

Skript zur Lehrveranstaltung

Grundlagen der Automatisierungstechnik

für den Studiengang Maschinenbau

Teil II

Lineare Übertragungsglieder

Der lineare Regelkreis

Erweiterte Regelungsstrukturen

Regelkreise mit nichtlinearen Elementen

Einführung in die Prozessleittechnik

Inhalt	Seite
0. Literaturübersicht	1
1. Das Übertragungsverhalten linearer Übertragungsglieder	2
1.1 Grundlegende Eigenschaften von Übertragungsgliedern	2
1.2 Das stationäre Verhalten linearer Übertragungsglieder	3
1.3 Beschreibung des dynamischen Verhaltens linearer Übertragungsglieder	4
1.3.1 Beschreibung im Zeitbereich	4
1.3.2 Beschreibung im Bildbereich	10
1.4 Untersuchung des Übertragungsverhaltens von Systemen	30
1.4.1 Einführung	30
1.4.2 Ausgewählte MATLAB-Funktionen	31
1.4.3 Die Diskussion des PT_2 -Verhaltens am Beispiel des mechanischen Feder-Masse-Systems mit Dämpfung	35
1.5 Ermittlung der mathematischen Modelle linearer Übertragungsglieder	42
1.5.1 Kennwertermittlung im Zeitbereich	42
1.5.2 Kennwertermittlung im Frequenzbereich	49
2. Der lineare Regelkreis	57
2.1 Die Struktur des Regelkreises	57
2.2 Reglertypen	59
2.2.1 Klassifikation	59
2.2.2 Übertragungsverhalten der Übertragungsglieder des Regelkreises	60
2.3 Stabilität von Regelkreisen	66
2.3.1 Definition	66
2.3.2 Das HURWITZ-Kriterium	66
2.3.3 Das NYQUIST-Kriterium	70
2.4 Reglereinstellung	78
2.4.1 Ziel der Reglereinstellung	78
2.4.2 Heuristische Regeln für die Wahl des Reglertyps	78
2.4.3 Heuristische Regeln für die Reglereinstellung	80
2.4.4 Gütekriterien für die Parameteroptimierung	84
2.4.5 Beispiele zur Reglereinstellung	88
3. Erweiterte Regelungsstrukturen	93
3.1 Strukturelle Erweiterungen des einschleifigen Regelkreises	93
3.2 Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung	93
3.3 Regelkreis mit Hilfsregelgröße	95

4.	Regelkreise mit nichtlinearen Elementen	101
4.1	Ursachen für Nichtlinearitäten	101
4.2	Zweipunktregelung	101
4.3	Fuzzy-Regler	105
4.3.1	Ein einführendes Beispiel	105
4.3.2	Grundbegriffe der Unscharfen Logik (Fuzzy-Logic)	106
4.3.3	Struktur und Elemente des Fuzzy-Reglers	108
4.3.4	Ein Beispiel	111
5.	Einführung in die Prozessleittechnik	116
5.1	Einleitung	116
5.2	Die Ebenenstruktur eines Prozessleitsystems	116
5.3	Die Elemente eines Prozessleitsystems	118
5.3.1	Die Elemente der Feldebene	118
5.3.2	Die Prozessnahen Komponenten (PNK)	120
5.3.3	Kommunikationseinheiten und Leitrechner	121
5.4	Kommunikation zwischen Bediener und Prozessleitsystem	122
5.5	Kommunikation zwischen den Elementen eines Prozessleitsystems	123

0. Literaturübersicht

Grundlagen

REUTER, M.; ZACHER, S.
„Regelungstechnik für Ingenieure“
Vieweg, Braunschweig, 2002.

LUTZ, H. WENDT, W.
„Taschenbuch der Regelungstechnik“
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 2005.

Weiterführende Literatur

DORF, R.C. ; BISHOP, R.H.
“Moderne Regelungssysteme”
Pearson Studium, München, 2006

LUNZE, J.
„Regelungstechnik“
Bd. 1 Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger
Regelungen
Bd. 2 Mehrgrößensysteme, Digitale Regelungen
Springer Verlag, Berlin, 2005.

FRÜH, K. F.
„Handbuch der Prozessautomatisierung“
R. Oldenbourg Verlag, München, 2004.

KIENDL, H.
„Fuzzy Control methodenorientiert“
R. Oldenbourg Verlag, München, 1997.

Wichtige Standards

DIN 19221 Formelzeichen der Regelungs- und Steuerungstechnik
DIN 19222 Leittechnik - Begriffe
DIN 19226 Regelungstechnik und Steuerungstechnik - Begriffe und Benennungen
DIN 19227 Grafische Symbole und Kennbuchstaben für die Prozessleittechnik
DIN 19229 Übertragungsverhalten technischer Systeme - Begriffe
DIN 19237 Steuerungstechnik - Begriffe
DIN 28004 Fließbilder verfahrenstechnischer Anlagen

1. Das Übertragungsverhalten linearer Übertragungsglieder

1.1 Grundlegende Eigenschaften von Übertragungsgliedern

- **Übertragungsglied und Übertragungsverhalten**

Die Elemente eines technischen Systems werden in der Automatisierungstechnik unter den Aspekten der *Gerätetechnik* und der *Informationsverarbeitung* betrachtet. Die gerätetechnische Betrachtung erstreckt sich dabei auf die Automatisierungsmittel, während die informationstechnische Betrachtungsweise sich auf alle Systemelemente bezieht (also auch auf die Elemente des zu automatisierenden Teilsystems). Unter dem Aspekt der Informationsverarbeitung wird das Verhalten eines Systemelements durch die Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Ein- und Ausgangssignalen beschrieben. Diese funktionelle Betrachtungsweise, die sich vom Systemelement auf das Gesamtsystem ausdehnen lässt, hat das **Übertragungsverhalten** zum Gegenstand. Die Systemelemente werden in diesem Zusammenhang als **Übertragungsglieder** bezeichnet. Dabei wird von der konkreten Beschaffenheit der Elemente abstrahiert. Zur graphischen Darstellung der Signalübertragung zwischen Übertragungsgliedern dient der Signalflussplan (s. Arbeitsblätter zum Fach „Grundlagen der Mess- und Automatisierungstechnik“). Es wird vorausgesetzt, dass Übertragungsglieder **rückwirkungsfrei** sind. Das bedeutet, dass eine Änderung des Ausgangssignals keine Änderung des Eingangssignals bewirkt. Das Verhalten von Übertragungsgliedern wird durch mathematische Modelle beschrieben, die durch theoretische oder experimentelle Prozessanalyse gewonnen werden.

- **Zeitvariante/Zeitinvariante Übertragungsglieder**

Die Eigenschaften eines Übertragungsgliedes können explizit von der Zeit abhängen. Das Übertragungsverhalten lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\boxed{x_a(t) = F(x_e(t), t)} \quad (1.1)$$

Gilt diese Form, so heißt das Übertragungsglied **zeitvariant**.

Gilt dagegen für das Übertragungsverhalten:

$$\boxed{x_a(t) = F(x_e(t))} \quad (1.2)$$

so heißt das Übertragungsglied **zeitinvariant**.

$x_a(t)$... Ausgangssignal, $x_e(t)$... Eingangssignal

- **Lineare Übertragungsglieder**

Gilt für den funktionellen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal die folgende Beziehung:

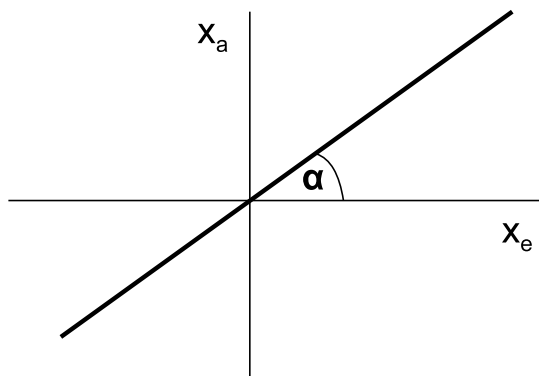
$$\begin{aligned}
 & \mathbf{F}(\lambda x_e(t)) = \lambda \mathbf{F}(x_e(t)) = \lambda x_a(t) \\
 & \mathbf{F}(x_{e_1}(t) + x_{e_2}(t)) = \mathbf{F}(x_{e_1}(t)) + \mathbf{F}(x_{e_2}(t)) = x_{a_1}(t) + x_{a_2}(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

so besitzt das Übertragungsglied **lineares** Übertragungsverhalten. Die erste Beziehung in (1.3) wird als **Verstärkungsprinzip**, die zweite wird auch als **Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip** bezeichnet.

1.2 Das stationäre Verhalten linearer Übertragungsglieder

Es werden die statischen Kennlinien der wichtigsten Grundtypen linearer Übertragungsglieder dargestellt:

- **P - Glied**

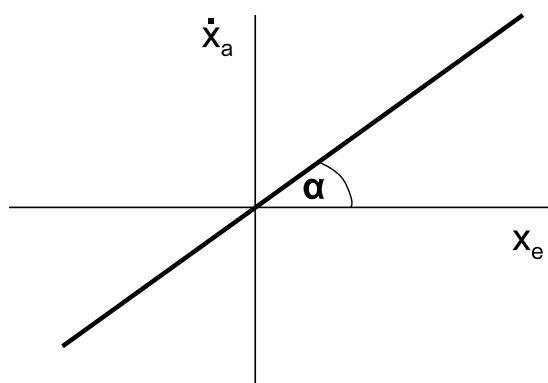


Das stationäre Verhalten ($t \rightarrow \infty$) eines P-Gliedes ist dadurch gekennzeichnet, dass das Ausgangssignal dem Eingangssignal proportional ist.

$$x_a = K_P x_e$$

$$\tan \alpha = K_P$$

- **I - Glied**

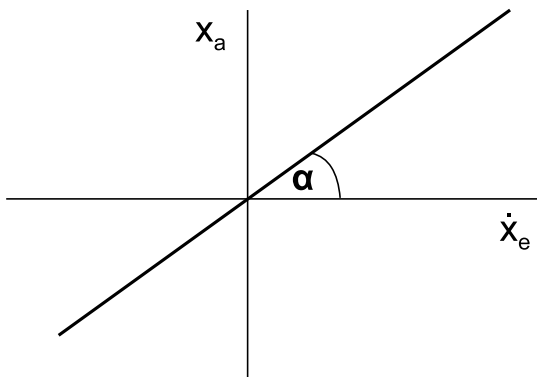


Das stationäre Verhalten ($t \rightarrow \infty$) des I-Gliedes ist dadurch gekennzeichnet, dass ein konstantes Eingangssignal eine konstante Änderungsgeschwindigkeit des Ausgangssignals zur Folge hat.

$$x_a = K_I \int_0^t x_e dt \Rightarrow \frac{dx_a}{dt} = K_I x_e$$

$$\tan \alpha = K_I$$

- **D - Glied**



Das stationäre Verhalten ($t \rightarrow \infty$) eines D-Gliedes ist dadurch gekennzeichnet, dass eine konstante Änderungsgeschwindigkeit des Eingangssignals ein konstantes Ausgangssignal hervorruft.

$$x_a = K_D \frac{dx_e}{dt}$$

$$\tan \alpha = K_D$$

1.3 Beschreibung des dynamischen Verhaltens linearer Übertragungsglieder

1.3.1 Beschreibung im Zeitbereich

Die mathematische Beschreibung linearer Übertragungsglieder kann in unterschiedlichen Formen erfolgen:

- **Differentialgleichung**

$$T_n^n \frac{d^n x_a}{dt^n} + T_{n-1}^{n-1} \frac{d^{n-1} x_a}{dt^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_p \left(x_e + T_{D1} \frac{dx_e}{dt} + \dots + T_{Dm}^m \frac{d^m x_e}{dt^m} \right)$$

(1.4)

Die Koeffizienten T_i und T_{Dj} in dieser Differentialgleichung sind konstant und werden **Zeitkonstanten** genannt.

► Beispiel: Feder-Masse-System mit Dämpfung

Die Bewegungsgleichung:
$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \frac{dx}{dt} + x = \frac{F(t)}{m \omega_0^2}$$

kann mit $x_e(t) = F(t)$, $x_a(t) = x(t)$, $T_1 = \frac{2D}{\omega_0}$, $T_2^2 = \frac{1}{\omega_0^2}$, $K_p = \frac{1}{m \omega_0^2}$

auf die Form (1.4) gebracht werden.

