása sokkal komplikáltabb feladat a nem körkeresztmetszetű csövek esetében, mint volt az a lamináris kör

keresztmetszetű csövekben. Lamináris áramlásban használható a Navier-Stokes-egyenlet, de csak háromdimenziós változatában. Turbulens esetben a határreteg elméletből lehet itt is kiindulni. A gyakorlat számára azonban egy sokkal egyszerűbb és jól használható fogalom, az **egyenértékű átmérő** (vagy hidraulikus sugár) bevezetése teszi lehetővé az egyszerű veszteségszámítást.



Nem körkeresztmetszetű vezeték
16.9 ábra

Vizsgáljuk a 16.9 ábrán látható téglalap keresztmetszetű vezeték egy " ℓ " hosszúságú darabját. A falon ébredő, a csúsztatófeszültségből származó erő és a nyomáscsökkenésből adódó erő egyensúlyban vannak, hiszen a kiszemelt folyadékrész nem gyorsul.

Írjuk fel a két erő egyensúlyát.

$$\Delta p' \cdot A = \tau_f \cdot K \cdot \ell, \quad 16.19$$

ahol " K " az úgynevezett nedvesített kerület (lehet olyan áramlás is, hogy a folyadék nem tölti ki teljesen a keresztmetszetet, pl nyílt felszínű csatornában),

" A " pedig a folyadékkal kitöltött keresztmetszet.

Ebből kifejezve a nyomásvesztést:

$$\Delta p' = \tau_f \cdot \frac{\ell}{A/K} \quad 16.20$$

Vegyünk gondolatban egy körkeresztmetszetű csövet, amelyben ugyanakkora nyomásesés jön létre, ugyanilyen hosszon és ugyanakkora fali csúsztatófeszültség esetén. Keressük ennek a körnek az átmérőjét, amelyet egyenértékű átmérőnek nevezünk.

$$\Delta p' \cdot \frac{d_e^2 \cdot \pi}{4} = \tau_f \cdot d_e \cdot \pi \cdot \ell \quad 16.21$$

Fejezzük ki itt is a nyomásesést:

$$\Delta p' = \tau_f \cdot \frac{\ell}{\frac{d_e}{4}} \quad 16.22$$

A 16.20 és a 16.22 egyenletek összevetéséből adódik, hogy:

$$d_e = \frac{4 \cdot A}{K} \quad 16.23$$

A csősúrlódási veszteséget nem kör keresztmetszetű csövek esetén is a 16.7 összefüggéssel számoljuk, azzal a különbséggel, hogy a " d " csőátmérő helyébe a " d_e " egyenértékű átmérő kerül:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\ell}{d_e} \lambda, \text{ ahol } \lambda = \lambda \left(\text{Re}, \frac{k}{d_e} \right) \text{ és } \text{Re} = \frac{v d_e}{\nu} \quad 16.24$$

Fenti összefüggésekben " v " a valóságos csőkeresztmetszettel számolt átlagsebesség. A Reynolds-szám ismeretében a " λ " csősúrlódási tényezőt a " Re " értékétől és az érdességtől függően a Moody-diagramból határozhatjuk meg.

Az egyenértékű átmérő csak $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}$ ahol $a < b$ oldalviszonyú téglalap esetén és turbulens áramlásra ad elfogadható pontosságú eredményt.

Pontosabb eredményt kapunk, ha a cső téglalap keresztmetszetű és az oldalviszonyra fennáll: $\frac{a}{b} < 0.5$, akkor a " λ " számításához a Reynolds-szám értékét a $Re = \Phi \frac{v d_e}{\nu}$ összefüggéssel számolt Reynolds-számmal határozzuk meg a szokott módon, ahol:

$$\Phi \cong \frac{2}{3} + \frac{11}{24} \frac{a}{b} \left(2 - \frac{a}{b} \right)$$

16.5 Csőidomok és szerelvények veszteségének számítása

Vezetérendszerbe természetesen nem csak egyenes csöveket, hanem íveket, szelepeket, szűkítőket, elágazásokat is beépítenek. Vegyük sorra a legfontosabb veszteségforrásokat.

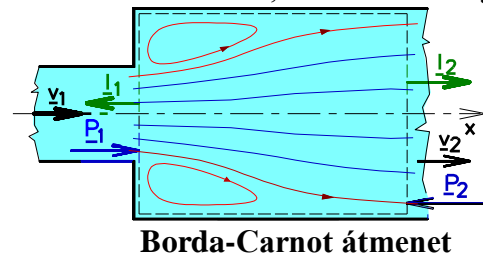
A nyomásvesztést általában egy veszteségtényezővel szokták megadni, amely a nyomásvesztés és egy dinamikus nyomás hányadosa, legtöbb esetben a szerelvény előtt fellépő dinamikus nyomás hányadosa, tehát

$$\zeta = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2} \quad 16.25$$

16.5.1 Borda-Carnot átmenetet

Tekintsük a **16.10 ábrán** látható hirtelen keresztmetszet növekedést, amely **Borda-Carnot átmenet** néven vonult be az áramlástan irodalmába. (**Jean Charles Borda 1733-1799** francia fizikus, a Francia akadémia tagja. Részt vett a méteres mértékrendszer kialakításában. **Nikolas Leonard Sadi Carnot 1796-1833** francia fizikus. A termodinamika második főtételének megalkotója. Egymástól függetlenül foglalkoztak az adott problémával.)

A berajzolt áramvonalak a valóságos áramláshoz közelálló áramképet mutatják be. Legyen az áramlás stacionárius, az áramló közeg sűrűsége pedig állandó.



16.10 ábra

Az "1" és a "2" keresztmetszetek között létrejön egy áramlási veszteség, így a Bernoulli-egyenlet veszteséges tag nélkül nem használható.

Az impulzustétel viszont a valóságot igen jól megközelítő eredményt ad. Azt a **feltevést** alkalmazva, hogy az **ellenőrző felület bal oldalán mindenütt p_1 a nyomás.**

$$-\rho \cdot v_1^2 \cdot A_1 + \rho \cdot v_2^2 \cdot A_2 = (p_1 - p_2) \cdot A_2$$

Felhasználva a kontinuitást: $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$;

$$(p_2 - p_1)_{\text{val}} = \rho \cdot v_2 \cdot (v_1 - v_2)$$

Tehát a "2" helyen nagyobb a nyomás. Mégis áramlás irányába nyomásvesztés tapasztalható, mert a Bernoulli-egyenlet szerint:

$$(p_2 - p_1)_{\text{id}} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

A kettő különbsége a Borda-Carnot veszteség:

$$\Delta p'_{\text{BC}} = (p_2 - p_1)_{\text{id}} - (p_2 - p_1)_{\text{val}} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_1 - v_2)^2 \quad 16.26$$

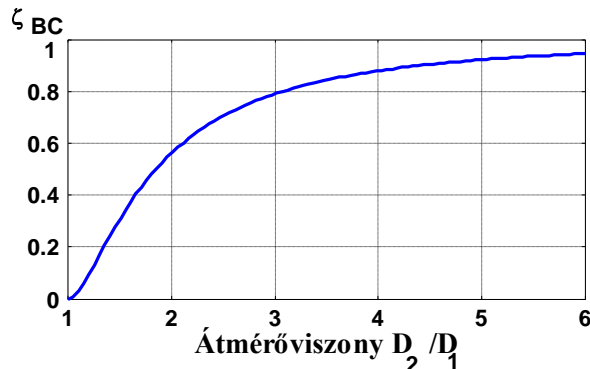
A veszteségtényezőt a belépő dinamikus nyomással történő osztás után kapjuk, így:

$$\zeta_{BC} = \frac{\Delta p'_{BC}}{\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2} = \frac{\frac{\rho}{2} \cdot (v_1 - v_2)^2}{\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

Ha felhasználjuk a kontinuitást $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$, és kör keresztmetszetű csövek csatlakozását feltételezzük, akkor

$$\zeta_{BC} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \quad 16.27$$

kifejezést kapjuk. A **16.11 ábrán** az átmérőviszony függvényében ábrázoltuk a veszteségtényezőt.



A Borda-Carnot veszteség egyik speciális esete, amikor a "2" keresztmetszet végtelen nagy, azaz egy csővezeték végtelen nagy térhez csatlakozik. Ezt a veszteséget kilépési veszteségnek nevezzük.

A 16.26 kifejezésből adódik, hogy:

$$\Delta p'_{ki} = \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2$$

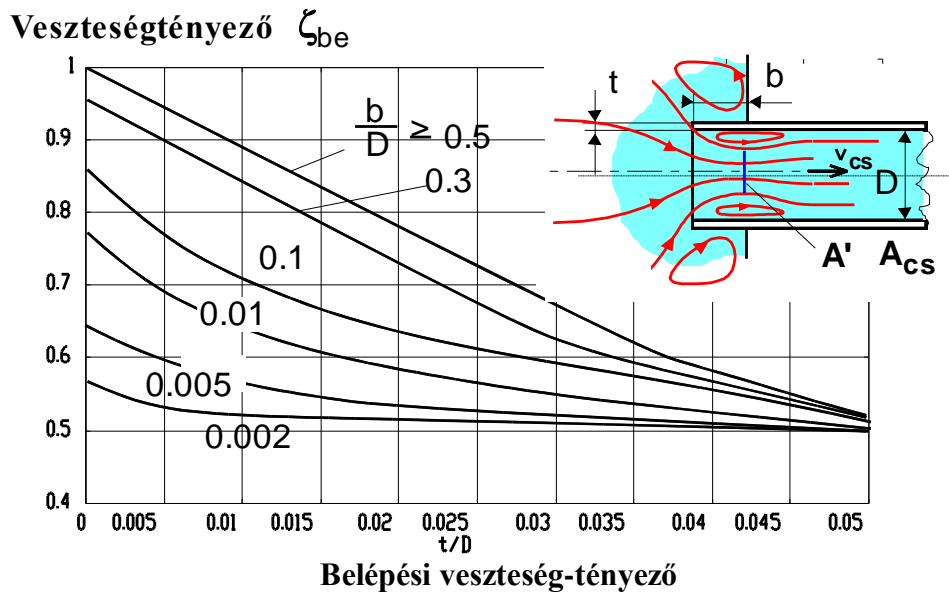
A veszteségtényezője pedig láthatóan "1".

Borda-Carnot átmenet veszteségtényezője
16.11 ábra

16.5.2 Belépési veszteség

Viszonylag nagy tartályból egy kisebb keresztmetszetű csővezetékbe lép a közeg, akkor a belépésnél kialakul egy leválás. Közvetlen a belépés után az áramlás a cső keresztmetszeténél egy kisebb keresztmetszeten áramlik át (ld. **16.11 ábra**) ezt a keresztmetszetet kontrahált keresztmetszetnek, vagy szóval "vena contracta"-nak nevezzük (A'). A közeg ugyanis nem tudja követni a szilárd fal hirtelen irányváltását. A belépés után összeszűkül az A' keresztmetszetre, ami kisebb, mint a csőkeresztmetszete A_{cs} . A legszűkebb keresztmetszeten átáramló folyadék áramlása rendeződik egy bizonyos hossz megtétele után, és kitölti a cső teljes keresztmetszetét, de közben a Borda-Carnot veszteséghez hasonló veszteséget szenved. Minél jobban belóg a cső a tartályba ("b" minél nagyobb) és minél vékonyabb a cső fala (t), annál nagyobb a kontrakció mértéke, és így a veszteség. Láthatóan a veszteségtényező legnagyobb értéke "1" lehet. Ezt az esetet Borda-féle kifolyásnak nevezzük.

A veszteségtényező alakulását a különböző paraméterek függvényében a **16.12 ábrán** láthatjuk.



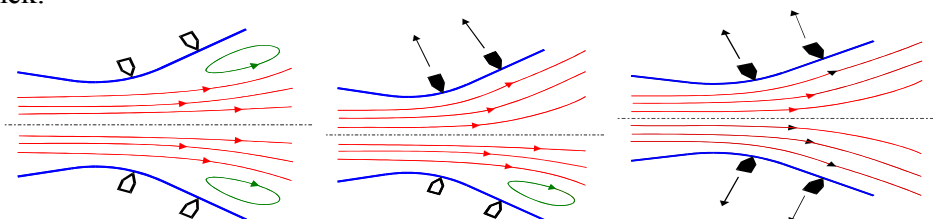
16.12 ábra

A veszteségtényező az eddigiektől eltérően nem az idomdarab előtti sebességre, hanem a csőben távol a belépéstől érvényes sebességre vonatkozik, tehát:

$$\zeta_{be} = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} \cdot v_{cs}^2}$$

16.5.3 Diffúzor

Az áramlás irányában bővülő csőtoldatokat nevezük diffúzoroknak. A Borda-Carnot átmenetnél kisebb veszteséggel lehet az áramlási sebességet csökkenteni diffúzor segítségével. A diffúzorban a folyadékrezecskéknek nyomásnövekedés irányába kell áramlaniuk. Az ehhez szükséges munkát a mozgási energiájuk csökkenése fedezi. A Bernoulli-egyenlet szerint ez a csökkenés éppen egyenlő a nyomás növekedésével. A valóságban a mozgási energia egy része a súrlódással szemben végzett munkára fordítódik. A súrlódás különösen a csőfal mentén érezteti hatását. Az itt haladó részecskék mozgási energiája - főleg hirtelen bővülő diffúzornál - kevés annak a munkának a fedezésére, amelyet a cső közepén áramló közeg nyomásnövekedése igényelne. Ezért a fal mellett áramló részecskék megállnak, sőt vissza is fordulnak. Ekkor a fal mellett erősen gomolygó réteg keletkezik. A beljebb áramló rétegek pedig nem követik tovább a csőfal táguló irányát, attól elválnak. Ezt a jelenséget nevezik **leválásnak**, az általa okozott nyomásvesztést leválási veszteségnek.