Die Lösung der Differentialgleichung (1.4) stellt ein Anfangswertproblem dar. Da das Superpositionsprinzip (1.3) gilt, kann man die Lösung dieser Differentialgleichung aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung überlagern. Es gilt somit:

$$x_a(t) = x_{a_{\text{homogen}}}(t) + x_{a_{\text{partikulär}}}(t)$$

Die homogene Lösung beschreibt dabei die Eigendynamik des Übertragungsgliedes. Für diesen Lösungsanteil kann man folgenden Ansatz wählen:

$$\mathbf{x}_{\text{a homogen}}(t) = \mathbf{C} e^{pt}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung (1.4) ein, so erhält man die charakteristische Gleichung:

$$T_n p^n + T_{n-1} p^{n-1} + \dots + T_2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$$

Wenn keine mehrfachen Nullstellen dieser Gleichung auftreten, ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$\mathbf{x}_{\text{a homogen}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_i e^{p_i t} \quad (1.5)$$

Eine Nullstelle p_j der charakteristischen Gleichung, die s -fach auftritt, führt zu folgenden Termen im Ausdruck (1.5):

$$e^{p_j t}, t e^{p_j t}, t^2 e^{p_j t}, \dots, t^{s-1} e^{p_j t}$$

Die Lösung (1.5) ist dann entsprechend zu modifizieren.

Die Konstanten C_i ($i = 1, \dots, n$) sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung komplex, so treten sie in konjugiert komplexen Paaren auf. Angenommen es gelte für eine konjugiert komplexe Lösung

$$p_k = \sigma \pm j\omega$$

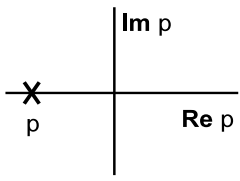

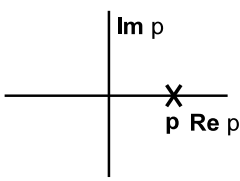
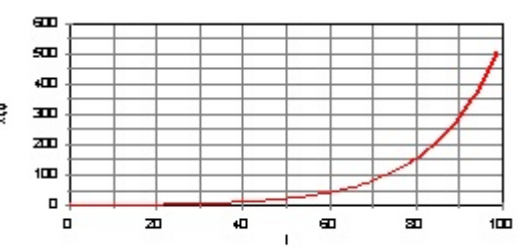
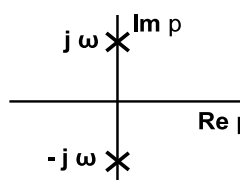
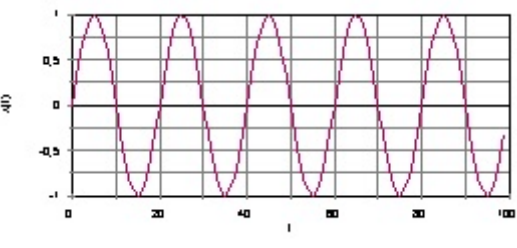
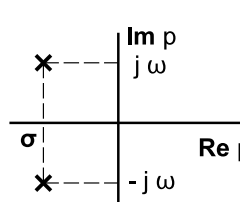
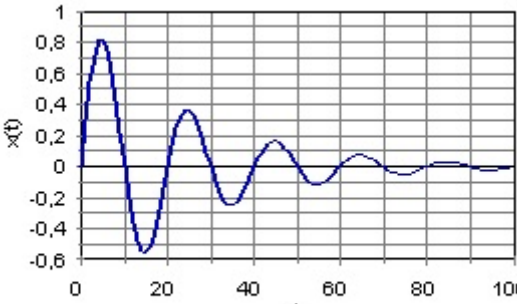
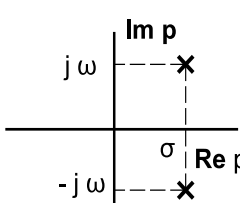
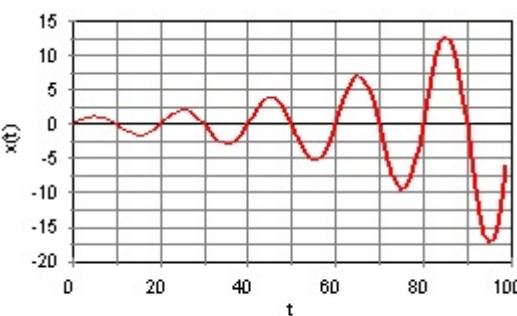
so ergibt sich über die EULER-Beziehung für die komplexe Exponentialfunktion, dass die Lösung durch die beiden folgenden reellen Lösungsterme

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad e^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

dargestellt werden kann. Tritt eine komplexe Lösung mehrfach auf, so sind die oben angegebenen Beziehungen entsprechend zu übertragen. Es ergeben sich bei einer s -fachen konjugiert komplexen Lösung somit Terme der folgenden Form:

$$\begin{aligned} & e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ & t e^{\sigma t} \cos(\omega t), t e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ & t^2 e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^2 e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ & \dots\dots\dots \\ & t^{s-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^{s-1} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die typischen Funktionsterme in ihren zeitlichen Verläufen grafisch dargestellt.

Charakteristik	Lage in der komplexen p-Ebene	Zeitverlauf der Lösung
<p>p reell $p < 0$ Lösung ist monoton stabil</p>		
<p>p reell $p > 0$ Lösung ist monoton instabil</p>		
<p>p imaginär $p = \pm j\omega$ Lösung ist grenzstabil</p>		
<p>p komplex $p = \sigma \pm j\omega$ $\sigma < 0$ Lösung ist oszillatorisch stabil</p>		
<p>p komplex $p = \sigma \pm j\omega$ $\sigma > 0$ Lösung ist oszillatorisch instabil</p>		

Die Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, der Eigenwerte, in der komplexen Ebene werden in der Tabelle ebenfalls dargestellt. Es folgt, dass die Eigenwerte charakteristische Kenngrößen für die Eigendynamik des Übertragungsgliedes sind.

- **Sprungantwort eines Übertragungsgliedes**

Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Übertragungsgliedern müssen für die Eingangssignale geeignete Testfunktionen festgelegt werden. Besonders häufig wird die Sprungfunktion verwendet:

$$\mathbf{x}_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_{e_0} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Die Antwortfunktion des Übertragungsgliedes auf ein Eingangssignal gemäß (1.6) heißt **Sprungantwort**. Als Übergangsfunktion wird die auf die Sprunghöhe des Eingangssignals bezogene Sprungantwort bezeichnet:

$$h(t) = \frac{x_{a\text{Sprung}}(t)}{x_{e_0}} \quad (1.7)$$

- **Zustandsdarstellung**

Wenn die Modellbildung durch theoretische Prozessanalyse erfolgt, ergibt sich häufig die folgende Form der Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}_e, \quad \mathbf{x}_a = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.8)$$

\mathbf{x} - Zustandsvektor, \mathbf{A} - Systemmatrix, \mathbf{B} - Steuermatrix, \mathbf{C} - Beobachtungsmatrix
Die Differentialgleichung (1.4) kann in diese Form überführt werden, wobei sich (1.8) dahingehend vereinfacht, dass \mathbf{x}_a und \mathbf{x}_e zu skalaren Variablen und \mathbf{B} und \mathbf{C} zu Vektoren werden.

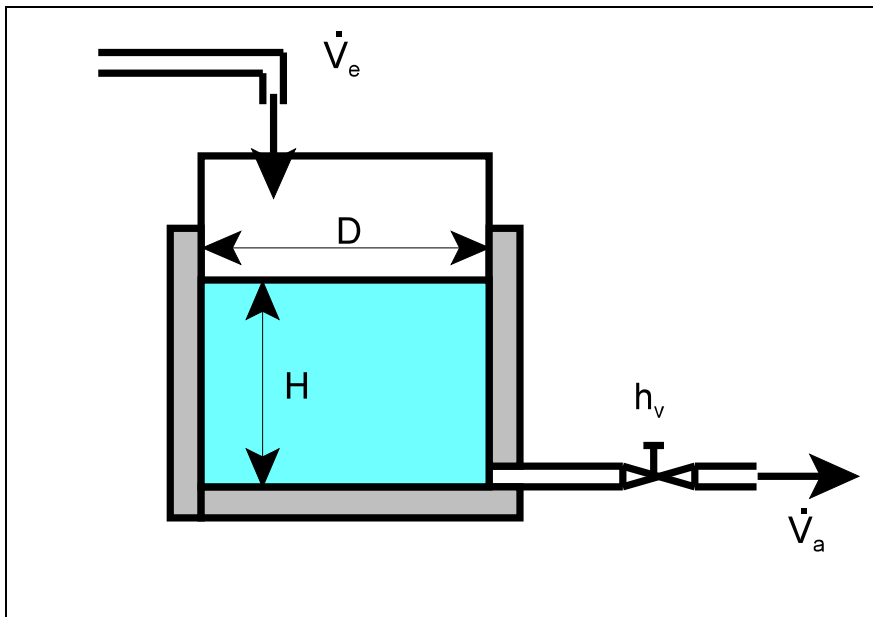
► Beispiel: Feder-Masse-System mit Dämpfung

Mit der Einführung des Zustandsvektors $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{dx_a}{dt} & x_a \end{pmatrix}^T$

folgen aus der Bewegungsgleichung (s.S. 4) die Zustandsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2D\omega_0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_e(t) = \begin{bmatrix} -\frac{T_1}{T_2^2} & -\frac{1}{T_2^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{T_2^2} \\ 0 \end{bmatrix} x_e(t)$$

Beispiel Herleitung der Differentialgleichung für ein Übertragungsglied (mit Linearisierung)



Für den nebenstehend abgebildeten Behälter lässt sich das Übertragungsverhalten durch Aufstellung der Bilanzgleichung für die Masse gewinnen. Wenn man den Behälter als Übertragungsglied interpretiert, so kann man sowohl die Füllhöhe als auch den Austrittsstrom als Ausgangssignale interpretieren; Eingangssignal ist in jedem Fall der Eintritts-

strom. Im Folgenden wird angenommen, dass die Füllhöhe im Behälter das Ausgangssignal darstellt.

– Die Massebilanz

Wenn man den Erhaltungssatz für die Masse auf den Behälter als Bilanzraum anwendet, so erhält man:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_a$$

Unter der oben genannten Voraussetzung konstanter Dichte kann man diese Gleichung durch die Dichte dividieren und erhält dann

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}_e - \dot{V}_a$$

Für den austretenden Volumenstrom erhält man aus der BERNOULLI-Gleichung

$$\dot{V}_a = A_{\text{Ventil}} \sqrt{2gH} = h_v \sqrt{H}$$

h_v Ventilbeiwert
 A_{Ventil} Ventilquerschnitt

Für das Volumen gilt

$$V = AH = \frac{\pi}{4} D^2 H$$

Damit liefert die Massebilanz eine Differentialgleichung für die Höhe:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A} (\dot{V}_e - h_v \sqrt{H})$$

Das ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung; das Übertragungsglied besitzt somit nichtlineares Verhalten.

– Linearisierung

Die Differentialgleichung lässt sich linearisieren, wenn man voraussetzt, dass nur kleine Änderungen um einen Arbeitspunkt H_0 betrachtet werden sollen. Es wird die folgende neue Variable eingeführt

$$\Delta H = H - H_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Delta H}{dt} = \frac{dH}{dt}$$

Die Wurzelfunktion kann dann in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden, die bereits nach dem ersten Reihenterm abgebrochen wird; als Entwicklungsstelle wird der Arbeitspunkt H_0 gewählt:

$$\sqrt{H} \approx \sqrt{H_0} + \frac{1}{2\sqrt{H_0}} (H - H_0)$$

Diese Näherung wird nun in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{1}{A} \left[\dot{V}_e - h_v \left(\sqrt{H_0} + \frac{\Delta H}{2\sqrt{H_0}} \right) \right]$$

Diese Differentialgleichung ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Differentialgleichung lässt sich in die Standardform umformen:

$$\frac{2A\sqrt{H_0}}{h_v} \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = \frac{2\sqrt{H_0}}{H_v} [\dot{V}_e(t) - h_v \sqrt{H_0}]$$

Wenn man die folgenden Größen einführt

$$T_1 = \frac{2A\sqrt{H_0}}{H_v}$$

$$K_p = \frac{2\sqrt{H_0}}{h_v}$$

$$\Delta \dot{V}_e(t) = \dot{V}_e(t) - h_v \sqrt{H_0}$$

so lässt sich die Differentialgleichung schließlich in die Form bringen:

$$T_1 \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = K_p \Delta \dot{V}_e(t)$$

1.3.2 Beschreibung im Bildbereich

Die Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Übertragungsgliedes im Bildbereich, bzw. im Frequenzbereich bringt eine Reihe von Vorteilen mit sich. Vor allem sind die Regeln für die Zusammenschaltung von Übertragungsgliedern im Bildbereich sehr einfach.