Különböző áramképek diffúzorban

16.13 ábra

A **16.13 bal oldali ábráján** egy teljesen hatástalan diffúzor, a középsőn az egyik oldalán levált, a jobbszélsőn pedig egy jól működő állapotot láthatunk.

A leválás megszüntetésének számtalan módja ismert, a legegyszerűbb a diffúzor nyílásszögét csökkenteni, körszimmetrikus esetben az optimális szög kb. 8°. Az ennél kisebb szögű diffúzor nagyon hosszú és ezért a súrlódási veszteség felemésztí a visszanyerhető nyomást.

A leválás megszüntetésének további módjai: a fal mellett nagy sebességű folyadékot juttatunk az áramlásba, vagy az "elfáradt" fali réteget elszívják, ez utóbbit alkalmazták az ábrán látható esetben.

A leválás és a súrlódás hatására a nyomás nem növekszik olyan mértékben a diffúzorban, mint ahogy azt a Bernoulli-egyenlet szerint tehetné. Tehát a nyomás növekszik ugyan a diffúzorban, de nem annyira, mint amennyire ideális esetben nőhetne.

Hogyan határozhatjuk meg egy diffúzor jóságát? Definiálunk egy diffúzor hatásfokot, amely megvalósult nyomásnövekedést $(p_2 - p_1)_{val}$ viszonyítja a Bernoulli-egyenletből ideális esetben létrejövő nyomásnövekedéshez, $(p_2 - p_1)_{id}$. Ezt a hányadost diffúzor hatásfoknak nevezzük.

Felírva a Bernoulli-egyenletet az "1" és a "2"

keresztmetszetek között, kapjuk, hogy:

$$(p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

Így tehát a diffúzor hatásfok:

$$\eta_{diff} = \frac{(p_2 - p_1)_{val}}{\frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)} \quad 16.28$$

A másik jellemző, amely a diffúzort minősíti a diffúzor veszteségtényezője, amely a következő kifejezéssel adható meg:

$$\zeta_{diff} = \frac{\Delta p'_{diff}}{\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2} = \frac{(p_2 - p_1)_{id} + (p_2 - p_1)_{val}}{\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2} \quad 16.29$$

A diffúzorban létrejövő nyomásvesztést viszonyítják a belépő dinamikus nyomáshoz.

Természetesen a hatásfok és a veszteségtényező között szoros kapcsolat áll fenn, ami a következő:

$$\zeta_{diff} = \frac{\frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) - \eta_{diff} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{\frac{\rho}{2} \cdot v_1^2} = (1 - \eta_{diff}) \cdot \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right] \quad 16.30$$

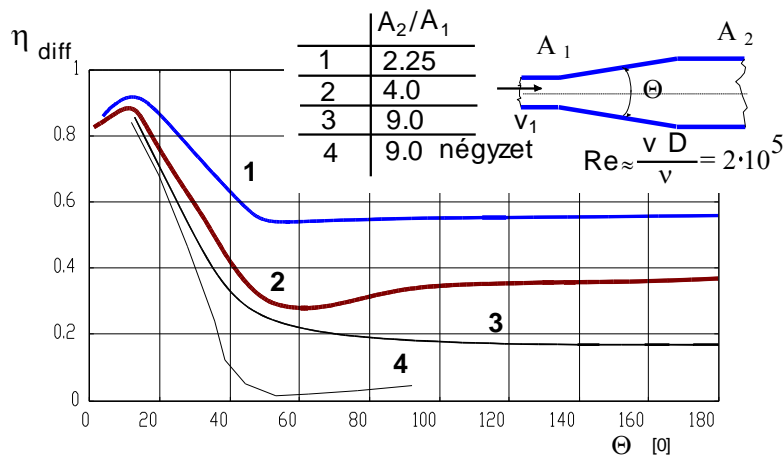
$$\zeta_{diff} = (1 - \eta_{diff}) \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

A kifejezés második részében alkalmaztuk a kontinuitást, mely szerint

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Láthatóan 5-10°-nál van a legjobb hatásfok, azután egy bizonyos szög felett a hatásfok már független a nyílásszögtől, csak a keresztmetszet-viszonytól függ. Az itt kapott állandó hatásfok megegyezik a Borda-Carnot-átmenet diffúzor-hatásfokával. Láthatóan pl. a 2.25

keresztmetszet-viszonynál ez a hatásfok kb. 55%, amely nem is számít rossznak egy diffúzor esetén. Kis keresztmetszet növekedésnél nem nagyon érdemes diffúzort készíteni, mert a hirtelen keresztmetszet növekedés is megfelelő diffúzorként működik.



Diffúzor hatásfoka

Forrás: Varga J.: Hidraulikus és pneumatikus gépek

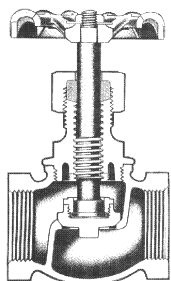
16.15 ábra

A diffúzoros áramlással sok kutatás foglalkozik, mert az áramlástechnikai gépek többségében nagy jelentősége van az áramlás irányában lassuló áramlásoknak. Például a **13. fejezetben** ismertetett radiális ventilátorban is diffúzoros áramlás alakul ki a járókerékben és a csigaházban is. A **16.15 ábrán** a nyílásszög és a keresztmetszet függvényében megadtuk a diffúzor hatásfokának a változását.

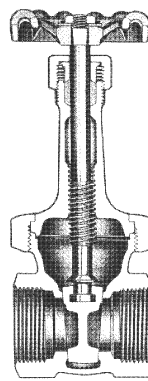
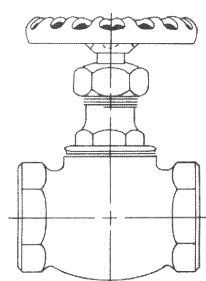
16.5.4 Szelepek, csapok, tolózárak

A szelepek, tolózárak, csappantyúk vesztesége is nagyrészt a Borda-Carnot veszteségre vezethető vissza. Ezek elmozduló elemei leszűkítik az áramlási keresztmetszetet, ezáltal hirtelen keresztmetszet növekedés jön létre a leszűkült keresztmetszet után. A szelepek, tolózárak áramlási veszteségét is ζ_{sz} veszteségtényezővel jellemezzük, amely a $\Delta p'_{sz}$ veszteség és valamely jellemző sebességgel, általában a szerelvény előtti sebességgel számolt dinamikus nyomás hányadosa.

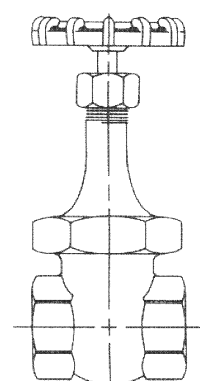
$$\zeta_{sz} = \frac{\Delta p'_{sz}}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2} \quad 16.31$$



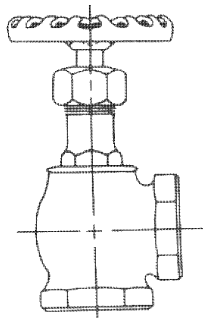
Iránytöréses szelep
16.16 ábra



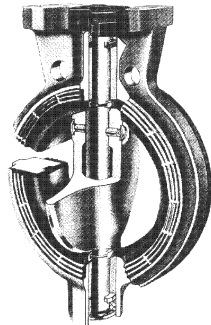
Tolózár
16.17 ábra



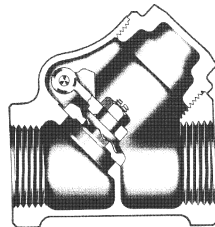
A **16.15 és 16.21 ábrák** különböző típusú szerelvényeket mutatnak. A veszteségtényező nagymértékben függ a gyártmánytól, és a szerelvény elhasználódásától. A veszteségtényező átlagos értékeit a **16.4 táblázatban** adtuk meg, de ettől, gyártmánytól függően, nagymértékű eltérések lehetnek.



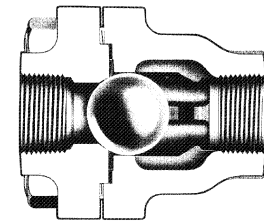
Sarokszelep
16.18 ábra



Pillangószelep
16.19 ábra



Visszacsapó szelep
16.20 ábra



Golyós visszacsapó szelep
16.21 ábra

A táblázatban szerepel az **egyenértékű csőhossz** fogalma. Az egyenes csöveknél az $\frac{\ell}{d} \cdot \lambda$ kifejezés felfogható egy veszteségtényezőnek is. A gondolatmenet fordítva is igaz: egy veszteségtényezőre, " ζ "-ra is meg lehet adni, hogy az milyen hosszú egyenes csőnek felel meg.

Így

$$\zeta = \frac{\ell_e}{d} \cdot \lambda \quad 16.32$$

amelyből az egyenértékű csőhossz, vagy a csőátmérőhöz viszonyított relatív csőhossz megadható. Problémát csupán az okoz, hogy ha a relatív csőhosszból akarjuk a veszteségtényezőt meghatározni, akkor úgy tűnik, mintha szelep veszteségtényezője függne annak a csőnek a csősúrlódási tényezőjétől, amelybe beépítik a szelepet. Ez nyilván nem igaz így.

Típus	vesztesség-tényező ζ	egyenértékű csőhossz $\frac{\ell_e}{d}$
Iránvtöréses szelep teljesen	6.8	340
Sarokszelep teljesen nvitva	2.9	145
Tolózár teljesen nvitva	0.26	13
1/4 nvitva	18	900
1/2 nvitva	3.2	160
3/4 nvitva	0.7	35
Visszacsapó szelep	2.7	135
Golyós visszacsapó szelep.	3	150
Pillangószelep teli. nvitva	0.3	15

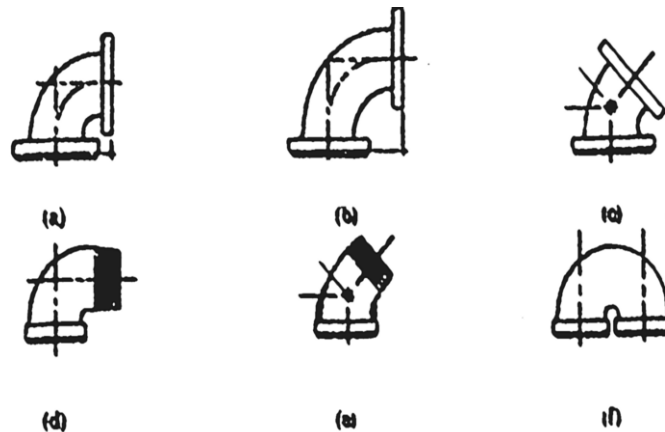
Szelepek ellenállás-tényezője és egyenértékű csőhossza
16.4 táblázat

A táblázatban is feltételeztünk egy átlagos $\lambda = 0.02$ csősúrlódási tényezőt és az egyenértékű csőhossz erre vonatkozik. A tapasztalat szerint adott szerelvényhez, adott típusú csővezetékhez

csatlakoztatnak, így a " λ " értéke elég szűk határok között változhat, tehát az egyenértékű csőhossz bevezetése ilyen feltételek mellett megfelelő közelítés.

16.5.5 Könyökök, ívek

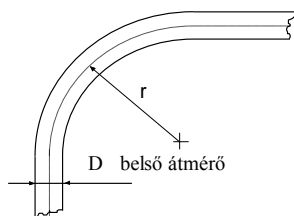
A csőekben áramló közegek irányváltozásainál, a csőívekben, könyökökben jelentős áramlási veszteségek keletkezhetnek, amelyeket ugyancsak " ζ " veszteségtényezővel jellemeznek. A veszteségek okai között a fali csúsztatófeszültség általában alárendelt szerepet játszik. Nagyobb jelentősége van a szekunder áramlások és leválások miatti veszteségeknek.



Csőkönyökök

16.22 ábra

Az ívek, könyökök veszteségét csökkenteni lehet az átmenetek lekerekítésével ill. az " r/d " relatív görbület növelésével, vagy terelőlapátok alkalmazásával, amelyekkel nagyobb relatív görbületű rész-íveket ill. rész-könyököket hozhatunk létre.

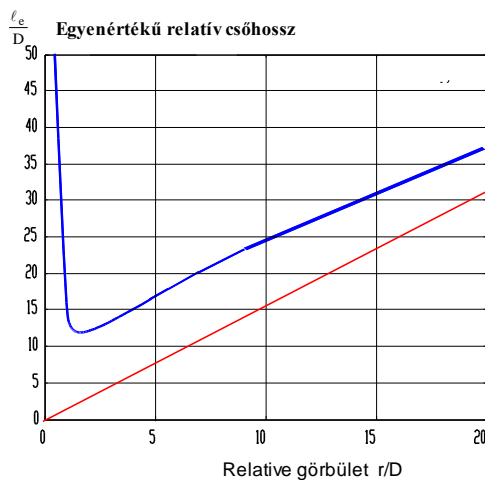


Könyök
16.23 ábra

A **16.22 ábrán** előre gyártott íveket és könyököket láthatunk. Ezeket menetes és karimás kivitelben szokták gyártani a szabványosított egyenes csővekhez.

De nemcsak előre gyártott íveket alkalmazhatunk, hanem a csővezeték szerelésekor, a helyszínen is készíthetünk csőíveket. A **16.24 ábrán** egy 90° -os könyök egyenértékű csőhosszát tüntettük fel a relatív görbület (r/D) függvényében. Az egyenértékű csőhosszban benne van az irányváltoztatás miatti veszteség, plusz a cső hossza mentén kialakuló súrlódási veszteség. Látható, hogy a veszteségnek minimuma van kb. $1.5-2 r/D$ értéknél.

Az ábrában feltüntettük az ívvel azonos hosszúságú egyenes cső hosszát is. Nagyon hosszú íveknél a két függvény közelít egymáshoz.



16.24 ábra

16.5.6 Légtechnikai berendezések

Az előző alfejezetben főként a vízvezeték rendszerekben alkalmazott szerelvényeket láthattunk. A teljesség igénye nélkül néhány légtechnikai berendezést is vázolunk.

A légszelepek zsaluk, viszonylag közismertek, hisz ezek a szellőzőrendszerek terembe csatlakozó elemei, amelyeket jól lehet látni a szellőztetett helyiség falán, mennyezetén. A szellőzés technikában alkalmaznak főként négyszögletes vezetékeket a helykihasználás és az egyszerűbb gyártás és szerelés érdekében. A **16.25 ábrán** egy levegőszűrőt láthatunk (félíg szétszerelt állapotban).

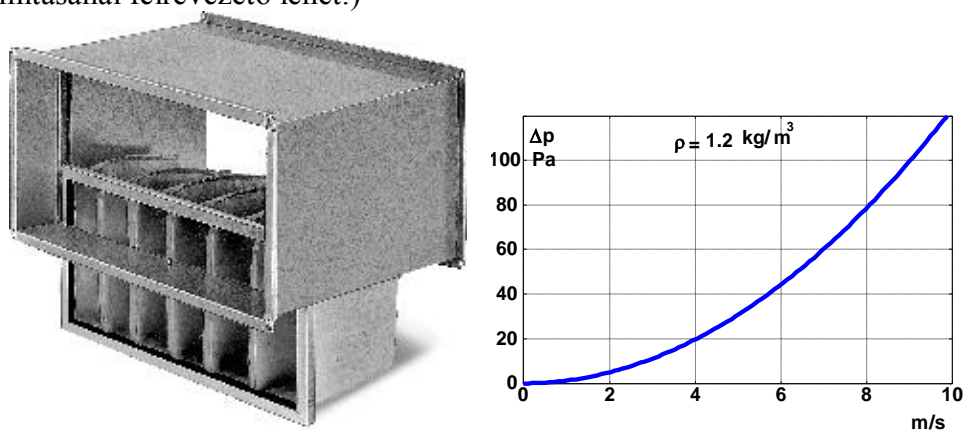
A "V" alakban elhelyezett szűrőbetéteken keresztül áramlik a levegő. Az ilyen elrendezésnek fő előnye, hogy a szűrőszöveten átáramló levegő sebessége kicsi a viszonylag nagy felület miatt, és így a szűrő eredő légellenállása sokkal kisebb, mintha a keresztmetszetet egyetlen sík szűrővel látták volna el. A szűrő légellenállását meg lehetne adni egy "ζ"-tényezővel (a görbéből kiszámítható $\zeta=2$, az ellenőrzést az olvasóra bízunk hasznos gyakorlatként,

$\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ közegsűrűség mellett.), de, hogy a felhasználó dolgát megkönnyítse a gyártó,

megadja a csőkeresztmetszetre vonatkozó átlagsebesség függvényében a légellenállást. A diagram egyben kijelöli azt a sebességtartományt is, amelyben célszerű használni a berendezést. Légtechnikában $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ légsebesség fölé nem szoktak menni. Egy másik gyakran

alkalmazott elem a légfűtő berendezés. A **16.26 ábrán** látható. A hőcserélőt $80^\circ\text{C}/60^\circ\text{C}$ vízzel fűtik. (Az első szám a bejövő, a második a kimenő víz hőmérsékletét jelenti.) A levegőoldali és a vízoldali ellenállást is megadja a katalógus, az ábrán csak a levegőoldali légellenállást tüntettük fel a WHR 100, WHR 125, WHR 160 típusokra. A betű jelzés utáni szám a csatlakozó csőátmérőt jelenti mm-ben. A katalógus itt nem a sebesség, hanem a levegő térfogatáramának függvényében adja meg a nyomásesést, $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, levegő sűrűsége.

(Természetesen itt is számolható veszteségtényező, bár itt a levegő sűrűsége a hőcserélőn történő átáramláskor, a felmelegítés miatt jelentősen változhat, így a veszteségtényező számításánál félrevezető lehet.)



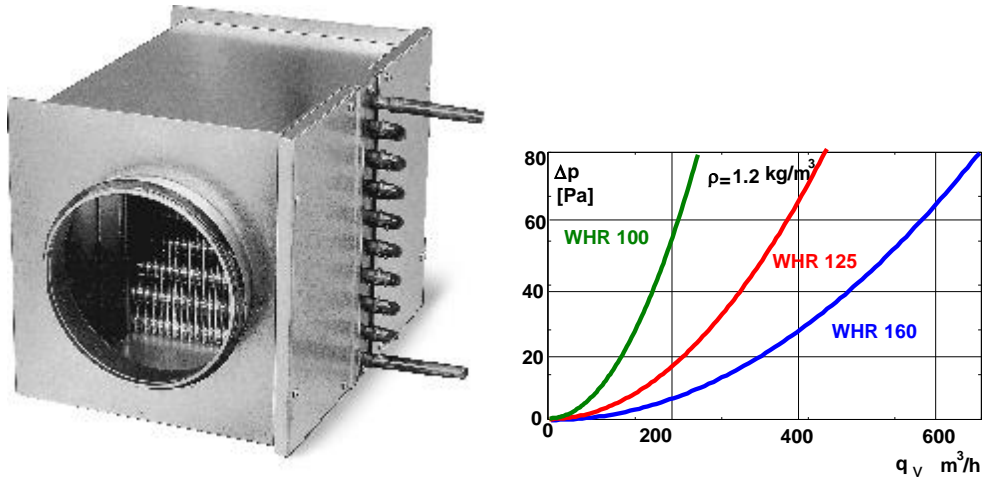
kamleithner budapest Kft

E-Pool VEZÉRKÉPVISELET

16.25 ábra

A fentiekben áttekintettünk néhány fontosabb veszteségforrást. Egyéb elemek (pl. csőelágazások, zsaluk szűkítők stb.) veszteségtényezőit, vagy közvetlen a nyomásvesztésüket szakkönyvekből, katalógusokból, gyártmányismertetőkből lehet kivenni.

A " ζ " veszteségtényezők és a " λ " csősúrlódási tényező számolt, vagy katalógusból, kivett értékei a valóságos alkalmazásoknál csak közelítően helyesek, hiszen a képletek, ill. mért értékek nem veszik figyelembe a súrlódási veszteségforrások egymásra hatását. Egyenes csőbe való beáramlásnál pl. a kialakult csőáramlás csak a belépéstől 5-20d távolságban következik be, addig a veszteség az áramlás átrendeződése miatt kicsit nagyobb, mint kialakult csőáramlásban. Ugyancsak nem közömbös egy könyök veszteségtényezőjének értéke szempontjából, hogy előtte egyenes cső, vagy egy másik könyök helyezkedik-e el. Ez utóbbi esetben az is jelentősen befolyásolhatja a második csőív " ζ " veszteségtényezőjének értékét, hogy a két ív "U", "S" vagy térben elcsavart helyzetű-e. Egy rendszerben a veszteségszámítást biztonsági faktoriall kell elvégezni, ill. alkalmazni.



Légfűtő egység és a levegő oldali ellenállás-görbéje
16.26 ábra



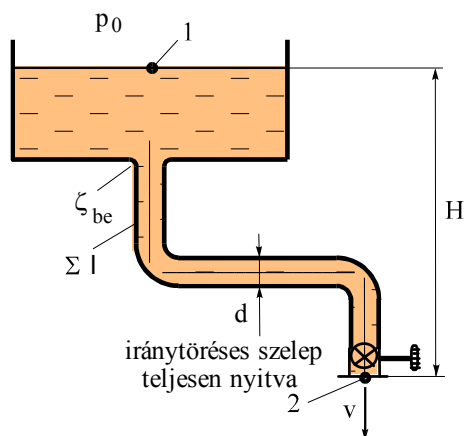
17. Csővezeték rendszerek számítása

A **16.3 fejezetben** a csőáramlás három tipikus esetét tárgyaltuk egyenes csőre korlátozva. A három alapfeladatot ki lehet terjeszteni olyan csővezeték rendszerekre, ahol az egyenes csövek mellett szerelvények, csőidomok elágazások is előfordulnak a rendszerben.



17.1 Olajzó vezeték

Az ábrán vázolt kenő berendezésben "v" viszkozitású olaj áramlik, stacioner áramlással.



Olajzó vezeték
10.1 ábra

adatok: $\Sigma \ell = 2\text{m}$; *névleges csőátmérő;*

$$NA = \frac{1}{4}; H = 1.5\text{m}; \zeta_{be} = 1.2; v = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Kérdések:

- a./** Számítsuk ki az olaj áramlási sebességét!
A számítás során a cső egyenesnek tekinthető.
b./ Mekkora hibát követünk el a számításban, ha csak az egyenes cső veszteségét vesszük figyelembe?

Megoldás:

A **II. típusú** feladatcsoportba sorolható a probléma, amikor a nyomáskülönbség adott és a térfogatáramot, vagy az átlagsebességet szeretnénk meghatározni. Az ott (**16.3.2 fejezetben**) alkalmazott iteráció helyett közvetlen számítással tudjuk megadni a sebességet, mivel lamináris lesz az áramlás.

Amennyiben a sűrűlésnek döntő szerepe van az áramlás kialakításában, akkor a **16.6 veszteséges Bernoulli-egyenletet** kell a feladat megoldása során alkalmazni.

a./ Írjuk fel az "1" és "2" pontok között:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2 + \Sigma \Delta p' \quad 17.1$$

A veszteséges tagot, tagokat az áramlás irányába eső oldalhoz kell hozzáadni, jelen esetben ez a "2" pont. Az adott feladatban tudjuk, hogy:

$$p_1 = p_2 = p_0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = v, \quad z_2 = 0, \quad z_1 = H$$

Ezek felhasználásával a veszteséges Bernoulli-egyenlet a következő:

$$\rho \cdot g \cdot H = \frac{\rho}{2} v^2 + \Sigma \Delta p' \quad 17.2$$

A nyomásvesztés jelen esetben a sebességprofil kialakulása során fellépő belépési veszteségből és a fali csúsztatófeszültség által okozott csősűrűlési veszteségből valamint az iránytöréses szelepen keletkező nyomásvesztéséből tevődik össze:

$$\Sigma \Delta p' = \left(\zeta_{be} + \zeta_{sz} + \frac{\Sigma \ell}{d} \lambda \right) \cdot \frac{\rho}{2} v^2$$

Tekintettel az olaj nagy viszkozitására és a cső kis átmérőjére, feltételezhetjük, hogy az áramlás lamináris lesz. A számítás végén a Reynolds-szám meghatározásával ellenőriznünk kell ennek a feltevésnek a helyességét. Lamináris áramlás esetén a csősúrlódási tényező a

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

összefüggéssel számítható.