- **Die LAPLACE-Transformation**

Diese Transformation ist die Grundlage für den Übergang aus dem Zeitbereich in den Bildbereich. Es wird die komplexe Variable $p = \sigma + j\omega$ eingeführt. Die LAPLACE-Transformation ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Es gelten die folgenden Regeln:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i f(+0)}{dt^i} p^{n-i-1} \quad (1.10)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t) dt\right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

Für den Fall, dass alle Anfangsbedingungen verschwinden, vereinfacht sich die Regel für die Transformation eines Differentialquotienten, da die Summe auf der rechten Seite verschwindet. Die nachfolgenden Beziehungen werden als **Grenzwertsätze** bezeichnet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) \quad (1.11)$$

Der Zusammenhang zwischen Originalfunktion und Bildfunktion kann Korrespondenztabelle entnommen werden. In der nachfolgenden Tabelle stellt wichtige Korrespondenzen zusammen.

◆ Korrespondenztabelle

	$X(p)$	$x(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	e^{-Tp}	$\delta(t-T)$
3	$\frac{1}{p}$	$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$
4	$\frac{1}{p} e^{-Tp}$	$\mathbf{1}(t-T)$
5	$\frac{1}{p^2}$	t
6	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{t^2}{2}$
7	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n = 1, 2, \dots$
8	$\frac{1}{1 + pT}$	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
9	$\frac{1}{(1 + pT)^2}$	$\frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$
10	$\frac{1}{(1 + pT)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{T^n (n-1)!} e^{-\frac{t}{T}} \quad n = 1, 2, \dots$
11	$\frac{1}{p(1 + pT)}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
12	$\frac{1}{p^2(1 + pT)}$	$t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$
13	$\frac{1}{p(1 + pT)^2}$	$1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}}$
14	$\frac{p}{(1 + pT)^2}$	$\frac{1}{T^2} \left(1 - \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}}$

15	$\frac{1 + pT_v}{p(1 + pT)}$	$1 + \frac{T_v - T}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
16	$\frac{1 + pT_v}{p(1 + pT)^2}$	$1 + \left(\frac{T_v - T}{T^2} t - 1 \right) e^{-\frac{t}{T}}$
17	$\frac{1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, T_1 \neq T_2$	$\frac{e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}$
18	$\frac{1}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, T_1 \neq T_2$	$1 - \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}$
19	$\frac{p}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, T_1 \neq T_2$	$\frac{\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2 - T_1}$
20	$\frac{1 + pT_v}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, T_1 \neq T_2$	$\frac{\frac{T_1 - T_v}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - T_v}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}$
21	$\frac{1 + pT_v}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}, T_1 \neq T_2$	$1 - \frac{(T_1 - T_v) e^{-\frac{t}{T_1}} - (T_2 - T_v) e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}$
22	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
23	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\sinh(\omega t)^1$
24	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
25	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\cosh(\omega t)$

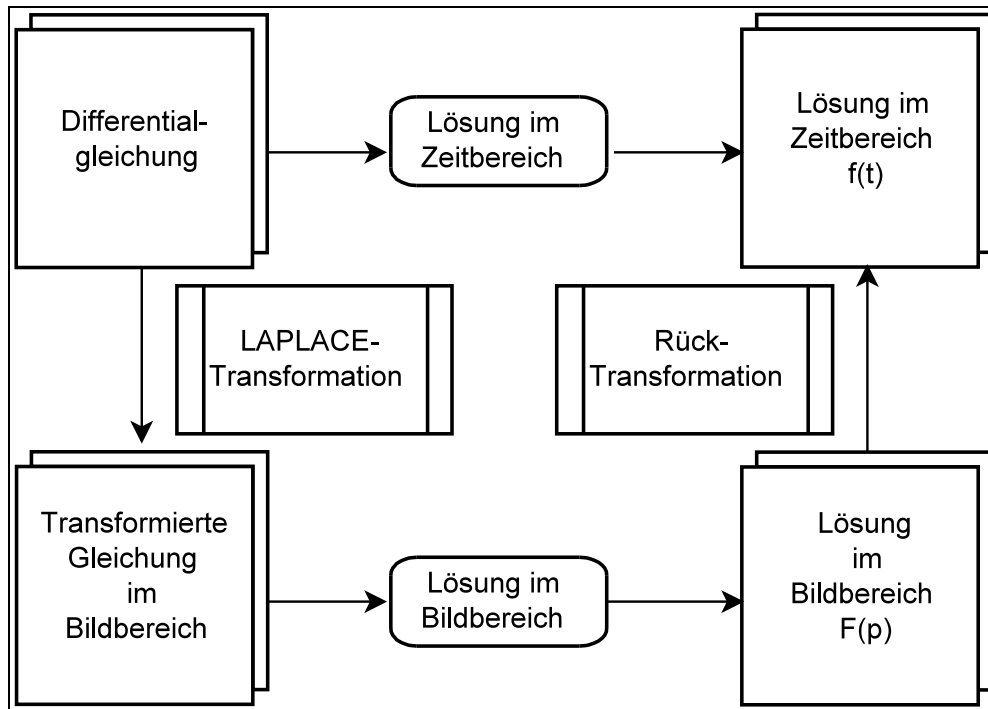
¹ Zur Erinnerung: $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ $\cosh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

26	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos(\omega t)$
27	$\frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$
28	$\frac{p+z}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\left[\frac{z-a}{\omega}\right]^2 + 1} \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$ $\tan(\varphi) = \frac{\omega}{z-a}$
29	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$
30	$\frac{1}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b < 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\omega_e} \sin(\omega_e t), \omega_e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$
31	$\frac{1}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b = 0$	$t \cdot e^{-\frac{a}{2}t}$
32	$\frac{1}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b > 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\beta} \sinh(\beta t), \beta = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
33	$\frac{p}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b < 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\omega_e} \left(-\frac{a}{2} \sin(\omega_e t) + \omega_e \cos(\omega_e t) \right)$ $\omega_e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$
34	$\frac{p}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b = 0$	$\left(1 - \frac{a}{2}t \right) e^{-\frac{a}{2}t}$
35	$\frac{p}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b > 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\beta} \left(-\frac{a}{2} \sinh(\beta t) + \beta \cosh(\beta t) \right)$ $\beta = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
36	$\frac{1}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b < 0$	$\frac{1}{b} \left[1 - \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\omega_e} \left(\frac{a}{2} \sin(\omega_e t) + \omega_e \cos(\omega_e t) \right) \right]$ $\omega_e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$

37	$\frac{1}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b = 0$	$\frac{4}{a^2} \left[1 - \left(1 + \frac{a}{2} t \right) e^{-\frac{a}{2} t} \right]$
38	$\frac{1}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b > 0$	$\frac{1}{b} \left[1 - \frac{e^{-\frac{a}{2} t}}{\beta} \left(\frac{a}{2} \sinh(\beta t) + \beta \cosh(\beta t) \right) \right]$ $\beta = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
39	$\frac{p+z}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b < 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2} t}}{\omega_e} \left[\left(z - \frac{a}{2} \right) \sin(\omega_e t) + \omega_e \cos(\omega_e t) \right]$ $\omega_e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$
40	$\frac{p+z}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b = 0$	$\left[1 + \left(z - \frac{a}{2} \right) t \right] e^{-\frac{a}{2} t}$
41	$\frac{p+z}{p^2 + ap + b}, \frac{a^2}{4} - b > 0$	$\frac{e^{-\frac{a}{2} t}}{\beta} \left[\left(z - \frac{a}{2} \right) \sinh(\beta t) + \beta \cosh(\beta t) \right]$ $\beta = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
42	$\frac{p+z}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b < 0$	$\frac{z}{b} \left[1 - \frac{e^{-\frac{a}{2} t}}{\omega_e} \left[\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{z} \right) \sin(\omega_e t) + \omega_e \cos(\omega_e t) \right] \right]$ $\omega_e = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$
43	$\frac{p+z}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b = 0$	$\frac{4z}{a^2} \left[1 - \left(1 + \frac{a}{2} t - \frac{a^2}{4z} t \right) e^{-\frac{a}{2} t} \right]$
44	$\frac{p+z}{p(p^2 + ap + b)}, \frac{a^2}{4} - b > 0$	$\frac{z}{b} \left[1 - \frac{e^{-\frac{a}{2} t}}{\beta} \left[\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{z} \right) \sinh(\beta t) + \beta \cosh(\beta t) \right] \right]$ $\beta = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

- **Übergang vom Zeitbereich in den Bildbereich**

Im folgenden Bild ist der Zusammenhang zwischen Zeitbereich und Bildbereich dargestellt.



Zusammenhang zwischen Zeitbereich und Bildbereich

Ausgangspunkt ist die das Verhalten des Übertragungsgliedes beschreibende Differentialgleichung in der Form (1.4). Diese Differentialgleichung wird durch LAPLACE-Transformation in eine algebraische Gleichung umgeformt:

$$X_a(p) (T_n^n p^n + \dots + T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) = K_p X_e(p) (1 + T_{D_1} p + T_{D_2}^2 p^2 + \dots + T_{D_m}^m p^m)$$

Diese Gleichung lässt sich zur **Übertragungsfunktion** umformen:

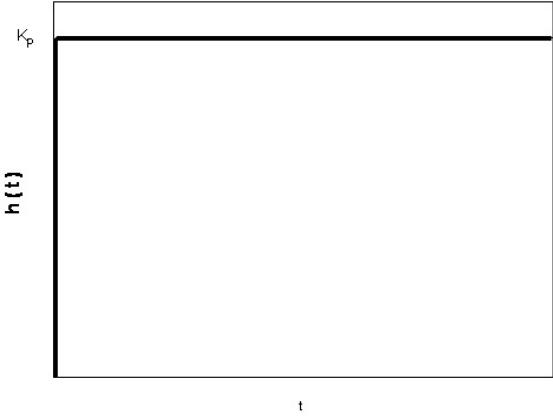
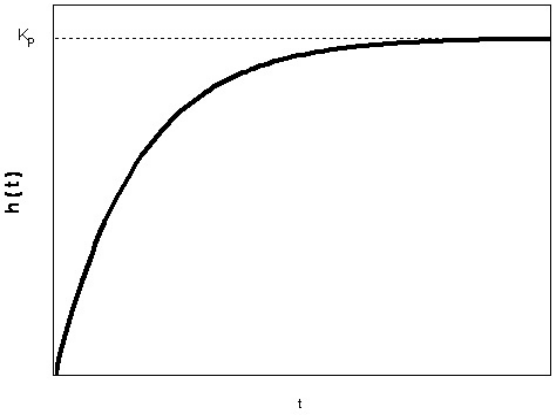
$$G(p) = \frac{X_a(p)}{X_e(p)} = \frac{K_p (1 + T_{D_1} p + T_{D_2}^2 p^2 + \dots + T_{D_m}^m p^m)}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + \dots + T_n^n p^n} \quad (1.12)$$

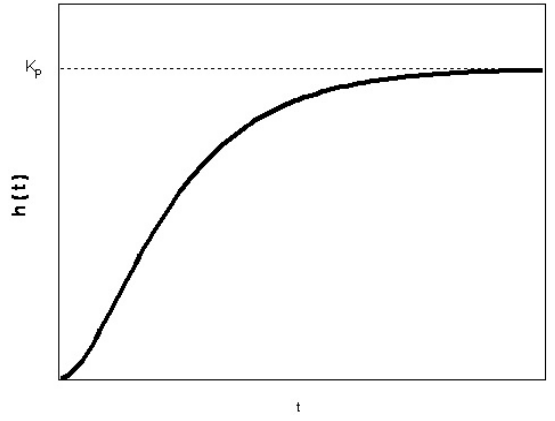
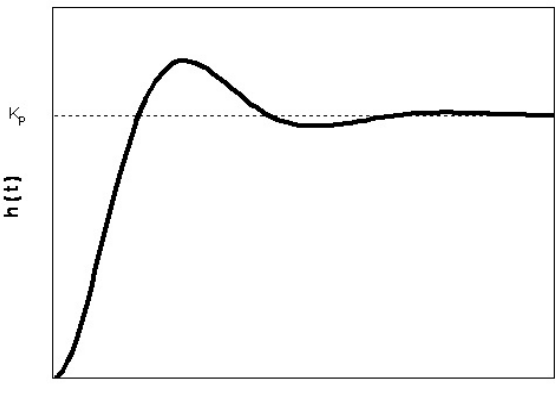

Die Übertragungsfunktion beschreibt das Übertragungsverhalten des Übertragungsgliedes im Bildbereich bei Erregung aus dem Ruhezustand (alle Anfangsbedingungen verschwinden).