Mivel a csővezetéknek a névleges átmérője adott, így **17.1 táblázatból** (e fejezet végén) ki kell keresni a tényleges belső átmérőt, ami:

$$d = 9.2\text{mm}$$

Mindezek figyelembe vételével a 17.2 egyenlet a következő formában írható fel:

$$\rho \cdot g \cdot H = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \left(1 + \zeta_{be} + \zeta_{sz} + \frac{\Sigma \ell}{d} \frac{64 \cdot v}{v \cdot d} \right)$$

A sebességre egy másodfokú egyenletet kapunk, ami a következő:

$$(1 + \zeta_{be} + \zeta_{sz}) \cdot v^2 + \frac{64 \cdot v \cdot \Sigma \ell}{d^2} v - 2 \cdot g \cdot H = 0 \quad 17.3$$

A szelep veszteség-tényezőjére a feladat nem tartalmaz adatot, így a **9.5 táblázatból** vehetünk közelítő veszteségtényezőt, amely

$$\zeta_{sz} = 6.8$$

A másodfokú egyenlet:

$$(1 + 0.2 + 6.8) \cdot v^2 + \frac{64 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{0.0092^2} \cdot v - 2 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 0$$

$$9 \cdot v^2 + 302.45 \cdot v - 29.43 = 0$$

$$v_{12} = \frac{-302.45 \pm \sqrt{302.45^2 + 1059.48}}{18}$$

megoldásával a sebességre (természetesen csak a pozitív megoldás jöhet szóba) kapjuk:

$$v = 0.0970 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ellenőrizzük le a Reynolds-szám értékét:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0.0970 \cdot 0.0092}{2 \cdot 10^{-4}} = 4.46$$

tehát valóban lamináris az áramlás, mert sokkal kisebb mint 2300.

b./ Amennyiben csak az egyenes csőben keletkező súrlódási veszteséget vesszük figyelembe, akkor a 17.3 egyenletben a négyzetes tagot elhagyhatjuk, így a megoldandó egyenlet

$$\frac{64 \cdot v \cdot \Sigma \ell}{d^2} v - 2 \cdot g \cdot H = 0$$

Behelyettesítve az adatokat és kifejezve a sebességet a

$$v = \frac{2 \cdot 9.81 \cdot 1.5 \cdot 0.0092^2}{64 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = 0.0973 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

eredményre jutunk. Láthatóan a két eredmény közötti eltérés elenyésző. Ez annyit jelent, hogy az egyenes cső vesztesége sokkal nagyobb, mint a belépési veszteség és a szelep vesztesége. A csósúrlódási tényező és a cső veszteségtényezője számszerűen a következő:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{4.46} = 14.34 \quad \text{és} \quad \frac{\sum \ell}{d} \cdot \lambda = \frac{2}{0.0092} \cdot 14.34 = 3119.51$$

Az ezres nagyságrendű egyenes cső vesztesége mellett az egyes nagyságrendű veszteség tényezők elhanyagolhatók.

17.2 Víztorny

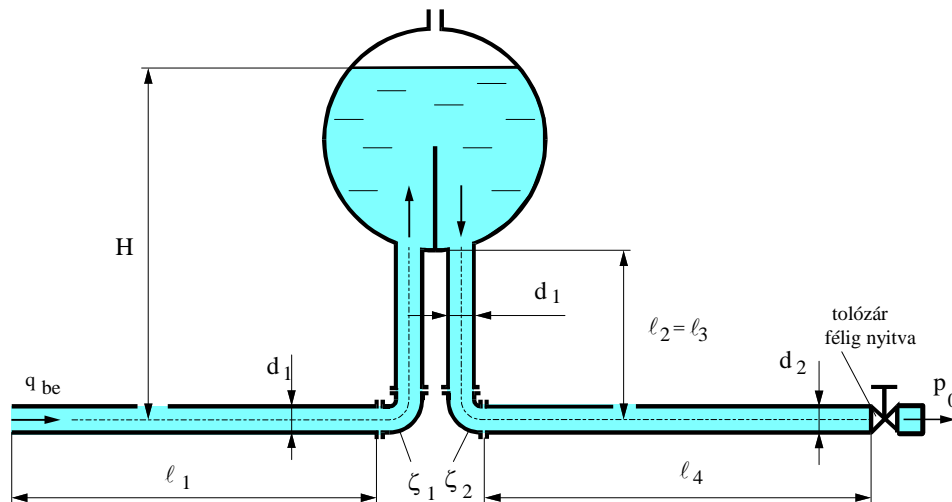


Egy víztorny tartályában a vízszint állandó "H" magasságú. A fogyasztást q_{be} térfogatáram betáplálásával pótoljuk. A fogyasztás egy félig nyitott tolózár keresztül a szabadba történő öntözés.

Ismert a térfogatáram és a csővezeték geometriája, a feladat pedig a nyomáskülönbség meghatározása. Így a **16.3.1 fejezetben** tárgyalt **I. típusú** feladatot kell megoldanunk, kibővítve szerelvények veszteségeivel.

adatok: $\ell_1 = 50\text{m}$; $\ell_2 = \ell_3 = 20\text{m}$; $\ell_4 = 20\text{m}$; $NA_1 = 2\text{col}$; $NA_2 = 1\text{col}$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 1.2; \quad q_{be} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}; \quad v = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}; \quad \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



Víztorny
10.3 ábra

Kérdések:

a./ Számítsuk ki a betáplálási pontban szükséges túlnyomást, ha adottak az átáramlott idomok veszteségtényezői és a hálózat felépítése!

b./ Mekkora a „H” vízmagasság?

A csósúrlódási tényezőt a Moody-diagram segítségével számítsuk. A hiányzó adatokat a jegyzetben lévő diagramokból és táblázatokból vehetjük.

Megoldás:

a./ Elsőként a csővezetékek tényleges átmérőjét határozzuk meg a **17.1 táblázatból** vesszük:

$$NA_1 d_1 = 52.5\text{mm} \quad A_1 = 2.168 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$$

$$NA_2 d_2 = 26.6\text{mm} \quad A_2 = 5.574 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$$

Az egyenes csövek érdességét a **16.1 táblázatból**:

$$k = 0.02\text{mm}$$

értékre választjuk, feltételezve, hogy a rendszerben lévő csövek már nem újak, és emiatt kissé rozsdásak.

A félig nyitott tolozár veszteség tényezőjét a **16.3 táblázatból** véve

$$\zeta_t = 3.2$$

adódik. Számítsuk ki az áramlási sebességeket a "d₁" átmérőjű csövekben:

$$v_1 = \frac{q_{be}}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2.168 \cdot 10^{-3}} = 1.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a "d₂" átmérőjű csőben pedig:

$$v_2 = \frac{q_{be}}{A_2} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{5.574 \cdot 10^{-4}} = 7.17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A betáplálás és a fogyasztás pontjai között alkalmazzuk a veszteséges Bernoulli-egyenletet:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'_{12}$$

A "vizes" szakmával foglalkozó szakemberek többsége előszeretettel használja a Bernoulli-egyenletnek magasságokkal kifejezett dimenziójú alakját, így használjuk mi is erre az esetre:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h'_{12}$$

Az egyenletben szereplő veszteséges, méter dimenziójú mennyiséget $\frac{\Delta p'_{12}}{\rho \cdot g} = h'_{12}$

vesztésmagasságnak nevezzük.

A vesztesésmagasság:

$$\frac{\Delta p'_{12}}{\rho \cdot g} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{d_1} \lambda_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + 1 \right) + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{\ell_4}{d_2} \lambda_2 + \zeta_t \right) \quad 17.4$$

A veszteségtényezők a Reynolds-szám és a relatív érdesség függvényében a Moody-diagramból véve (**16.7 ábra**):

$$\frac{d_1}{k} = \frac{52.5}{0.02} = 2625 \quad \text{és} \quad \frac{d_2}{k} = \frac{26.6}{0.02} = 1330,$$
$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{1.84 \cdot 0.0525}{1.3 \cdot 10^{-6}} = 7.43 \cdot 10^4, \quad \text{a diagramból } \lambda_1 = 0.02 \text{ és}$$
$$Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{7.14 \cdot 0.0266}{1.3 \cdot 10^{-6}} = 1.46 \cdot 10^5, \quad \text{a diagramból } \lambda_2 = 0.021$$

Ezek felhasználásával a nyomásvesztés számítása a következő:

$$h'_{12} = \frac{\Delta p'_{12}}{\rho \cdot g} = \frac{1.84^2}{2 \cdot 9.81} \cdot \left(\frac{50 + 2 \cdot 20}{0.0525} \cdot 0.02 + 1.2 + 1.2 + 1 \right) + \frac{7.17^2}{2 \cdot 9.81} \cdot \left(\frac{20}{0.0266} \cdot 0.021 + 3.2 \right)$$

$$h'_{12} = 56.26 \text{ m}, \quad (\Delta p'_{12} = h'_{12} \cdot \rho \cdot g = 5.52 \cdot 10^5 \text{ Pa})$$

amelyből a túlnyomás a betáplálási pontban:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + h'_{12} \cdot \rho \cdot g = \frac{10^3}{2} (7.17^2 - 1.84^2) + 5.52 \cdot 10^5 = 5.76 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

b./ A „H” magasság megállapításához a betáplálási pont és a víztoronyban lévő víz felszínén lévő (legyen „0” pont) pontjai között alkalmazzuk a veszteséges Bernoulli-egyenletet:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + H + h'_{10}$$

Fejezzük ki az egyenletből a keresett „H” értékét:

$$H = \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - h'_{10}$$

A képlet jobb oldalán tulajdonképpen mindent ismerünk, hiszen a „h'10” veszteségmagasságot az előzőekben már kiszámítottuk a 17.4 egyenletben a v1 sebességhez tartozó veszteségtagokkal, tehát:

$$h'_{10} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{d_1} \lambda_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + 1 \right) = \frac{1.84^2}{2 \cdot 9.81} \cdot \left(\frac{50 + 2 \cdot 20}{0.0525} \cdot 0.02 + 1.2 + 1.2 + 1 \right) = 6.5 \text{ m}$$

A nyomáskülönbséget pedig az előző kérdésre adott válaszban kaptuk meg, így a keresett vízmagasság:

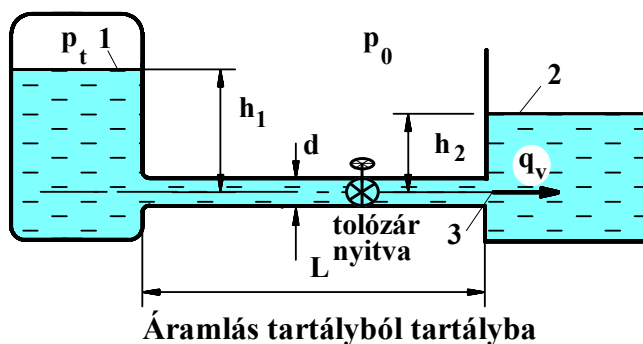
$$H = \frac{p_1 - p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - h'_{10} = \frac{5.52 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9.81} + \frac{1.84^2}{2 \cdot 9.81} - 6.5 = 49.95 \approx 50 \text{ m}$$

17.3 Tartályból tartályba áramlás



Az ábrán egy nyomás alatt lévő tartályból egy nyitott tartályba víz áramlik. A jelenséget stacioner állapotnak vehetjük.

Az összekötő cső szokványos, kissé rozsdás 2 colos acélcső.



Áramlás tartályból tartályba
10.3 ábra

adatok: $v = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$;

$p_0 = 10^5 \text{ Pa}; \quad p_t = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa};$

(abszolút nyomások) $L = 15 \text{ m};$

$h_1 = 1.4 \text{ m}; \quad h_2 = 0.8 \text{ m}; \quad d = 52.5 \text{ mm}$

Kérdés:

Mekkora a "q_v" térfogatáram az "L" hosszúságú csövön?

A feladat jellege a II. típusú (ld. **16.3.2 fejezet**), amelyben adott

geometria és nyomáskülönbség mellett keressük a térfogatáramot.

I. megoldás: Alkalmazzuk a veszteséges Bernoulli-egyenletet az 1-es és a 2-es pontok között:

$$\frac{p_t}{\rho \cdot g} + h_1 = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + h_2 + h'_{12}.$$

Írjuk fel a veszteségeket:

$$h'_{12} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \zeta_{be} + \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{L}{d} \cdot \lambda + \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \zeta_t + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

A veszteség első tagja a belépési veszteség, amelynek a veszteség tényezőjét a **16.11 ábra** alapján $\zeta_{be} = 0.5$ értékűnek, a második tag az egyenes cső vesztesége. A harmadik tag a nyitott tolozáré, amely $\zeta_t = 0.26$, a **16.5 táblázatból** választva. A negyedik tag pedig a jobboldali tartályba való beáramláskor kialakuló kilépési veszteség.

A fenti kifejezésekben a sebességet nem ismerjük, ezért a " λ " kiszámításához szükséges Re-számot sem tudjuk megadni. A megoldáshoz célszerű iterációt alkalmazni. Ennek első lépéseként a fenti két egyenletből egy olyan kifejezést alakítunk ki, amelyben a sebességet megadjuk a " λ " és az egyéb ismert mennyiségek függvényeként. Fejezzük ki a Bernoulli-egyenletből is a h'_{12} -t.

$$h'_{12} = \frac{P_t}{\rho \cdot g} - \frac{P_0}{\rho \cdot g} + (h_1 - h_2)$$

Majd helyettesítsük a veszteség kifejezésébe, és fejezzük ki a " v " sebességet és írjuk be a számértékeket is.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{\frac{P_t}{\rho \cdot g} - \frac{P_0}{\rho \cdot g} + (h_1 - h_2)}{\frac{L}{d} \cdot \lambda + \zeta_{be} + \zeta_t + 1}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \frac{20.38 - 10.19 + (1.4 - 0.8)}{\frac{15}{0.0525} \cdot \lambda + 0.5 + 0.26 + 1}}$$

$$v = \sqrt{\frac{211.7}{285.7 \cdot \lambda + 1.76}} \quad 17.5$$

Az 17.5 kifejezés szolgál az iteráció alapjául.

A sebességre történő iterációs eljárás:

A./ Első lépésként megválasztjuk a " λ " csősúrlódási tényezőt.

A szokványos acélső érdességét most is a **16.1 táblázatból** választjuk, most $k = 0.03$

értéknek, így a relatív érdesség értéke: $\frac{d}{k} = \frac{52.5}{0.03} = 1750$

A kezdő " λ "-t szabadon választhatjuk. Célszerű induló érték:

$$\lambda_0 = 0.02 \div 0.03, \quad \text{jelen esetben legyen } \lambda_0 = 0.02$$

B./ A következő lépésben az adott " λ "-hoz megkeressük a " v_0 ", első közelítő sebesség értékét a 17.5 kifejezés segítségével:

$$v_0 = \sqrt{\frac{211.7}{285.7 \cdot \lambda + 1.76}} = \sqrt{\frac{211.7}{285.7 \cdot 0.02 + 1.76}} = 5.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

C./ Ezután a kapott " v_0 " értékkel már tudunk Reynolds-számot számolni:

$$\text{Re}_0 = \frac{v_0 \cdot d}{\nu} = \frac{5.32 \cdot 0.0525}{1.3 \cdot 10^{-6}} = 2.149 \cdot 10^5$$

D./ A Re-szám ismeretében, a Moody-diagramból, vagy a diagramot jól közelítő, 9.15 Haaland által javasolt kifejezést használjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{k}{d} \right)^{1.11} \right] = -1.8 \cdot \log_{10} \left[\frac{6.9}{2.149 \cdot 10^5} + \left(\frac{1}{3.7} \right)^{1.11} \right] = 7.229,$$

amelyből a csőszűrlődési tényező második közelítő értéke:

$$\lambda_1 = 0.0191$$

E./ Ebben a lépésben összehasonlítjuk a most kapott " λ_1 "-t a felvett " λ_0 "-val, ha az eltérés egy kívánt értéknél, pl. 3%-nál kisebb, akkor a számítást befejezettnek tekintjük és az utolsó lépésben kapott átmérőt fogadjuk el végső eredménynek.

Jelen esetben az eltérés

$$H[\%] = \frac{|0.02 - 0.0191|}{0.0191} \cdot 100 = 4.71\%,$$

amely még nagyobb mint a kitűzött hibakorlát, ezért visszamegyünk a **B./** lépéshez és újabb iterációt végzünk.

$$v_1 = 5.41 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \text{Re}_1 = 2.187 \cdot 10^5; \lambda_2 = 0.01887$$

Megvizsgálva az eltérést a következőt kapjuk:

$$H[\%] = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\lambda_2} \cdot 100 = \frac{|0.01887 - 0.0191|}{0.01887} \cdot 100 = 1.2\%.$$

Így az utolsó lépésben kapott eredményeket véglegesnek fogadjuk el. A térfogatáram ezek után:

$$q = v \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 5.41 \cdot \frac{0.0525^2 \cdot \pi}{4} = 0.0117 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

II. megoldás:

Alkalmazzuk a veszteséges Bernoulli-egyenletet a az "1-es" és a "3-as" pontok között.

$$\frac{p_t}{\rho \cdot g} + h_1 = \frac{p_t + \rho \cdot g \cdot h_2}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + h'_{13}$$

A jobb oldal első tagja azt fejezi ki, hogy a nyitott tartályba belépő közeg magasságában a nyomás nagyobb mint a légköri. A sebességtag most a Bernoulli-egyenlet része, nem pedig kilépési veszteség. A veszteség a belépési, az egyenes csőben kialakuló, és a tolózárón fellépő veszteségekből adódik:

$$h'_{13} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \zeta_{be} + \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{L}{d} \cdot \lambda + \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \zeta_t$$

A megoldás további lépései megegyeznek az előző megoldással.

A **III. típusú feladat**, amelynél csőátmérő az ismeretlen, és nemcsak egyenes csöveket, hanem egyéb veszteségforrásokat is tartalmaz a rendszer, a direkt megoldás nagyon bonyolulttá válhat. Célszerűbb ilyen esetben visszavezetni az I, vagy a II típusú problémák valamelyikére.

Adott nyomáseséshez és térfogatáramhoz meg kell találni azt a csővezetékét, amely az igényeket tudja teljesíteni.

A megoldáshoz kijelöljük a vezeték nyomvonalát, iránytöréseket, szűkítéseket stb.-t, majd megválasztjuk a csőátmérőket és a vezeték egyéb jellemzőit.

A feladatot visszavezethetjük

a./ adott térfogatáram és a csőátmérővel az I. típusú feladatra, vagy

b./ adott nyomáseséssel és a csőátmérővel a II. típusú feladatra.

Az **a./** esetben a kiszámított nyomásesésnek kisebbnek kell lenni, mint az igényként megadott értéknek,

a **b./** esetben pedig a kiszámított térfogatáramnak nagyobbak kell lenni, mint az igényként megfogalmazott értéknek.

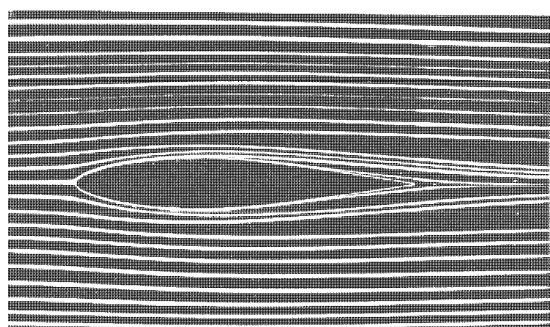
A tervezési feladatot annál jobban oldottuk meg, minél kisebb az eltérés az igény és a számított eredmények között. Ha nagy az eltérés, akkor indokolatlanul nagy csőátmérőket választottunk, így a vezeték beszerzési és telepítési költségei nagyobbak lesznek a szükségesnél.

Amennyiben nem teljesülnek a fent említett feltételek, akkor új csőátmérőket kell választani.



11. Testekre ható áramlási erők

A körüláramlott testekre az áramlás legtöbb esetben valamilyen erőt gyakorol. A **14. fejezetben** már foglalkoztunk a végtelen szárnyácsokra ható erővel, majd az egyedülálló szárnyra ható erő nagyságát és irányát is meghatároztuk. Zsukovszkij tétele szerint a szárnyra ható **felhajtóerő** merőlegesen hat a szárnytól végtelen távol lévő sebesség irányára. A sebességgel párhuzamos komponense ideális áramlásban az erőnek nincsen. A valóságos



Szárnyszelvény
18.1 ábra

folyadék áramlásakor mindig fellép az áramlás irányával szemben ható erő, az **ellenállás erő**.

(Az ideális folyadékban is felléphet ellenállás erő, például, ha a test gyorsul a folyadékhoz képest.)

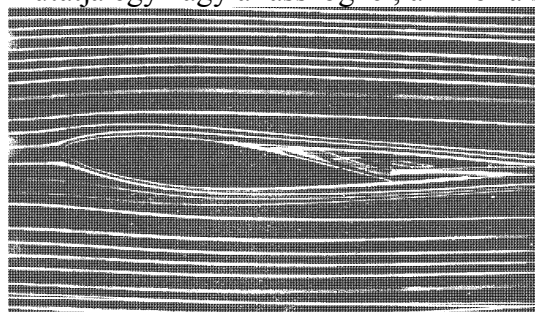
A valóságos folyadékban fellépő ellenállást két részre oszthatjuk: a **súrlódási-** és **nyomási-**, vagy **alakellenállásra**.

A súrlódási ellenállás a test felülete és a folyadék között ébredő csúsztatófeszültségek eredménye.

A nyomás-, vagy alakellenállás abból származik, hogy a súrlódás következtében a test mögött a

nyomás kisebb, mint súrlódásmentes esetben lenne.

Az áramvonalas testek ellenállása kicsi. Például a **18.1 ábra** egy NACA 64A015 szimmetrikus szárnyprofil mutat, amely áramvonalas. A körülötte kialakuló áramkép nagyon hasonlít az ideális áramláshoz, a szárnyon ébredő ellenálláserő igen kicsi. Az ellenállás ugrásszerűen megnő, ha a testről az áramlás leválik. A **18.2 ábra** az előző szárnyszelvényt mutatja egy nagy állásszögnél, amikor a szárny feletti áramlás leválik a felső szárnyfelületről.



Leválás a szárnyszelvényen
18.2 ábra

A nem áramvonalas testeken majdnem mindig fellép az áramlás leválása, ezért ezek ellenállásának nagy részét az alakellenállás adja.

Vannak olyan testek, melyeknek alakja a leválás helyét a Reynolds-számtól függetlenül eldönti. Ilyenek az éles szélekkel szögletekkel rendelkező testek (pl. kocka, vasszerkezetek, szögletes épületek). Ilyen esetekben a súrlódási ellenállás elhanyagolható az alak ellenállás mellett, ezeket a testeket ellenállás szempontjából **Reynolds-számra érzéketlen testeknek** nevezzük. Ezzel

szemben a görbült felületű testeket, melyeknél a leválás helye a Reynolds-számtól függ, **Reynolds-számra érzékeny** testeknek nevezzük.

Az előzőekben az ellenállás szempontjából osztottuk két csoportba a testeket. Pontosabban fogalmazva az ellenállás-tényező az amelyik függ, vagy nem függ a Reynolds-számtól.

Az ellenállás-tényező egyenlő az ellenállás erő (F_e) osztva a test egy jellemző felületével (A)

és a test előtt messze mérhető dinamikus nyomással $\left(\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2\right)$, tehát:

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot A} \quad 18.1$$

A Reynolds-szám pedig a test előtt messze mérhető zavartalan áramlás sebessége (v_∞), szorozva a test egy jellemző méretével, (pl. henger esetén ez a henger átmérője, d) és osztva a közeg kinematikai viszkozitásával (ν), tehát:

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu} \quad 18.2$$

Mind az ellenállás-tényező, mind a Reynolds-szám dimenziótlan mennyiségek.

18.1 A henger és gömb körüli áramlás

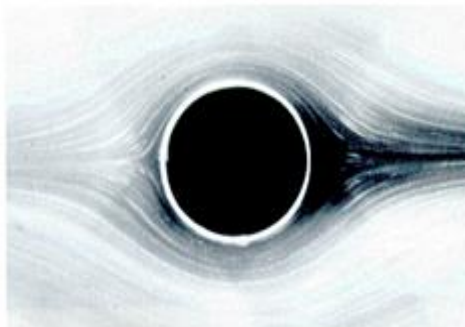
A henger és a gömb ellenállásának nagyrésztét az alak ellenállás teszi ki, a súrlódási ellenállás emellett elhanyagolható. A **18.3 ábrán** egy végtelen hosszú körhenger körüli áramlást láthatunk különböző Reynolds-számoknál. Az ellenállás-tényezőt Reynolds-szám függvényében a **18.4 ábrán** láthatjuk. Megfigyelhető, hogy növekvő Reynolds-számmal egyre nagyobb lesz a leválási zóna a henger mögött. Kb. 1-nél kisebb Re-számoknál az ellenállás-tényező a sebességgel közel lineárisan csökken, tehát az ellenállás erő a sebességgel lineárisan nő. Ez a **18.3/a ábrának** megfelelő áramkép. 1-nél nagyobb Re-számoknál a görbe fokozatosan átmegy vízszintesbe, az ekkor kialakuló áramképeket a **18.3/b és /c** ábrákon láthatjuk. A henger mögött egyre nagyobb területen válik le az áramlás.

Kb. $Re=100$ -tól kezdve a két oldalon leváló örvények periodikusan követik egymást. Az így kialakuló szabályos örvénysort Kármán-féle örvénysornak nevezik, felfedezőjéről (ld. **18.3/d ábra**). (**Kármán Tódor 1881-1957 magyar-amerikai gépészmérnök feltaláló**). Az egyes Reynold-számokhoz tartozó ellenállás-tényezőket a **18.4 ábrán** láthatjuk pontokkal jelölve.