Für die Ausführung der Rücktransformation ist häufig die Zerlegung dieser Funktion in Partialbrüche notwendig. Für den Fall, dass keine Mehrfach-Pole auftreten, gilt hierfür:

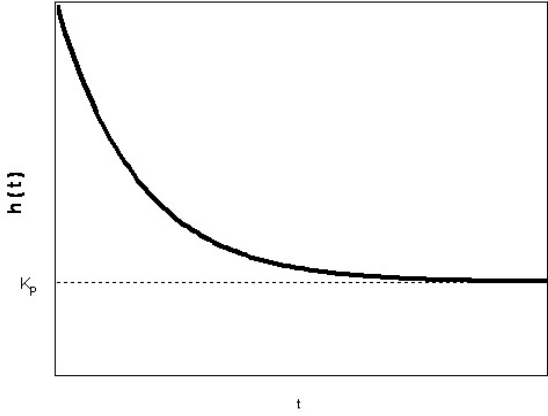
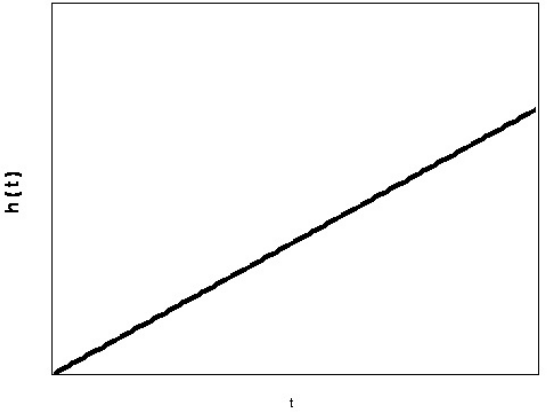
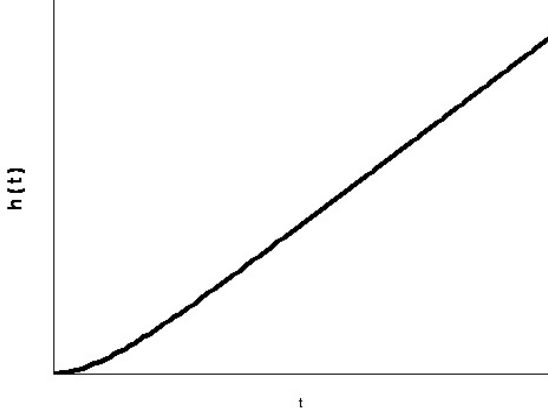
$$G(p) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(p - p_{0_i})} \quad \text{wobei gilt} \quad r_i = (p - p_{0_i}) G(p) |_{p = p_{0_i}} \quad i = 1..n$$

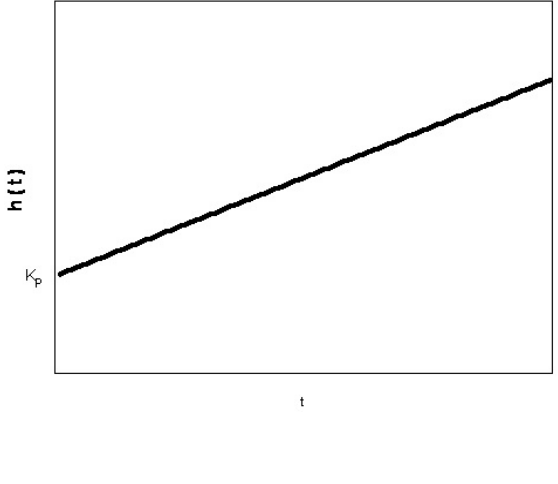
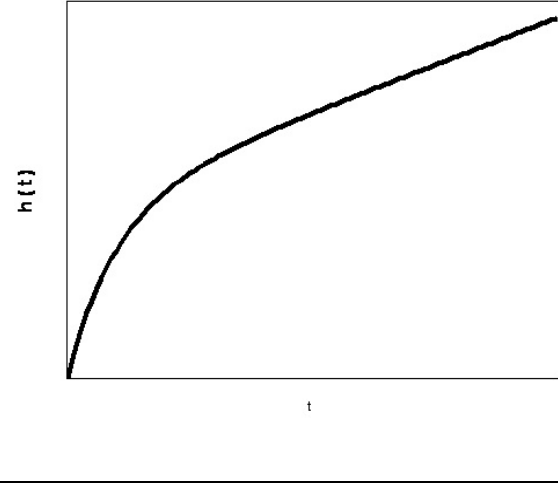
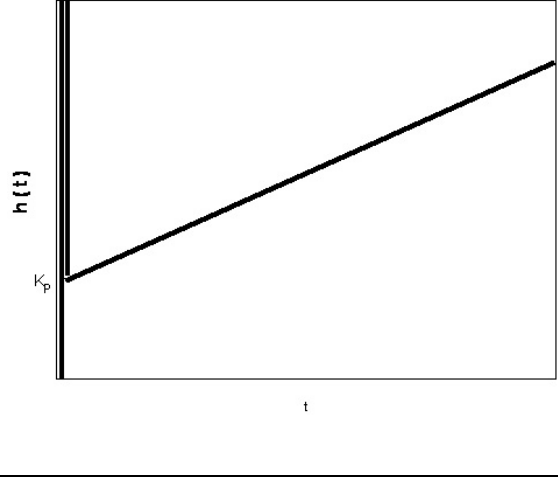
In der nachfolgenden Tabelle sind die Differentialgleichungen, die Übertragungsfunktionen und die Grafen der Übergangsfunktionen für ausgewählte Typen von Übertragungsgliedern dargestellt:

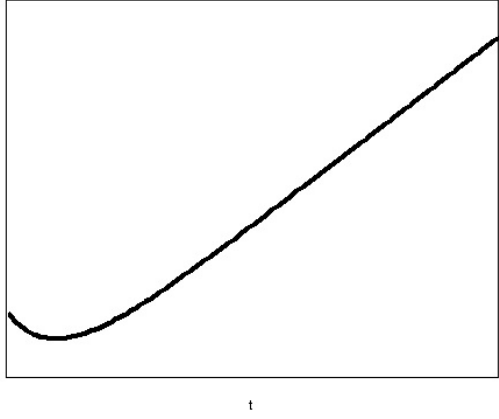
Typ	Differentialgleichung	Übergangsfunktion
	Übertragungsfunktion	
P	$x_a = K_p x_e$	
	$G(p) = K_p$	
PT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_p x_e$	
	$G(p) = \frac{K_p}{1 + T_1 p}$	

<p style="text-align: center;">PT_2</p>	$T_1 T_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_P x_e$	
	$G(p) = \frac{K_P}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$	
<p style="text-align: center;">PT_2^*</p>	$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_P x_e$	
	$G(p) = \frac{K_P}{1 + \frac{2D}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$	
<p style="text-align: center;">PT_t</p>	$x_a = K_P x_e (t - T_t)$	
	$G(p) = K_P e^{-p T_t}$	

D	$x_a = K_D \frac{dx_e}{dt}$	
	$G(p) = K_D p$	
DT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_D \frac{dx_e}{dt}$	
	$G(p) = \frac{K_D p}{1 + T_1 p}$	
PD	$x_a = K_P \left(x_e + T_V \frac{dx_e}{dt} \right)$	
	$G(p) = K_P (1 + T_V p)$	

PDT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a =$ $= K_P \left(x_e + T_v \frac{dx_e}{dt} \right)$ $T_v > T_1$	 <p>The graph shows the response h(t) over time t for a PD controller. The vertical axis is labeled h(t) and the horizontal axis is labeled t. A horizontal dashed line represents the steady-state value K_p. The response curve starts at a high value on the y-axis and decays exponentially towards the K_p line.</p>
	$G(p) = K_P \frac{1 + T_v p}{1 + T_1 p}$	
I	$x_a = K_I \int x_e dt$	 <p>The graph shows the response h(t) over time t for an I controller. The vertical axis is labeled h(t) and the horizontal axis is labeled t. The response curve is a straight line starting from the origin (0,0) and increasing linearly.</p>
	$G(p) = \frac{K_I}{p}$	
IT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a = K_I \int x_e dt$	 <p>The graph shows the response h(t) over time t for an IT₁ controller. The vertical axis is labeled h(t) and the horizontal axis is labeled t. The response curve starts at the origin (0,0) and increases with a concave-up shape, characteristic of a second-order system response.</p>
	$G(p) = \frac{K_I}{p(1 + T_1 p)}$	

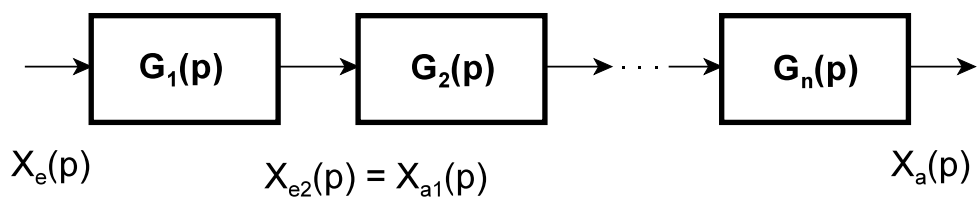
PI	$x_a = K_p \left(x_e + \frac{1}{T_n} \int x_e dt \right)$	 <p>The graph shows the output $h(t)$ versus time t. The curve is a straight line that starts at a value K_p on the vertical axis and increases linearly with time.</p>
	$G(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right)$ $= K_p \left(\frac{1 + T_n p}{T_n p} \right)$	
PIT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a =$ $= K_p \left(x_e + \frac{1}{T_n} \int x_e dt \right)$	 <p>The graph shows the output $h(t)$ versus time t. The curve starts at the origin (0,0) and increases with a decreasing slope, characteristic of a first-order lag response.</p>
	$G(p) = K_p \left(\frac{1 + T_n p}{T_n p (1 + T_1 p)} \right)$	
PID	$x_a = K_p \left(x_e + \frac{1}{T_n} \int x_e dt + T_v \frac{dx_e}{dt} \right)$	 <p>The graph shows the output $h(t)$ versus time t. The curve starts at a high value on the vertical axis (representing the derivative action) and then increases linearly with time, similar to the PI controller response.</p>
	$G(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n p} + T_v p \right)$ $= K_p \left(\frac{(1 + T_n p + T_n T_v p^2)}{T_n p} \right)$	

PIDT ₁	$T_1 \frac{dx_a}{dt} + x_a =$ $= K_P \left(x_e + \frac{1}{T_n} \int x_e dt + T_v \frac{dx_e}{dt} \right)$	
	$G(p) = K_P \left(\frac{1 + T_n p + T_n T_v p^2}{T_n p (1 + T_1 p)} \right)$	

- **Zusammenschaltung von Übertragungsgliedern**

Im folgenden werden die Regeln für die Ermittlung der Übertragungsfunktion der Grundschaltungen von Übertragungsgliedern angegeben. Kompliziertere Schaltungen lassen sich auf diese Grundschaltungen zurückführen, so dass mit diesen Regeln die Übertragungsfunktionen auch dieser Schaltungen ermittelt werden können.