Kb. $Re \approx 100 \div 10^5$ tartományban az ellenállás-tényező közel állandó, vagyis az ellenálláserő



a./ $Re=0.3$



b./ $Re=13$



c./ $Re=26$

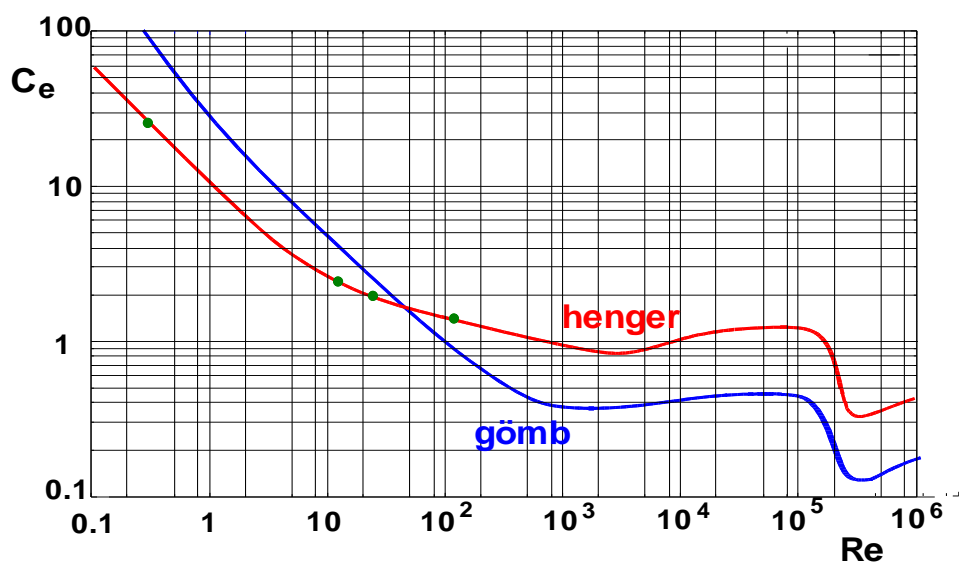


d./ $Re=140$

Henger körüli áramlás különböző Reynolds-számok esetén 18.3 ábra

(F_e) a sebesség négyzetével lesz arányos. A leválás előtt a henger körül kialakuló határréteg ebben a tartományban lamináris marad.

A periodikusan leváló örvények a hengerre visszahatnak és bizonyos esetekben azt is rezgésbe hozzák. Ezt a jelenséget lehet pl. érezni, ha botot vízben bizonyos sebességgel mozgatunk, de ez okozza a magasban vezetett villanyvezetékek rezgését, zizegését szeles időben.



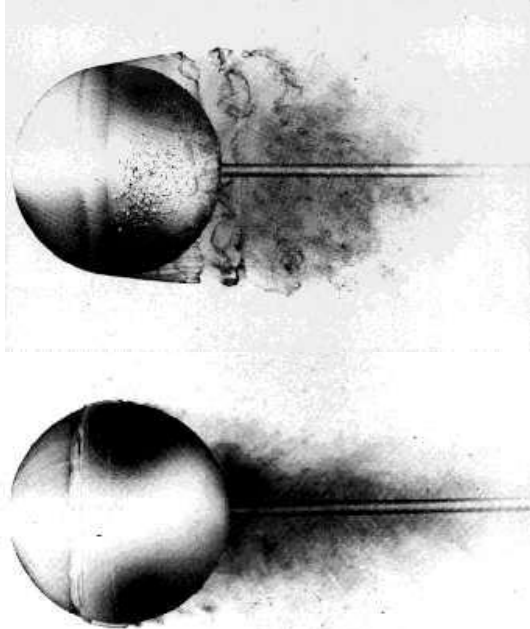
Henger és gömb ellenállás-tényezője a Reynolds-szám függvényében
18.4 ábra

10^5 feletti Reynolds-számnál a határréteg még a leválás előtt turbulenssé válik. A turbulens határrétegben a részecskék mozgási energiája nagyobb, mint a laminárisban, ezért a henger mögötti nagyobb nyomás ellenében tovább tudják a henger alakját követni, vagyis a leválás később következik be. Ebben az esetben a henger mögött kialakuló örvénylő nyom keskenyebb lesz, mint kisebb Re-számoknál. Ezzel magyarázható, hogy kb. $2 \div 5 \cdot 10^5$ Re-számnál az ellenállás-tényező hirtelen lecsökken. A görbe letöréséhez tartozó Re-számot kritikus Reynolds-számnak nevezzük.

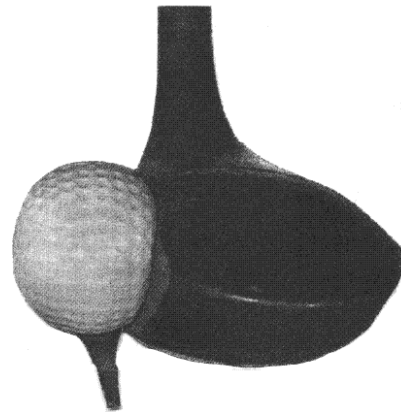
A gömb ellenállás-tényezőjének alakulása egészen hasonló a hengeréhez, amelyet szintén a **18.4 ábrán** láthatunk. Az olvasóban önkéntelenül felvetődik a kérdés, hogy ha a henger, vagy a gömb körül kialakuló áramlásban a határréteget valamilyen módon turbulenssé tudjuk tenni, akkor az ellenállását már a kritikus Reynolds-szám alatt is csökkenthetjük. Az egyik ilyen módszert, a gömb után kialakuló nyom csökkentését, a **18.5 ábrán** láthatjuk. Az **18.5 a./ábrán** a sima gömbön kb. $Re=15000$ értéknél láthatjuk a gömb mögötti leválási zónát. A leválás kezdete kb. $80-90^\circ$ -ra a megfűvás irányától következik be. A **18.5/b ábrán** egy vékony drótkarikát helyeztek a megfűjt oldalra, amely a határréteget turbulenssé tette és így a leválás kb. $120-130^\circ$ -ra tolódott el a megfűvás irányához képest és a leválási zóna sokkal kisebbre zsugorodott. Természetesen az ellenállás-tényező is lecsökkent.

A gömb körül kialakuló határréteg turbulenssé tételét szolgálja a golflabda felületén kialakított több száz kis "kráter"-szerű bemélyedés. A sima felületű golflabdához képest 30-40%-kal távolabb lehet ütni az érdesített felületű labdákkal, a légellenállás lecsökkenésének köszönhetően. A **18.6 ábrán** egy éppen megütött, érdesített felületű golflabdát lehet látni.

Érdekes a felület kialakításán kívül az ábrán azt is megfigyelni, hogy az ütés hatására milyen nagymértékben deformálódik a gömbalakhoz képest, holott kemény műanyagból készült.



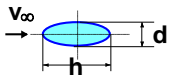

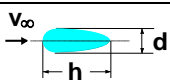

b./ Nyom a gömb mögött turbulencia
keltő drótkarikával
18.5 ábra



Érdesített golflabda golfütővel
a megütés pillanatában
18.6 ábra

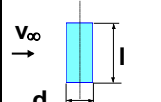
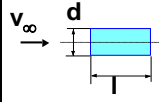
18.2 Különféle testek ellenállása

Néhány testnek az ellenállás-tényezőjét a **18.1 és a 18.2 táblázatokban** tüntettük fel. Az ellenállás-tényező mindegyik testnél a megfúvási irányra merőleges legnagyobb keresztmetszet területe. A kétféle irányból megfújt fél gömbhéj ellenállás-tényezője eltérő, de a Reynolds-számtól nem függ. A kanalas sebességmérő műszer ezt a tényt használja fel a működéséhez.

Test	Méretarány y	C_e $Re = 10^3 \div 10^5$	C_e $Re > 5 \cdot 10^5$	Test	C_e $Re > 5 \cdot 10^5$
 ellipszoid	$h:d = 1.8$ (gömb) 1 0.75 körlap 0	0.4 0.5 0.6 1.1	0.08 0.15 0.2 1.1	 fél gömbhéj	0.34
 Dúc profil végtelen hosszú	$h:d = 2$ 3 5 10 20		0.2 0.1 0.06 0.083 0.094	 fél gömbhéj	1.33

Testek ellenállása I. 18.1 táblázat

A tengelyével párhuzamosan megfújt henger ellenállás-tényezője sem függ a Reynolds-számtól.

Test	Méret- arány	C_e $Re = 10^3 \div 10^5$	C_e $Re > 5 \cdot 10^5$
 henger	$l : d = 1$ 2 5 10 20 ∞	0.63 0.68 0.74 0.82 0.98 1.2	0.35
 henger	$l : d = 0$ 1 2 4 7	1.11 0.91 0.85 0.87 0.99	

Testek ellenállása II. 18.2 táblázat

Az ellipszoid forgástengelye a megfúvási irány. A legnagyobb átmérője "d", hossza pedig "h". A dúc profil egyik irányban végtelen hosszú (síkáramlás), a megfúvásra merőleges legnagyobb vastagsága "d". Áramlásba helyezett rúdszerkezetek ellenállását csökkentik megfelelő dúc profil ráhelyezésével. A mostanában divatba jött nagysebességű síelésnél a lábszárra erősített dúcprofil alkalmaznak a kisebb légellenállás elérése érdekében.

A dúc profil és a tengelyével párhuzamosan megfújt henger ellenállás-tényezője az áramlás irányú méret növekedésével eleinte csökken, majd

növekszik. A csökkenés oka, hogy a test mögött kialakuló gomolygó nyomot a homlokléület mögötti testrészt csökkenti. Nagyon hosszú test felületén a súrlódásból származó veszteség azonban már ismét növeli a test eredő ellenállását. A tengelyére merőlegesen megfújt véges hosszúságú henger hosszának növekedésével növekszik az ellenállás-tényező.

Több egymás mögé, vagy egymás mellé elhelyezett testnek az ellenállás-tényezői megváltoznak az egymáshatás következtében. Az egymás mögött haladó kerékpárosok, úszók és a "V" alakban repülő vadludak is ezt használják ki a hátul haladók ellenállásának csökkentésére.

Az ellenállás-tényező mérését szélcsatornában szokták leggyakrabban erőméréssel meghatározni. A tanszékünkön számtalan ilyen jellegű mérést végeztünk, különböző épületek, parabola és hagyományos antennák, járművek, síelő stb légellenállását határoztuk meg szélcsatorna méréssel.

A szabadon eső testek rövid idő eltelte után elérnek egy olyan állapotot, amikor a Föld vonzóereje és a légellenállásból származó erő egyensúlyba jut. Ekkor a test tovább nem gyorsul és állandó sebességgel zuhan. A következő példánkban egy ilyen esetet vizsgálunk.



Határozzuk meg egy gömbalakunak tekinthető jégzemcse esési, vagy süllyedési sebességét levegőben. Tekintsünk el a jég esés közbeni olvadásától.

adatok: A jéggömb átmérője $d = 15\text{mm}$, a jég sűrűsége, $\rho_{\text{jég}} = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. A

levegő sűrűsége $\rho_{\text{lev}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, kinematikai viszkozitása $\nu = 13 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Megoldás:

A gömb ellenállás-tényezője függ a Re-számon keresztül a sebességtől (**ld. 18.4 ábra**), így csak iterációval tudjuk a feladatot megoldani. Tételezzük fel, hogy a Re-szám 10^3 és 10^5 közé esik, ekkor a gömb ellenállás-tényezője jó közelítéssel $c_e = 0.5$

A gömb súlya egyensúlyt tart az ellenálláserővel, tehát:

$$G = F_e$$

A jégzemcse súlya:

$$G = \frac{d^3 \cdot \pi}{6} \cdot \rho_{\text{jég}} \cdot g = \frac{0.015^3 \cdot \pi}{6} \cdot 900 \cdot 9.81 = 0.0156\text{N}$$

Ezzel az erővel tart egyensúlyt az ellenálláserő, amely a 18.1 egyenlet szerint:

$$F_e = \frac{\rho_{\text{lev}}}{2} \cdot v^2 \cdot A \cdot c_e$$

Az "A" felület az áramlásra merőleges legnagyobb keresztmetszet, amely a gömb esetében a főkörének területe, tehát az ellenálláserő:

$$F_e = \frac{\rho_{\text{lev}}}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_e$$

Egyenlővé téve a súlyerővel és felhasználva, hogy a $c_e = 0.5$, az első közelítésben a következőt kapjuk:

$$G = \frac{\rho_{\text{lev}}}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_e$$

Kifejezve a sebességet, és behelyettesítve az adatokat megkapjuk a sebességet:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G}{\rho_{\text{lev}} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.0156}{1.2 \cdot \frac{0.015^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0.5}} = 17.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