- ◆ *Reihenschaltung*



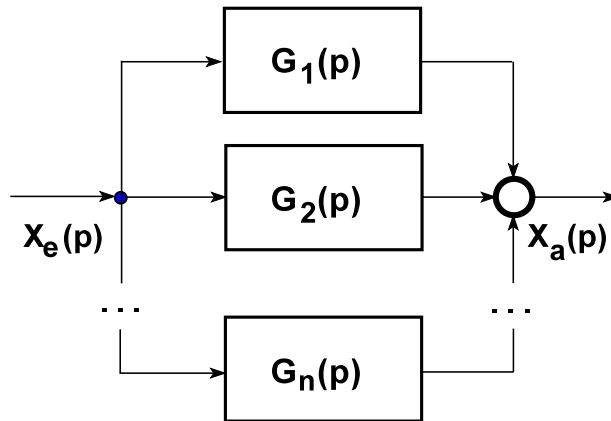
$$X_{e_2}(p) = X_{a_1}(p), \dots, X_{e_n}(p) = X_{a_{n-1}}(p)$$

$$G(p) = \frac{X_a(p)}{X_e(p)} \tag{1.13}$$

$$G(p) = G_1(p) G_2(p) \dots G_n(p)$$

$$= \prod_{i=1}^n G_i(p)$$

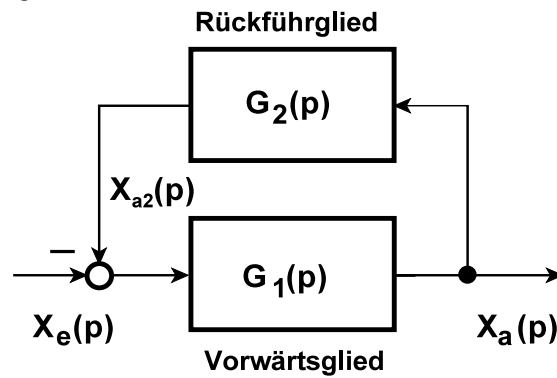
◆ *Parallelschaltung*



$$\begin{aligned}
 X_a(p) &= X_{a_1}(p) + X_{a_2}(p) + \dots + X_{a_n}(p) \\
 G(p) &= \frac{X_a(p)}{X_e(p)} \\
 G(p) &= G_1(p) + G_2(p) + \dots + G_n(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n G_i(p)
 \end{aligned}$$

(1.14)

◆ *Kreisschaltung*



$$\begin{aligned}
 X_{e_1}(p) &= X_e(p) - X_{a_2}(p) \\
 X_{e_2}(p) &= X_{a_1}(p) \\
 G(p) &= \frac{X_a(p)}{X_e(p)} \\
 G(p) &= \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) G_2(p)}
 \end{aligned}$$

(1.15)

- **Frequenzbereich und Frequenzgang**

Die Beschreibung des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich ist dann angebracht, wenn die Ein- und Ausgangssignale sich durch harmonische Zeitfunktionen beschreiben lassen, wenn also für die Ein- und Ausgangssignale folgende Ansätze (in komplexer Schreibweise) gewählt werden können:

$$\mathbf{x}_e = \hat{\mathbf{x}}_e e^{j\omega t}, \quad \mathbf{x}_a = \hat{\mathbf{x}}_a e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Wenn diese Ansätze in die Differentialgleichung (1.4) eingesetzt werden, erhält man folgende algebraische Gleichung:

$$\left(T_n^n(j\omega)^n + \dots + T_2^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1 \right) \hat{\mathbf{x}}_a e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{\mathbf{x}}_e e^{j\omega t} K_p \left(1 + T_{D_1} j\omega + T_{D_2}^2(j\omega)^2 + \dots + T_{D_m}^m(j\omega)^m \right)$$

Diese Gleichung lässt sich zum **Frequenzgang** umformen:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{\hat{\mathbf{x}}_a}{\hat{\mathbf{x}}_e} e^{j\varphi} = \frac{K_p \left(1 + T_{D_1} j\omega + T_{D_2}^2(j\omega)^2 + \dots + T_{D_m}^m(j\omega)^m \right)}{1 + T_1 j\omega + T_2^2(j\omega)^2 + \dots + T_n^n(j\omega)^n}$$

(1.16)

Der Frequenzgang ist eine komplexe Funktion. Die Darstellung dieser Funktion in der komplexen Ebene heißt **Ortskurve**, wobei ω ($0 \dots \infty$) der Kurvenparameter ist.

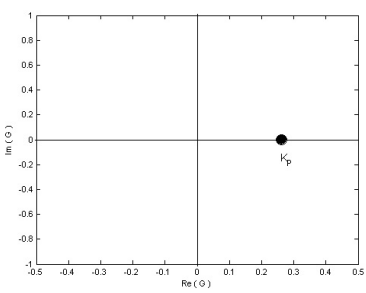
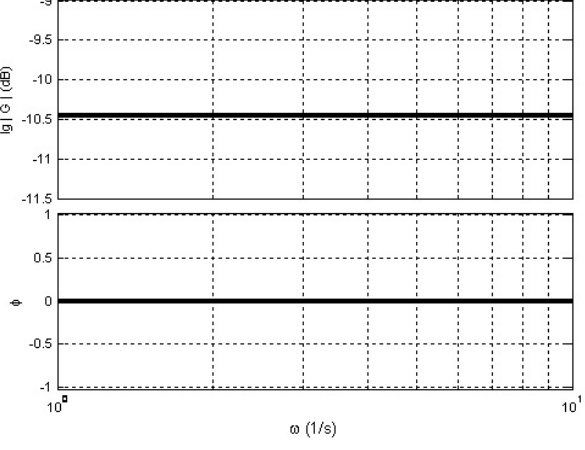
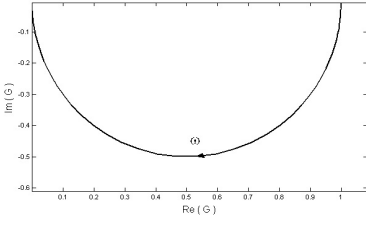
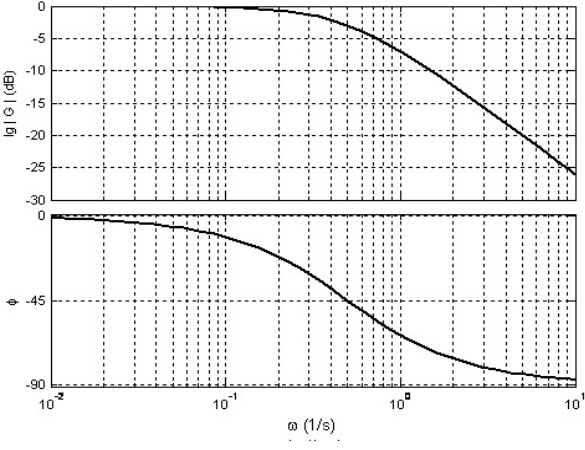
Der Betrag des Frequenzgangs ist eine reelle Funktion von ω . Aus der Definition (1.16) folgt, dass der Betrag gleich dem Amplitudenverhältnis ist. Diese Funktion heißt darum **Amplitudengang**. Die Phase φ ist ebenfalls eine reelle Funktion von ω , die als **Phasengang** bezeichnet wird. Es gelten folgende Zusammenhänge:

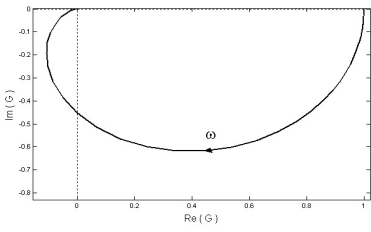
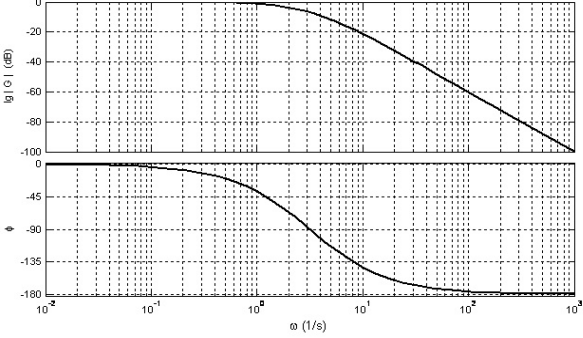
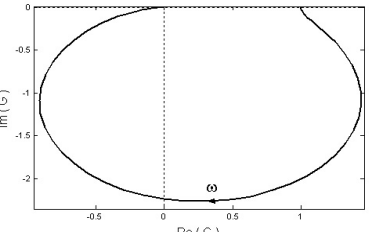
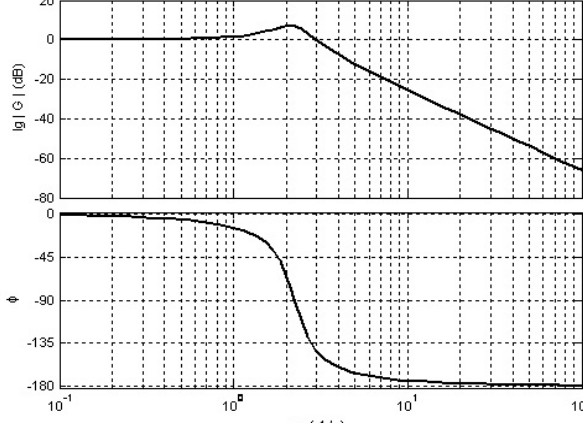
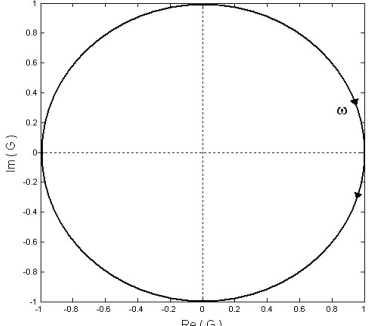
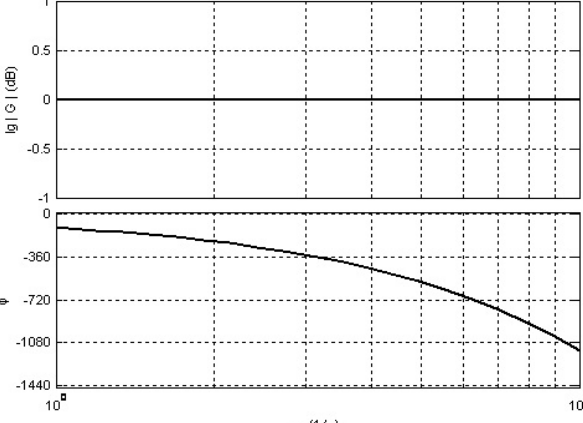
$$\begin{aligned} \mathbf{G}(j\omega) &= \operatorname{Re}[\mathbf{G}(j\omega)] + j \operatorname{Im}[\mathbf{G}(j\omega)] \\ |\mathbf{G}(j\omega)| &= \hat{G}(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2[\mathbf{G}(j\omega)] + \operatorname{Im}^2[\mathbf{G}(j\omega)]} \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}[\mathbf{G}(j\omega)]}{\operatorname{Re}[\mathbf{G}(j\omega)]}\right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

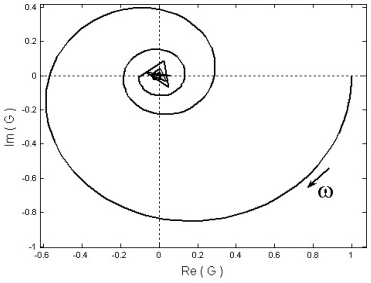
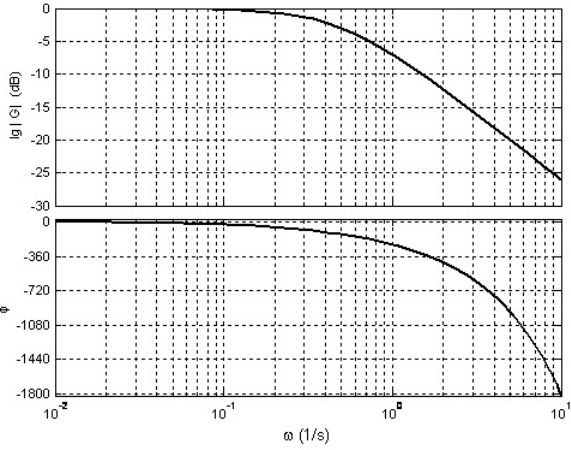
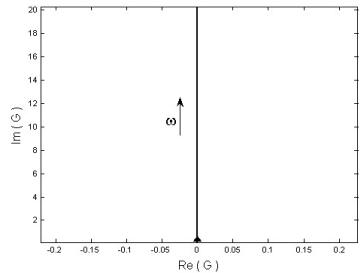
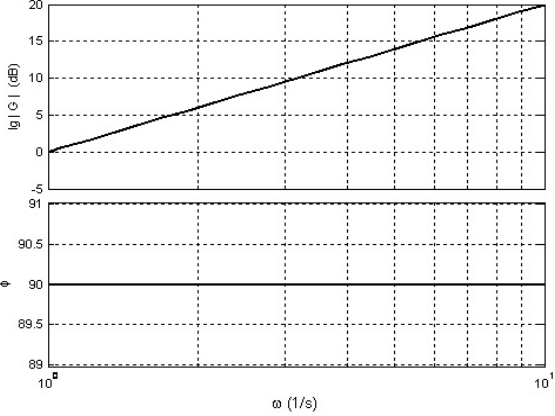
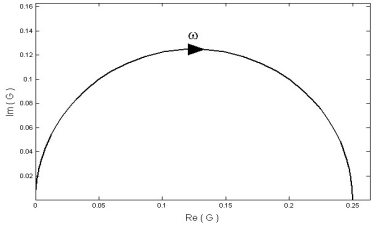
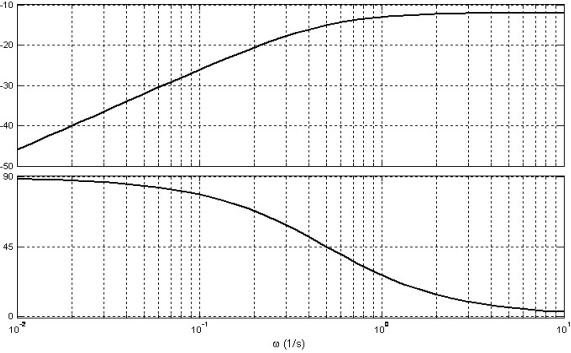
Für die Darstellung der Amplitudenkennlinie wird der Logarithmus des Betrages des Frequenzgangs über der Frequenz aufgetragen. Für die Skalierung der Achse wird die Einheit dB (Dezibel) eingeführt, wobei folgende Beziehung gilt:

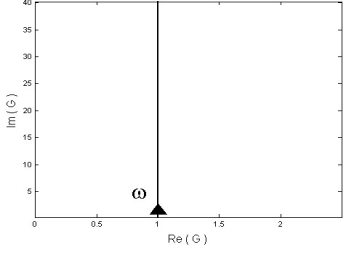
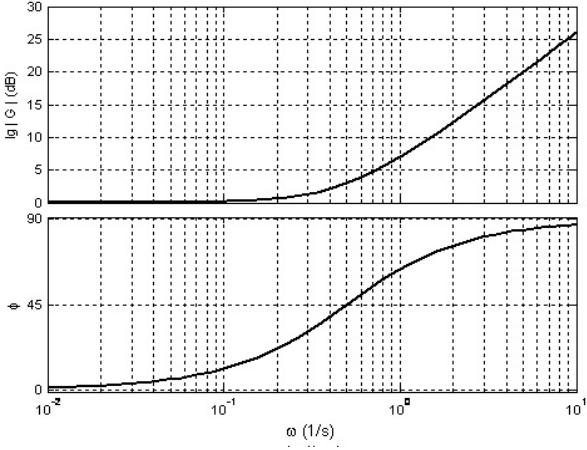
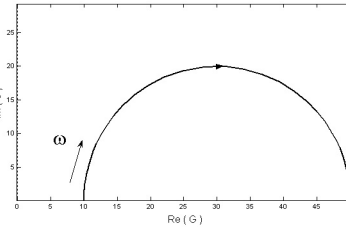
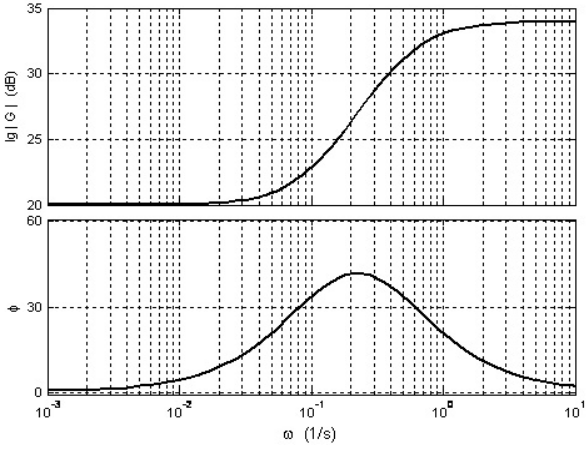
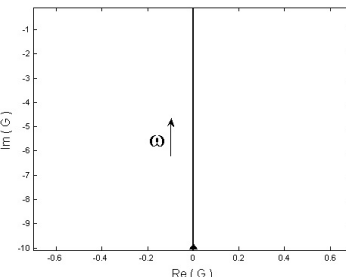
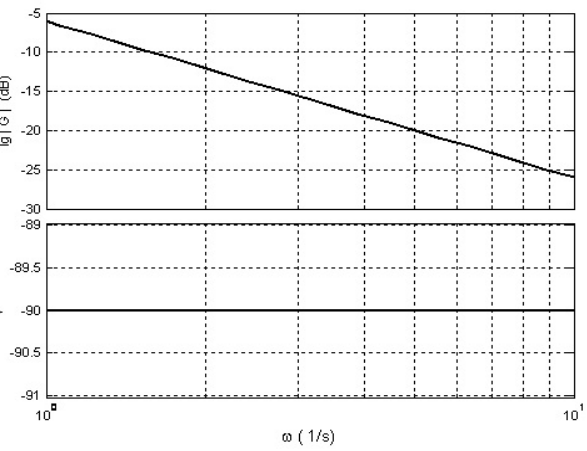
$$|\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg(|\mathbf{G}(j\omega)|)$$

Die gemeinsame grafische Darstellung der Amplituden- und Phasenkennlinie wird als BODE-Diagramm bezeichnet. In der nachfolgenden Tabelle sind für ausgewählte Typen von Übertragungsgliedern die Frequenzgänge, die Ortskurven und die BODE-Diagramme dargestellt.

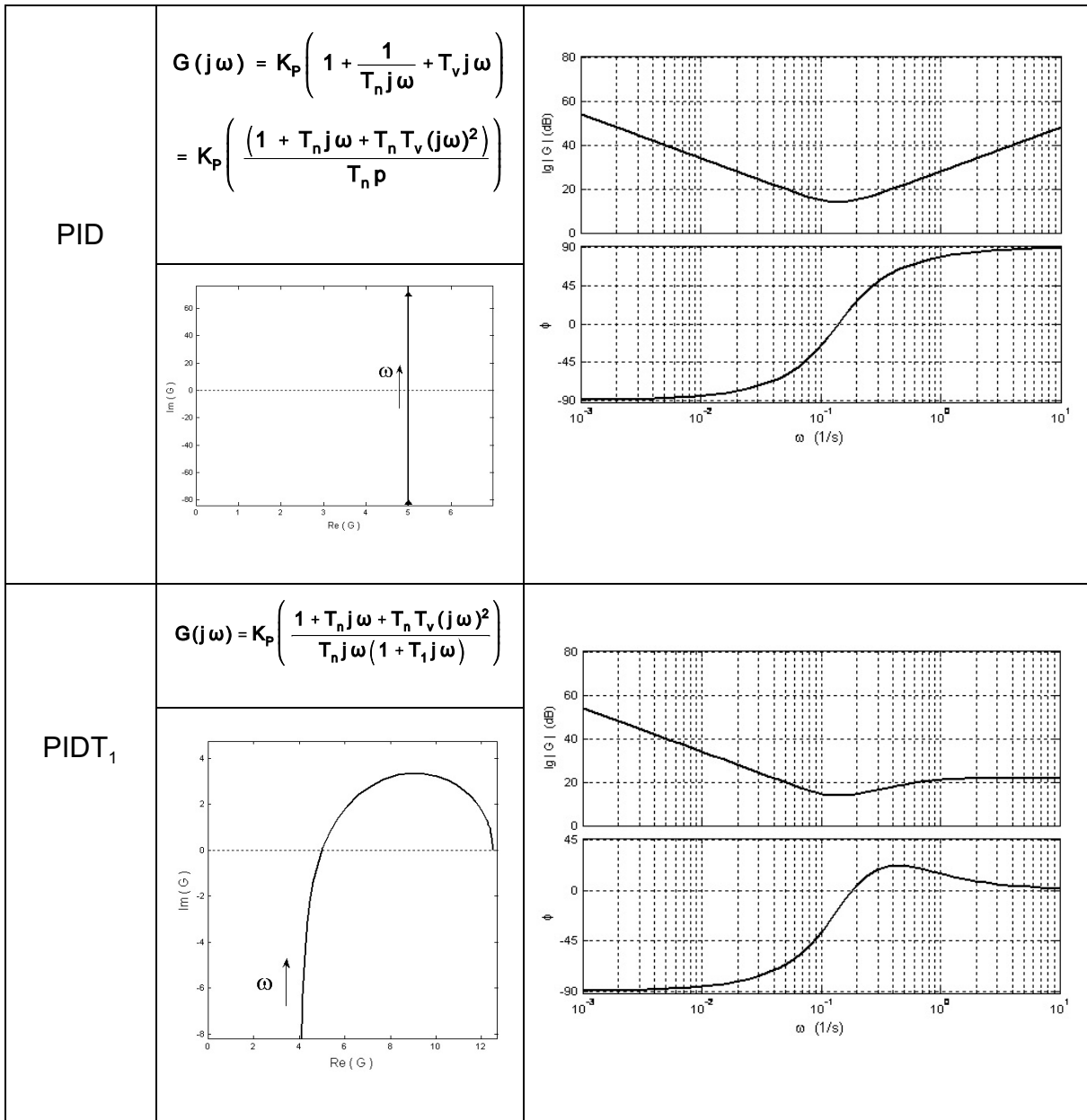
Typ	Frequenzgang	BODE - Diagramm
	Ortskurve	
P	$G(j\omega) = K_P$ 	
PT ₁	$G(j\omega) = \frac{K_P}{1 + T_1 j\omega}$ 	

<p style="text-align: center;">PT_2</p>	$G(j\omega) = \frac{K_p}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)}$ 	
<p style="text-align: center;">PT_2^*</p>	$G(j\omega) = \frac{K_p}{1 + \frac{2D}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$ 	
<p style="text-align: center;">PT_t</p>	$G(j\omega) = K_p e^{-j\omega T_t}$ 	

<p style="text-align: center;">PT_1-T_t</p>	$G(j\omega) = \frac{K_P}{1 + T_1 j\omega} e^{-j\omega T_t}$ 	
<p style="text-align: center;">D</p>	$G(j\omega) = K_D j\omega$ 	
<p style="text-align: center;">DT_1</p>	$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{1 + T_1 j\omega}$ 	

<p style="text-align: center;">PD</p>	$G(j\omega) = K_P(1 + T_V j\omega)$ 	
<p style="text-align: center;">PDT₁</p>	$G(j\omega) = K_P \frac{1 + T_V j\omega}{1 + T_1 j\omega}$ $T_V > T_1$ 	
<p style="text-align: center;">I</p>	$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega}$ 	

<p style="text-align: center;">IT_1</p>	$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega(1 + T_1j\omega)}$	
<p style="text-align: center;">PI</p>	$G(j\omega) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_n j\omega} \right)$ $= K_P \left(\frac{1 + T_n j\omega}{T_n j\omega} \right)$	
<p style="text-align: center;">PIT_1</p>	$G(j\omega) = K_P \left(\frac{1 + T_n j\omega}{T_n j\omega(1 + T_1 j\omega)} \right)$	



1.4 Untersuchung des Übertragungsverhaltens von Systemen

1.4.1 Einführung

Für die Untersuchung des Übertragungsverhaltens von Systemen, die durch die Kopplung linearer Übertragungsglieder entstehen, gibt es drei Wege:

- Die **analytische** Untersuchung basiert auf der mathematischen Lösung der Systemgleichungen im Zeit-, Bild- oder Frequenzbereich. Aus der Diskussion der analytischen Lösungen lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten des Systems ableiten.
- Die **grafo-analytische** Untersuchung basiert zunächst auf der analytischen Lösung der Systemgleichungen. Diese Lösungen werden aber für bestimmte Parametersätze grafisch dargestellt. Aus den grafischen Darstellungen lassen sich in der Regel die wesentlichen Eigenschaften des Systems besser und vor allem anschaulicher ableiten als durch rein analytisches Vorgehen.
- Die Untersuchung mit **numerischen** Lösungsverfahren auf einem Digitalrechner (in der Regel auf einem PC) durch geeignete **Simulationswerkzeuge** liefert schnell aussagefähige Ergebnisse, auch in den Fällen, in denen die ersten beiden Untersuchungsmethoden aus Gründen des Aufwandes nicht mehr praktikierbar sind. Die Ergebnispräsentation erfolgt bei der Systemsimulation in der Regel in grafischer Form, so dass die Interpretation der Ergebnisse nach den gleichen Regeln erfolgen kann wie bei den grafo-analytischen Verfahren.