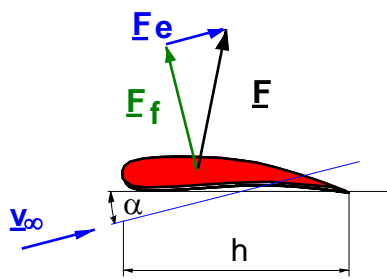
Ellenőrizzük a Re-számot a kapott sebességgel, az adatokkal:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{17.1 \cdot 0.015}{13 \cdot 10^{-6}} = 19794$$

A 18.4 ábrából az adott Re-számnál kb. $c_e = 0.45$ értéket kapunk, ezzel újra számolva a sebességet, kismértékben módosul az eredményünk:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.0156}{1.2 \cdot \frac{0.015^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0.45}} = 18.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

18.3 Szárnyra ható erők



18.7. ábra

A 18.1 és 18.2 ábrákon látható egy szimmetrikus szárnyprofil körüli áramlás két különböző állásszögnél. Általában a szárnyak nem szimmetrikus kialakításúak. A 18.7. ábrán látható szárny egy általános szárnyprofil, amelynek nagy jelentősége van a repülésben és az áramlástechnikai gépekben is. Az impulzustétel tárgyalásánál már levezettük a Zsukovszkij-tételt (ld. 14.5 fejezet, 14.34 összefüggés), amely szerint sűrűdásmentes közeg

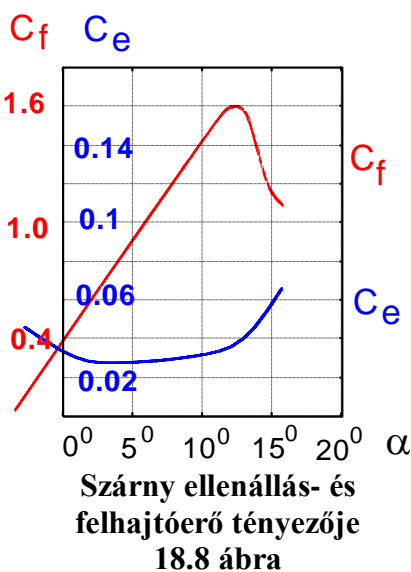
esetén a szárny egységnyi hosszúságú szakaszára ható erő az $|\underline{R}| = \rho \cdot \Gamma \cdot v_\infty$ összefüggéssel számolható, ahol " v_∞ " a szárnytól távoli zavartalan áramlási sebesség, " Γ " pedig a szárny körüli cirkuláció. A levezetésből az is adódott, hogy a szárnyra ható " \underline{R} " erő merőleges a " v_∞ " sebességre. Valóságos közegben a szárnyra ható erő két komponensre bontható: a zavartalan (megfúvási) sebességre merőleges " F_f " felhajtóerőre és a megfúvással párhuzamos " F_e " ellenállás erőre. A 18.1 összefüggéshez hasonlóan bevezethető a szárnyra vonatkozó ellenállás-tényező és felhajtóerő tényező:

$$c_e = \frac{F_e}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot A} \quad 18.3$$

$$c_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot A} \quad 18.4$$

Az eddig tárgyalt testeknél az ellenállás-tényező kifejezésének nevezőjében lévő jellemző felület a test zavartalan áramlásra merőleges legnagyobb keresztmetszete volt. A szárnyaknál ez a jellemző felület az alapterület: a szárny " h " húrhosszának és a szárny " ℓ " hosszának a szorzata: $A = h \cdot \ell$

Egy adott szárnynál " c_f " és " c_e " tényezők az eddigiek szerint függenek a Re-számtól, de ezen kívül fontos, hogy a megfúvási irány és a szárny milyen szöget zárnak be egymással,



vagyis az " α " állásszögtől is függenek az erőtényezők. Egy adott szárny felhajtóerő- és ellenállás-tényezőjének jellegét 18.8 ábra mutatja. Az ellenállás-tényező és a felhajtóerő tényező más léptékben vannak ábrázolva. A felhajtóerő tényező 10-40-szerese is lehet az ellenállás-tényezőnek. Az ábrából látható, hogy a felhajtóerő tényező közelítően lineárisan nő az állásszög függvényében, majd $c_f \cong 1.2 \sim 1.6$ maximális értéket elérve hirtelen csökken. Az ellenállás-tényező az állásszög növelésére kevésbé "érzékeny": értéke széles állásszög határok között közel állandó, viszonylag kis érték ($c_e \cong 0.01 - 0.04$). Az ellenállás-tényező csak akkor nő meg rohamosan, amikor a " c_f " hirtelen lecsökken. Ezt nevezik a szárny átesésének, ami a leválás nagymértékű megnövekedésével magyarázható (ld. 18.2 ábra)

A szárnyak jellemző adata a **siklószám**, amely a felhajtóerő tényező és az ellenállás-tényező hányadosa: $\frac{c_f}{c_e}$. (Egy vitorlázó repülőgép siklószáma megadja, hogy hány métert tesz meg a gép vízszintesen siklásban, miközben 1 métert süllyed.) A siklószám általában 10 és 50 közé esik. A szárnyakat ez a tulajdonságuk teszi igen értékessé: adott ellenállás erő "árán" annak sokszorosát kitevő felhajtóerő keletkezik rajtuk.



19. A sebesség és térfogatáram mérés

19.1 A sebességmérés és eszközei



Kanalas anemométer
19.1 ábra

Az áramlás valamely pontjában uralkodó sebességet nagyon sokféle módszerrel lehet megmérni. A mérőműszerek és a mérési elvek közül csak néhányat ismertetünk.

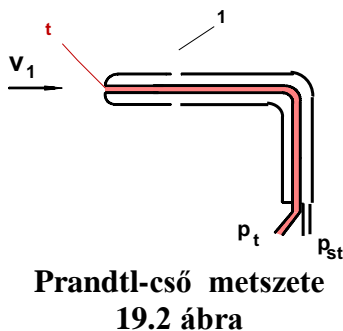
Mechanikus elven mér pl. a **kanalas anemométer** (ld. **19.1 ábra**). Működése azon alapszik, hogy egy nyitott félgömb ellenállás-tényezője a nyitott oldalról megfújva sokkal nagyobb ($c_e = 1.33$), mint a domború oldalról megfújva ($c_e = 0.34$). A tapasztalat szerint az anemométer fordulatszáma arányos a megfújás sebességével, így egyszerű fordulatszám méréssel lehet a sebességet meghatározni. Szintén mechanikus elven mér a szárnykerekés anemométer, amelyet légtechnikai mérésekre gyakran használnak.

19.1.1 A Prandtl-cső

Nyomáskülönbség mérésére vezeti vissza a sebességmérést a Prandtl-cső (ld. **19.2 ábra**). Lényege egy, az áramlással szemben elhelyezkedő kettős falú cső, amelynek elején a külső és a belső cső közötti teret legömbölyített orr zárja le. A belső csőbe a szimmetriatengelyen lévő orrfurat, a külső és a belső cső közötti térbe pedig az orrfurattól távol, a külső cső palástján lévő palástfuratok nyílnak. Az orrfurat a belső csővön keresztül, a palástfuratok pedig a két cső közötti téren keresztül külön-külön csatlakoznak a nyomásmérő műszerhez. (A **19.3 ábrán** Prandtl-cső geometriai kialakítását láthatjuk néhány szabványos méret feltüntetésével.) A cső orrpontjában a folyadék sebessége zérus, ott tehát torlópont keletkezik. A hengeres részen viszont, az orrponttól távol, a sebesség közel ugyanakkora, mint a mérőeszköz odahelyezése előtt volt. Alkalmazzuk a Bernoulli-egyenletet az orr- és a Prandtl-cső tengelyére merőleges síkban, annak "1" pontjában, amely az oldalfuratok magasságában helyezkedik el. Itt a sebesség nagyon jó közelítéssel azonos, mint volt a cső odahelyezése előtt.

$$p_t = \frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1$$

Az orrfuratban tehát a " v_1 " sebességnek és a " p_1 " nyomásnak megfelelő **össznyomás** keletkezik. A " p_1 " nyomás a **statikus nyomás**, " p_{st} ", a " $p_t - p_1$ " pedig a " v_1 " sebességnek megfelelő **dinamikus** nyomás:



$$p_{\text{din}} = \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_t - p_1$$

A " v_1 " sebesség, amely egyenlő a Prandtl-cső odahelyezése nélkül, azon a helyen uralkodó sebességgel:

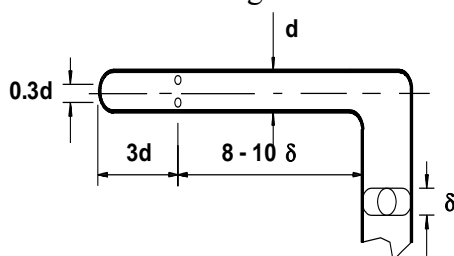
$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} \cdot (p_t - p_1)\right)} = \sqrt{\left(\frac{2}{\rho} \cdot p_{\text{din}}\right)}, \quad 19.1$$

ahol a „ ρ ” sűrűséget levegő és gázok esetén a

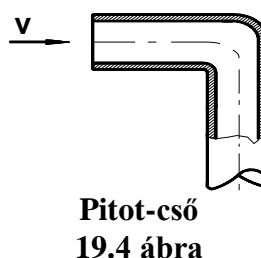
$$\frac{p}{\rho} = RT$$

összefüggésből számíthatjuk. $R = 287 \text{ [J/kgK]}$ száraz levegőre.

A Prandtl-csővel csak akkor mérhetjük pontosan a dinamikus nyomást, ha a hengeres fej szimmetria-tengelye a sebességgel párhuzamos, illetve attól maximum 15° -ot eltérhet, mert a Prandtl-cső ennél kisebb szögeltérésre érzéketlen.



Prandtl-cső méretei
19.3 ábra



A statikus nyomást mérhetjük más módon is, vagy ha szabad sugárban mérünk, akkor elegendő az össznyomásnak az atmoszféricustól való eltérését megmérni. Ilyenkor a sebesség meghatározásához csak az orrfurattal rendelkező u.n. **Pitot-csővet** használják (ld. **19.4 ábra**)

19.1.2 Térfogatáram mérés csőben Prandtl-csővel

A vezeték egyik keresztmetszetén időegység alatt átáramló közeg mennyiségét a következő fogalmakkal, ill. ma szabványos mértékegységekkel jellemezhetjük:

$$\text{térfogatáram: " } q_v \text{ " } \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}; \frac{\text{m}^3}{\text{h}}; \frac{\ell}{\text{s}}; \frac{\ell}{\text{min}} \right],$$

$$\text{tömegáram: " } q_m \text{ " } \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}; \frac{\text{t}}{\text{h}}; \frac{\text{kg}}{\text{min}} \right] \quad (q_m = \rho \cdot q_v).$$

A térfogatáramot általában a

$$q = \iint_A \underline{v} \cdot d\underline{A} = v_{\text{átl}} \cdot A \quad 19.2$$

kifejezéssel határozhatjuk meg. Pontonkénti sebességértékekből az integrálformula felhasználásával skaláris szorzat integrálását a vezeték falai által határolt, de tetszőleges alakú felületen lehet elvégezni. Ha elegendően hosszú egyenes csőszakasz előzi meg a mérés keresztmetszetét, akkor a sebesség a vezetéket határoló falakkal párhuzamosnak tekinthető, a tetszőleges alakú felületnek csak a sebességre, s így a vezeték hossz tengelyére is merőleges vetületének van szerepe. Ha az integrálás tartománya a vezeték keresztmetszete - a sebességre merőleges sík - a sebesség és a felületelem vektorjellegétől el is tekinthetünk. (Amennyiben a

sugár a cső hossz tengelye körül forog, akkor a térfogatáram ilyen módon való meghatározása pontatlan eredményre vezet.)

A sebességmegoszlás függvényét többnyire nem ismerjük, így integrálás helyett közelítésként összegzéssel határozzuk meg a térfogatáramot:

$$q_v = \sum_{i=0}^n v_i \cdot \Delta A_i \quad 19.3$$

Ha a " ΔA_i " felületelemekről feltételezzük, hogy azok nagysága a teljes "A" keresztmetszet $1/n$ -szerese, azaz állandó, az " A/n " tényező, mint állandó, kiemelhető és így:

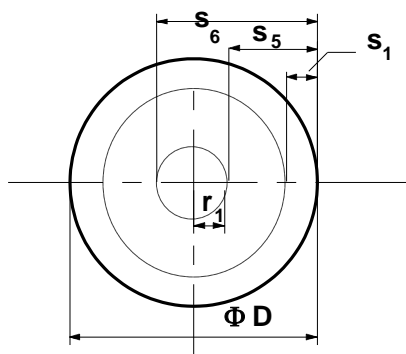
$$q_v = \frac{A}{n} \cdot \sum_{i=0}^n v_i \quad 19.4$$

összefüggés adódik. Tehát " q_v " csak abban az esetben számolható a mért sebességértékek számtani középértékéből, ha a mért értékek **egyenlő nagyságú felületelemre** vonatkoznak. Ez azt jelenti, hogy a sebességet olyan pontokban kell, mérni, melyekhez egyenlő nagyságú tartományok - felületelemek - tartoznak.