Im folgenden soll die numerische Simulation des Übertragungsverhaltens linearer Systeme auf dem PC im Mittelpunkt stehen. Voraussetzung für eine effiziente Realisierung der Simulationsrechnungen ist die Verfügbarkeit eines Simulationsprogramms, das folgende Eigenschaften besitzen muss:

- Die Grundfunktionen müssen als Toolbox verfügbar sein.
- Die Modellbildung muss durch einfach zu strukturierende Blöcke unterstützt werden. Die Modellblöcke müssen flexibel an die Bedürfnisse des Nutzers anpassbar sein.
- Die Problembeschreibung sollte interaktiv und in grafischer Form unterstützt werden.
- Die Ergebnispräsentation muss in grafischer Form möglich sein.
- Die Kopplung mit anderen Programmen sollte über eine standardisierte Datenschnittstelle möglich sein.

Das System **MATLAB**, ergänzt um das interaktive Simulationswerkzeug **Simulink** (es handelt sich um zwei eigenständige Programme!) wird diesen Anforderungen voll gerecht. Dabei muss für MATLAB die spezielle Ergänzung „Control Systems Toolbox“ vorhanden sein. Im folgenden werden die Grundfunktionen dieses Systems soweit beschrieben, wie sie für die Simulation von Systemen linearer Übertragungsglieder notwendig sind. Im Anschluss daran wird ein Beispiel behandelt, das die Anwendung dieser Funktionen zeigt.

1.4.2 Ausgewählte MATLAB-Funktionen

In MATLAB sind zwei unterschiedliche Arbeitsweisen zu unterscheiden:

- Die Kommandoingabe:
Über die interaktive Kommandozeile werden Anweisungen eingegeben, die nach Abschluss der Eingabe sofort ausgeführt werden. Das ist der Grundzustand des Systems.
- Die Abarbeitung eines Programmskriptes:
Alle Anweisungen, die für die Lösung eines Problems notwendig sind, werden in ein Skript-File geschrieben. Die Kommandofolge wird durch Aufruf dieses Skriptes über die Kommandoingabe abgearbeitet.

Im folgenden werden ausschließlich Problemstellungen behandelt, die direkt über die Kommandoingabe zu lösen sind. Prinzipiell könnten diese Anweisungen aber auch in einem Skript auftreten.

In der folgenden Beschreibung stehen Begriffe, die die Kommandosprache beschreiben, in geschweiften Klammern.

- Anweisungen für die Arbeit mit Polynomen

Ein Vektor wird in MATLAB wie folgt definiert:

`{name des vektors}=[{komponente 1} {komponente 2} ... {komponente n}]`

Ein Polynom wird durch seine Koeffizienten, die in einem Vektor zusammengefasst werden, definiert. Die erste Komponente enthält den Koeffizienten vor der höchsten Potenz, die letzte Komponente stellt den Absolutterm des Polynoms dar.

Durch die Funktion *roots* werden die Nullstellen eines Polynoms bestimmt:

$$w = \text{roots}(p)$$

Der Vektor *w* enthält die Nullstellen; *p* ist der Vektor der Koeffizienten des Polynoms.

- ▶ Beispiel

Die Lösungen der folgenden charakteristischen Gleichung sind zu bestimmen:

$$p^3 + 2p^2 + 3p + 4 = 0$$

Folgende MATLAB-Anweisungen sind notwendig

```
» r=[1 2 3 4];  
» roots(r)
```

```
ans =
```

```
-1.6506  
-0.1747 + 1.5469i  
-0.1747 - 1.5469i
```

Nach „ ans = “ folgt die Lösung. Die Eingaben sind am Kommando-Promptzeichen „>>“ zu erkennen.

Für die Kodierung von Übertragungsfunktionen in MATLAB werden die Zähler- und die Nennerpolynome benötigt. Diese werden im folgenden durch Vektoren bezeichnet, die mit Z bzw. N beginnen.

- Definition der Übertragungsfunktion, Operationen mit Übertragungsfunktionen
Eine Übertragungsfunktion wird durch folgenden Funktionsaufruf definiert:

$$G = \text{tf}(Z, N)$$

Dabei bezeichnet G die zu definierende Übertragungsfunktion, tf ist der Name der MATLAB-Funktion (tf : transfer function), Z und N stehen für die Vektoren der Koeffizienten des Zähler- bzw. des Nennerpolynoms.

Die Pole der Übertragungsfunktion werden über die Funktion

$$\text{pole}(G)$$

berechnet; die Nullstellen über die Funktion

$$\text{tzero}(G)$$

G bezeichnet eine mit der tf-Funktion definierte Übertragungsfunktion.

Die Transformation der Übertragungsfunktion in die Form, die Zähler- und Nennerpolynom in der Pol-Nullstellen-Darstellung enthält, wird durch die Funktion

$$\text{zpk}(G)$$

ausgeführt. Für die Kürzung von Zähler- und Nennerpolynom um eventuell vorhandene Pol-Nullstellen-Paare verwendet man die Funktion

$$\text{minreal}(G)$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm wird mit der Funktion

$$\text{pzmap}(G)$$

erzeugt.

► Beispiel

Gegeben sind die folgenden Übertragungsfunktionen

$$G_S(p) = \frac{0.666}{0.333p^2 + 0.666p + 1} \quad G_R(p) = \frac{0.5p + 0.3}{p}$$

Durch die folgende MATLAB-Anweisungsfolge werden diese Übertragungsfunktionen definiert; anschließend können mit diesen Funktionen unterschiedliche Operationen (hier die Bestimmung der Übertragungsfunktion der Reihenschaltung beider Übertragungsglieder) ausgeführt werden.

```
» ZS=[0.666];  
» ZR=[0.5 0.3];  
» NS=[0.333 0.666 1];  
» NR=[1 0];  
» GR=tf(ZR, NR)
```

Transfer function: Das ist ein Resultat
0.5 s + 0.3

s
» GS=tf(ZS,NS)

Transfer function: Das ist ein Resultat
0.666

0.333 s^2 + 0.666 s + 1
» G0=GR*GS

Transfer function: Das ist ein Resultat
0.333 s + 0.1998

0.333 s^3 + 0.666 s^2 + s
» pole(G0)
ans =

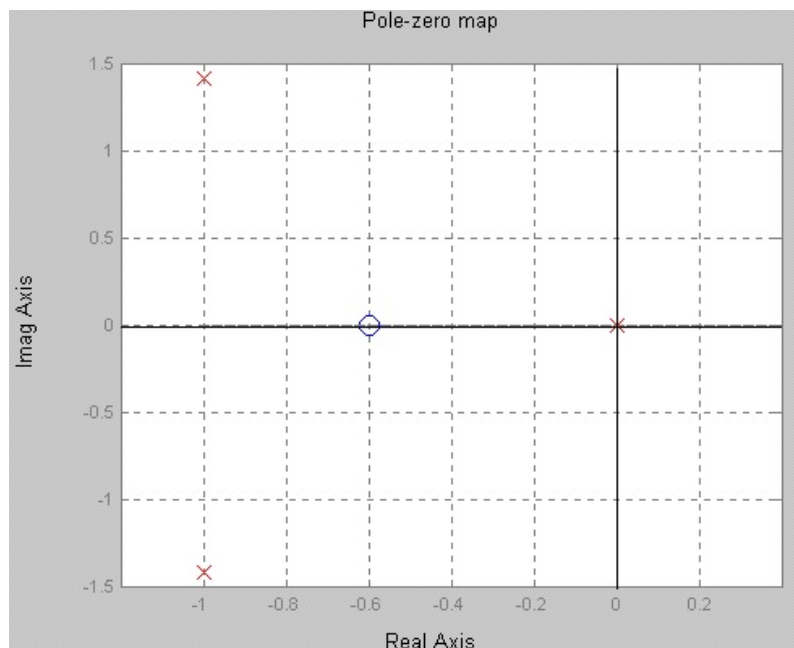
0
-1.0000 + 1.4153i
-1.0000 - 1.4153i

» tzero(G0)
ans = Es folgen die Nullstellen

-0.6000
» zpk(G0)

Zero/pole/gain: Das ist ein Resultat
(s+0.6)

s (s^2 + 2s + 3)
» pzmap(G0)



Die Kreuze kennzeichnen die Pole und der Kreis kennzeichnet die Nullstelle.

Hinweis: Die komplexe Variable p wird in MATLAB mit „ s “ bezeichnet.

- Sprungantwort

Die Sprungantwort eines Systems, dessen Übertragungsfunktion durch G definiert werde, lässt sich mit der Funktion

`step (G)`

visualisieren. Es erscheint ein Plot der Sprungantwort in einem separaten Fenster. Für den Fall, dass mehrere Sprungantworten in einem Diagramm dargestellt werden sollen, kann das integrierte Tool

`ltiview`

aufgerufen werden (Iti steht für „linear time invariant“). Dieses Programm besitzt eine eigene menügeführte Steuerung.

- Darstellung des Frequenzgangs

Die Ortskurve des Frequenzgangs kann über die Funktion

`nyquist(G)`

dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Darstellung auch die Ortskurve für negative Frequenzen enthält.

Die Amplituden- und die Phasenkenlinien werden über die Funktion

`bode(G)`

dargestellt.

Auch für die Erzeugung dieser Darstellungen ist das Tool *ltiview* sehr gut geeignet; vor allem, wenn mehrere Verläufe in einem Diagramm dargestellt werden sollen.

- Anwendung von Simulink

Die Systemstruktur wird in einem Simulink-Arbeitsblatt interaktiv aus vorgefertigten Blöcken zusammengesetzt. Diese Art der Darstellung ist dem Signalflussplan sehr ähnlich. Die Übertragungsglieder können auch in Simulink durch ihre Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Dabei werden Zähler- und Nennerpolynom wiederum durch die Vektoren der Koeffizienten dargestellt.

Das System stellt neben den Blöcken für die kontinuierlichen Modelle auch Blöcke für zeitdiskrete Modelle bereit.

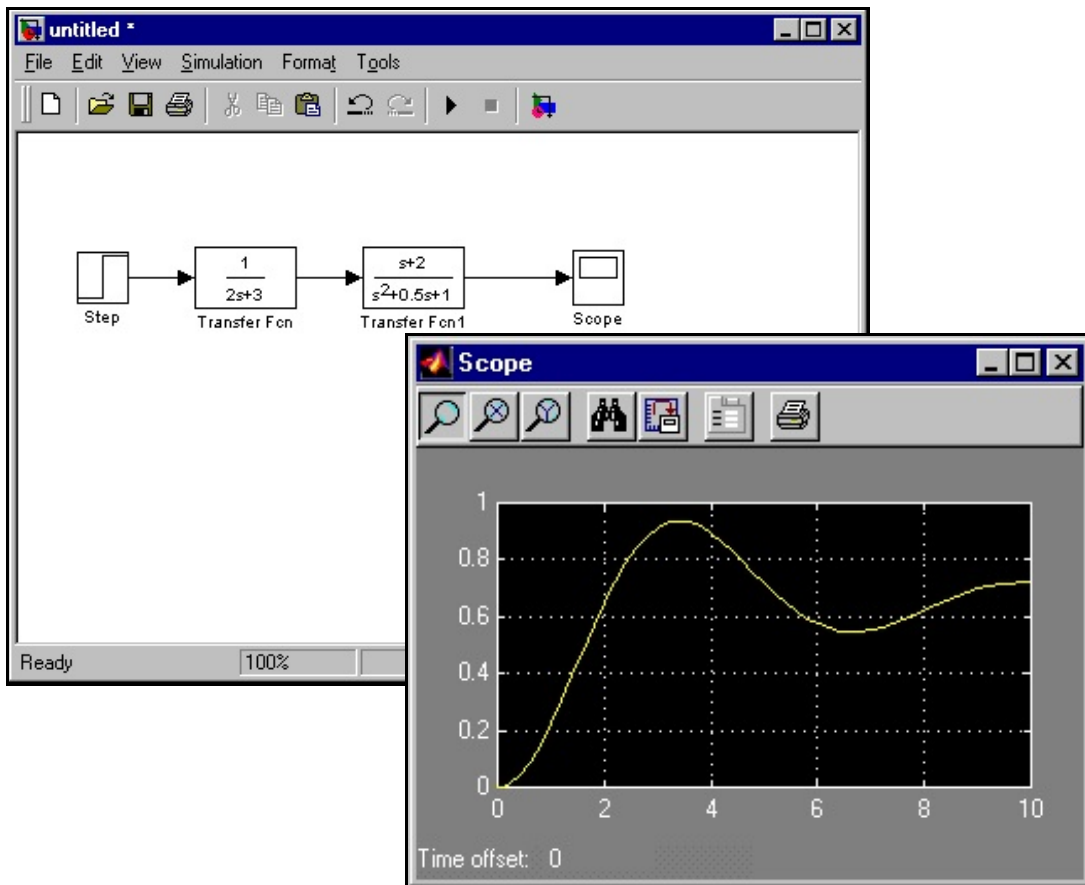
Die Eingangssignale können durch Signalblöcke erzeugt werden. Neben der Sprungfunktion sind auch Rampenfunktionen, zeitperiodische Funktionen und zufälliges Rauschen realisierbar.