Kör keresztmetszetű csőben legalább két, egymásra merőleges átmérő mentén kell a sebességet megmérni. A tapasztalat szerint a "D" átmérőjű kört elegendő öt egyenlő területű elemre bontani. Az elemeket határoló vonalak koncentrikus körök. A mérési pontok pedig legyenek azon a körön, melyek a felületelemeket további két egyenlő területű gyűrűre bontják. Így a teljes körterületet valójában 10 egyenlő területű körgyűrűre kell osztani és minden páratlan sorszámú sugáron sebességet mérni. Ezzel egy sugáron 5, ill. egy átmérőn 10 mérési hely adódik. Nevezzük e módszert tíz pont módszernek, amelyet a Magyar Szabványban az **MSZ EN 24006:2002**-es számon találhatunk meg. Példaként határozzuk meg a cső tengelyéhez legközelebb eső egyik mérési pont helyét. E pontokat tartalmazó kör sugara " r_1 ", ennek területe az egész kör területének éppen egy tizede:

$$r_1^2 \cdot \pi = 0.10 \cdot R^2 \cdot \pi \quad \text{azaz} \quad r_1 = R \cdot \sqrt{0.1} = 0.316 \cdot R$$

Mivel a Prandtl-cső fejének a cső tengelyétől mért távolságát nem tudjuk közvetlenül mérni, célszerűbb a Prandtl-cső szárára a fejnek a csőfaltól mért távolságát feljelölni. A **19.5**



**Csőkeresztmetszet
felosztása
19.5 ábra**

ábra adataival tehát:

$$s_5 = R - r_1$$

A cső átmérőjéhez viszonyított érték pedig:

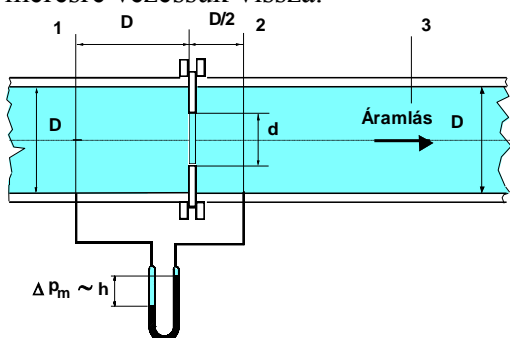
i	$\frac{s_i}{D}$
1	0.026
2	0.082
3	0.146
4	0.226
5	0.342
6	0.658
7	0.774
8	0.854
9	0.918
10	0.974

Távolság a cső falától
19.1 táblázat

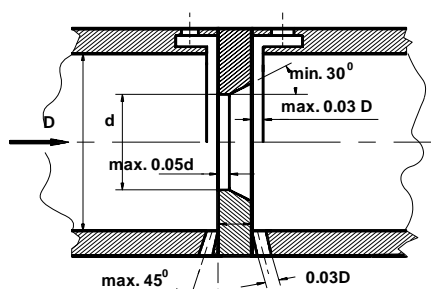
MSZ EN 24006:2002 szabvány tartalmazza.

19.2 Térfogatáram mérés szűkítő elemekkel

Amennyiben módunkban áll a csővezetékeket megbontani és a szabványban előírtak szerint szűkítőelemet a rendszerbe beépíteni, úgy maga a térfogatáram mérés egyszerűbb. A szabvány szerint a szűkítőelem előtt és mögött megfelelő hosszúságú egyenes csőszakaszt kell biztosítani. A szűkítőelemek (mérőperem, mérőszáj, Venturi-mérő) ugyanis lehetővé teszik, hogy a csőben lévő átlagsebesség, illetve térfogatáram mérését egyetlen nyomáskülönbség mérésre vezessük vissza.



Mérőperem a csővezetékben
19.6 ábra



Mérőperem

Az ábra felső része gyűrűkamrás, az alsó pedig furatos megcsapolást mutat

19.7 ábra

$$\frac{s_5}{D} = \frac{R - r_1}{2R} = \frac{1 - \frac{r_1}{R}}{2} = \frac{1 - 0.316}{2} = 0.342$$

Az átmérőn elhelyezkedő tíz mérési pont helyét meghatározó viszonyszámokat a **19.1 táblázat** tartalmazza.

A térfogatáram pontonkénti sebességméréssel történő meghatározása viszonylag sok mérést igényel. Viszont nagy előnye hogy légvezetékben mérni a csővezeték megbontása nélkül is lehet, csupán két furatot kell készíteni, az üzemvitel megszakítása és hosszas előkészítő tevékenység nélkül elvégezhető.

A sebességmérésen alapuló térfogatáram mérésnek számtalan egyéb módja lehetséges. A szabványosított módszereket az

A vezetékbe beépített szűkítőelem pl. mérőperem /ld. **19.6 ábra**/ által létesített és az átáramló közeg mennyiségétől függő nyomáskülönbséget " Δp_m " mérjük. (A sarokmegcsapolású mérőperem szabványos kialakítását láthatjuk a **19.7 ábrán**. Érdeemes megfigyelni, hogy az átfolyó nyílás éles széle az áramlás irányába mutat.) Ebből a térfogatáramot a következő általános érvényű összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$q_v = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\Delta p_m}, \quad 19.5$$

ahol:

" $\Delta p_m = p_1 - p_2$ ";

"d" a szűkítőelem nyílásának átmérője;

" ρ " a közeg sűrűsége;

" ε " az "expanziós szám" a közeg összenyomhatóságától és Δp_m -től függő tényező;

" α " az "átfolyási szám", kísérletileg meghatározott tényező, melynek értéke a következő mennyiségektől függ:

" $\beta = d/D$ " ("D" a szűkítőelem előtti cső átmérője);

$Re_D = \frac{D \cdot v}{\nu}$ a szűkítés előtti csőre vonatkozó Reynolds-

szám. Itt " ν " a közeg kinematikai viszkozitása.

A szűkítőelemek: a mérőperem, mérőszáj, Venturi-mérő adatait, beépítésük módját, valamint a térfogatáram meghatározásához szükséges tapasztalati tényezők (α és ε) értékét a szabvány tartalmazza.

A térfogatáram mérésnek még nagyon sokféle módja és eszköze létezik, amelyeket itt nem részleteztünk. A teljesség igénye nélkül megemlítjük a legegyszerűbb és talán a legpontosabb térfogatáram mérést a köbözést, nyílt felszínűcsatornában áramló folyadék térfogatáramát bukó gátakkal mérik, a szűkítőelemek elvét alkalmazva stb.

Az "Áramlástan mérések" [7] [14] című segédletek adnak további információkat a mérésekhez.

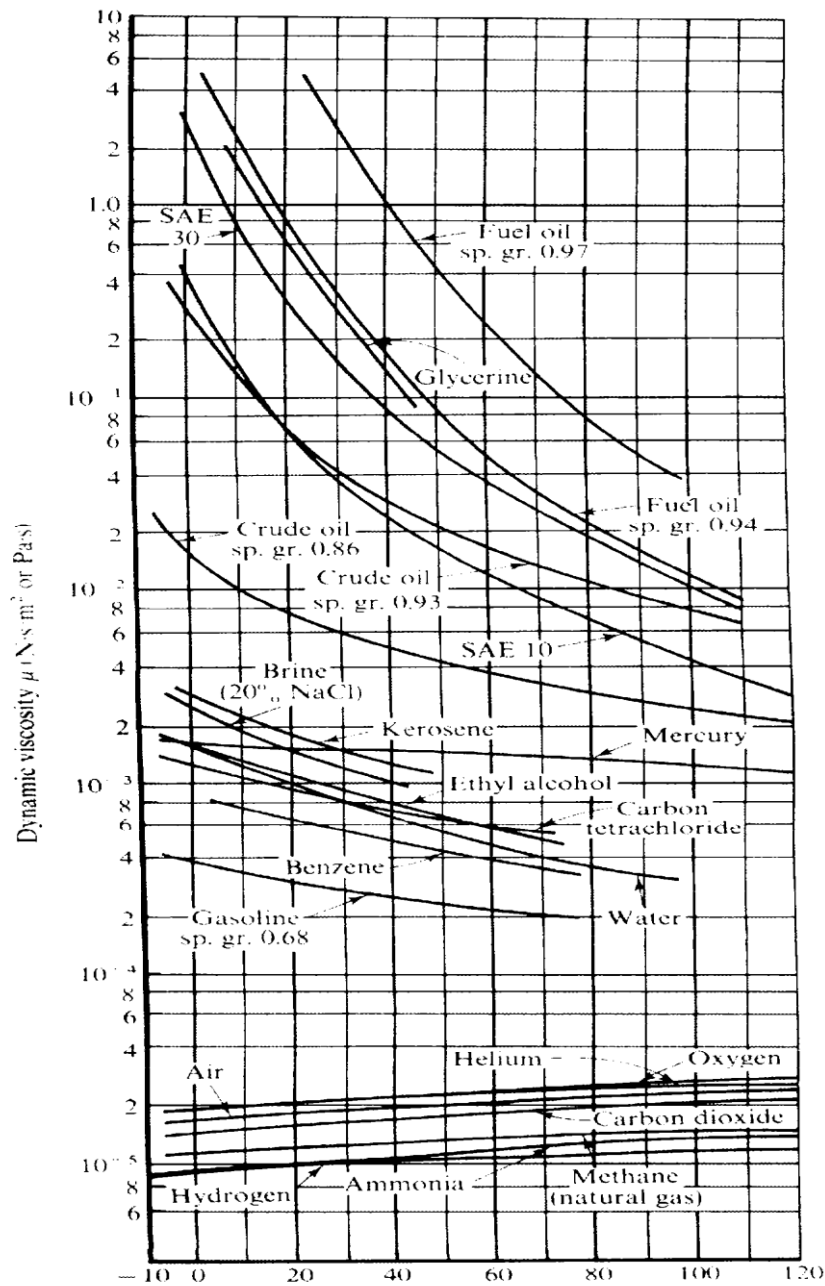


Magyar nyelvű szakirodalomból

- [1] Dr. Bihari Páter: Műszaki termodinamika, BME 1999
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
- [2] Dr. Bobok Elemér: Áramlástan bányamérnököknek;
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
- [3] Fényes Imre: Termosztatika és termodinamika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [4] Gróf Gyula: Hőtechnika. Felsőfokú tankönyv. Phare Program HU-94.05, Budapest, 1999.
- [5] Dr. Gruber József-Dr. Blahó Miklós: Folyadékok mechanikája
Tankönyvkiadó, 1973.
- [6] Harmatha András: Termodinamika műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [7] Hegel I.-Füredi G.-Szlivka F.: Áramlástan mérés
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1993.
- [8] Horváth János: Termodinamika és statisztikai mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
- [9] Dr. Író Béla: Hő- és áramlástan HEFOP, Széchenyi István Egyetem
- [10] Jászay Tamás: Műszaki Hőtan (Termodinamika). Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- [11] Dr. Lajos Tamás: Áramlástan alapjai
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994.
- [12] L.D. Landau, E.M. Lifsic: Elméleti fizika VI. Hidrodinamika; Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [13] Nyúli, Gy.-Vincze, Gy.: Áramlástan GATE, Gödöllő, 1987.
- [14] Dr. Sassy László-Dr. Török Sándor: Áramlástan mérés
Gödöllő, 1983.
- [15] Dr. Sitkei György: Gyakorlati áramlástan; Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest, 1997
- [16] Dr. Szlivka Ferenc: Áramlástan energetikai főiskolások számára
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.
- [17] Dr. Szlivka Ferenc: Áramlástan
Gödöllő 2002.
- [18] Dr. Szlivka F.-Dr. Bencze F.-Kristóf G.: Áramlástan példatár
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.
- [19] Willi Bohl: Műszaki áramlástan; Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1983.

Idegen nyelvű szakirodalomból

- [20]. Charles Hirsch: Numerical Computation of Internal and External Flows;
Volume 1, 2, John Wiley & Sons, 1991.
- [21]. W. J. Duncan-A. S. Thom-A. D. Young: Mechanics of Fluids
Edward Arnold Publisher Ltd. London,1970
- [22]. John D. Anderson, Jr.: Fundamentals of Aerodynamics; McGraw -Hill, Inc.1991.
- [23] Klaus Oswatitch: Gasdynamik; Springer -Verlag, 1952.
- [24] MIHEJEV, M. A.: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai, Budapest, 1987.TK
- [25] Robert L. Mott: Applied Fluid Mechanics Maxwell Macmillan International Editions,
1990.



Dinamikal viszkozitás μ [Pa·s]

1. melléklet