Für die Präsentation der Ergebnisse steht eine Reihe von Diagramm-Generatoren bereit. Die erzeugten Diagramme lassen sich in ihrer Darstellung sehr flexibel den unterschiedlichen Sichtweisen anpassen.

Durch die Einbindung von Blöcken, die der Nutzer in der MATLAB-Sprache schreiben muss, ist das System auch sehr flexibel erweiterbar.

Es ist außerdem festzuhalten, dass Simulink auch für die Simulation des Verhaltens nichtlinearer Systeme geeignet ist.

- ▶ Beispiel
Die Reihenschaltung zweier Übertragungsglieder wird untersucht. Das Arbeitsblatt mit der Systemstruktur sowie das Ergebnis der Simulation, die Sprungantwort des Systems, sind in den folgenden Bildern dargestellt.

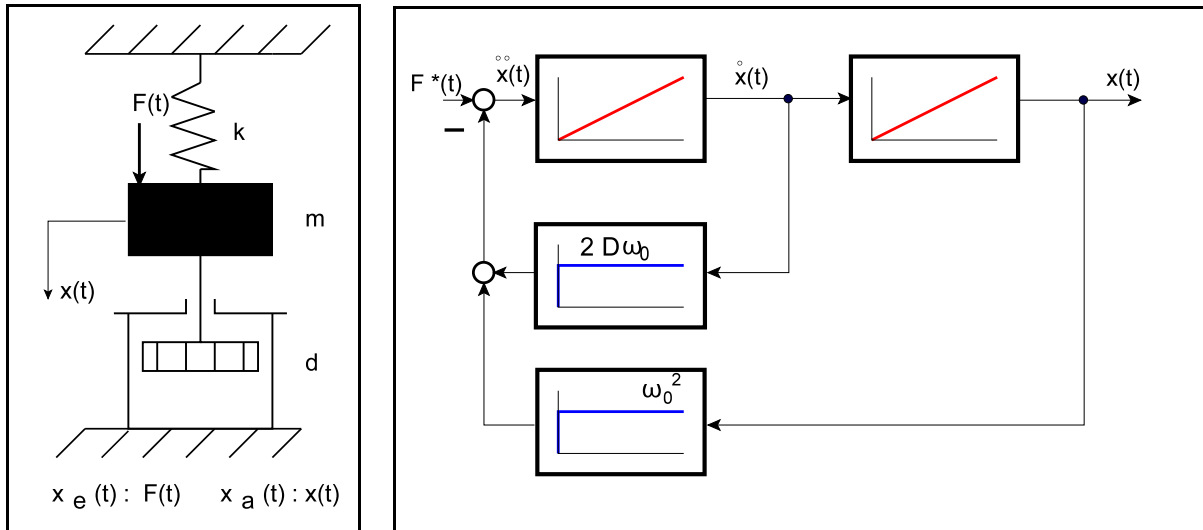


1.4.3 Die Diskussion des PT_2 -Verhaltens am Beispiel des mechanischen Feder-Masse-Systems mit Dämpfung

- Differentialgleichung und Signalflussplan
Das Feder-Masse-System mit Dämpfung lässt sich durch die folgende Differentialgleichung (Bewegungsgleichung) beschreiben (s. auch S. 4):

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \frac{dx}{dt} + x = F^*(t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad D = \frac{d}{2\sqrt{mk}}, \quad F^*(t) = \frac{F(t)}{m\omega_0^2}$$

In den folgenden Bildern sind Prinzipskizze und Signalflussplan gegeben:



- Diskussion der Lösung der Differentialgleichung (analytische Diskussion)
Das mechanische Feder-Masse-System mit Dämpfung weist PT_2 -Verhalten auf. Durch Einführung der Zeitkonstanten und des P-Übertragungsfaktors

$$T_1 = \frac{2D}{\omega_0}, \quad T_2^2 = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad K_p = \frac{1}{m \omega_0^2}$$

folgt die Differentialgleichung in der allgemeinen Form

$$T_2^2 \frac{d^2 x_a(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t) = K_p x_e(t)$$

Für diese Differentialgleichung ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Eigenwerte des Systems. Für die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung folgt:

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2^2}\right)^2 - \frac{1}{T_2^2}}$$

Das Verhältnis $\frac{T_1}{2T_2}$ ist gleich der Dämpfung D, woraus folgt

$$p_{1,2} = \frac{1}{T_2} \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right)$$

Die möglichen Lösungen für die homogene Differentialgleichung folgen aus der Diskussion der Eigenwerte. Vier Fälle sind zu unterscheiden:

Fall a): PT_1 -Verhalten:

$$T_2 = 0 \Rightarrow D \rightarrow \infty, \quad p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad x_{a_{\text{homo}}}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Fall b): Beide Eigenwerte sind reell und negativ ($p_{1,2} < 0$) - PT_2 -Verhalten:

$$T_1 > 2T_2 \Rightarrow D > 1, \quad x_{a_{\text{homo}}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$$

Fall c): Doppellösung $p_1 = p_2$ - aperiodischer Grenzfall - PT_2 -Verhalten:

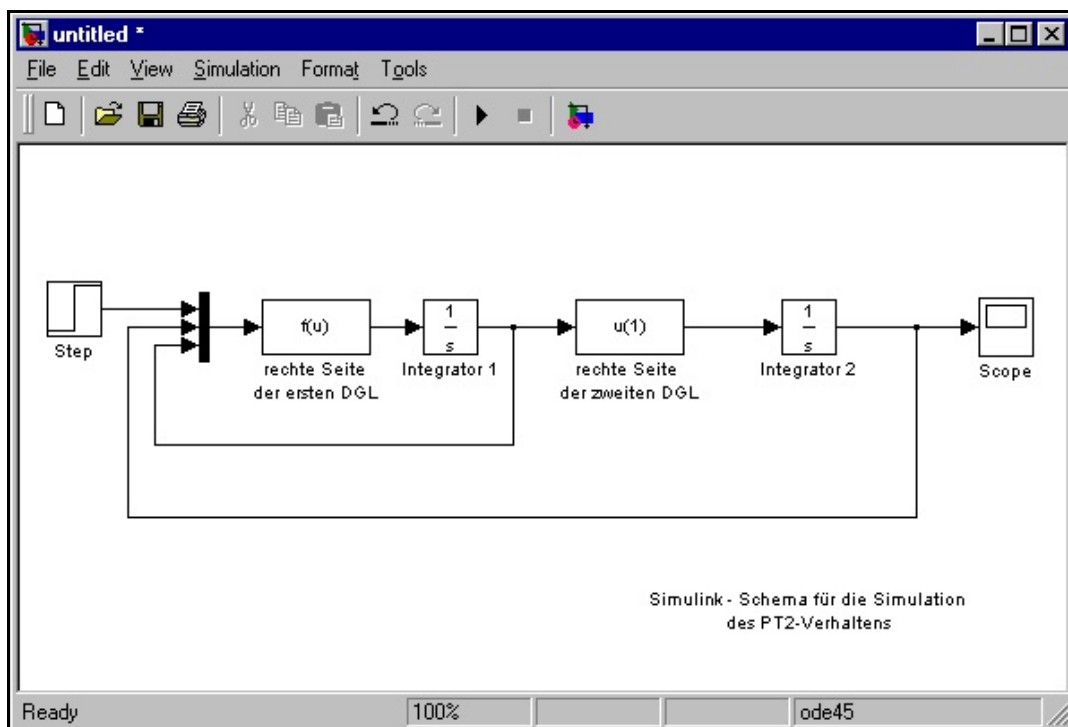
$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow D = 1, \quad p_1 = p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad x_{a_{\text{homo}}}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T_2}} + C_2 t e^{-\frac{t}{T_2}}$$

Fall d): Die Eigenwerte sind konjugiert komplex - Schwingungsglied:

$$T_1 < 2T_2 \Rightarrow 0 < D < 1, \quad p_{1,2} = \frac{1}{T_2} \left(-D \pm j\sqrt{1-D^2} \right) \text{ mit } \omega = \frac{1}{T_2} \sqrt{1-D^2}$$

$$x_{a_{\text{homo}}}(t) = e^{-\frac{Dt}{T_2}} \left(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \right)$$

- Simulation des Verhaltens mit Simulink im Zeitbereich
Im folgenden Schema ist die Simulink-Struktur für die Simulation des Verhaltens gegeben. Die Ähnlichkeit zum Signalfflussplan ist zu erkennen.

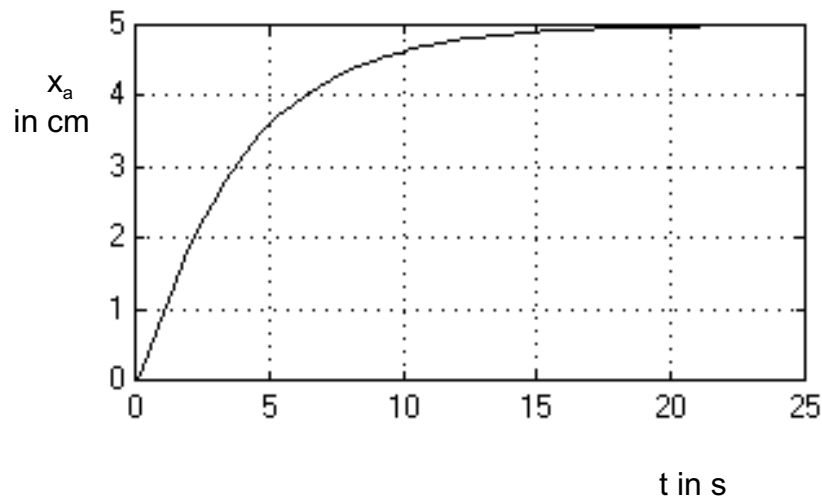


Man kann die Simulationsstruktur auch leicht aus der Zustandsdarstellung herleiten (s. S. 7, wobei im folgenden die Darstellung mit Zeitkonstanten herangezogen wird):

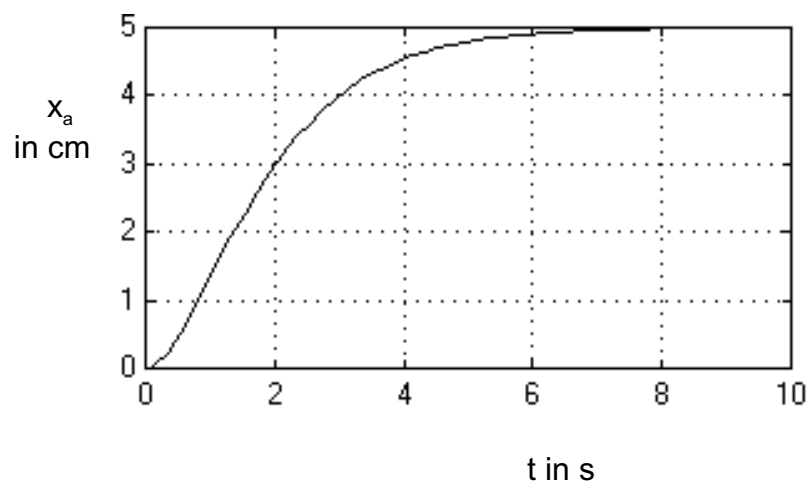
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{T_1}{T_2^2} & -\frac{1}{T_2^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p}{T_2^2} \\ 0 \end{bmatrix} x_e(t) \quad \text{mit} \quad x_1 = \frac{dx_a}{dt}, \quad x_2 = x_a$$

Die rechte Seite der ersten Differentialgleichung beschreibt den Eingang des ersten Integrators und die rechte Seite der zweiten den Eingang des zweiten Integrators. Die Anregung wird durch die Sprungfunktion realisiert, die auf der rechten Seite der ersten Differentialgleichung auftritt. Mit dieser Struktur lassen sich nun die unterschiedlichen Spezialfälle nachbilden. Die folgenden Bilder zeigen ausgewählte berechnete Sprungantworten (in allen Fällen mit $x_e = 0.01 \text{ N}$).

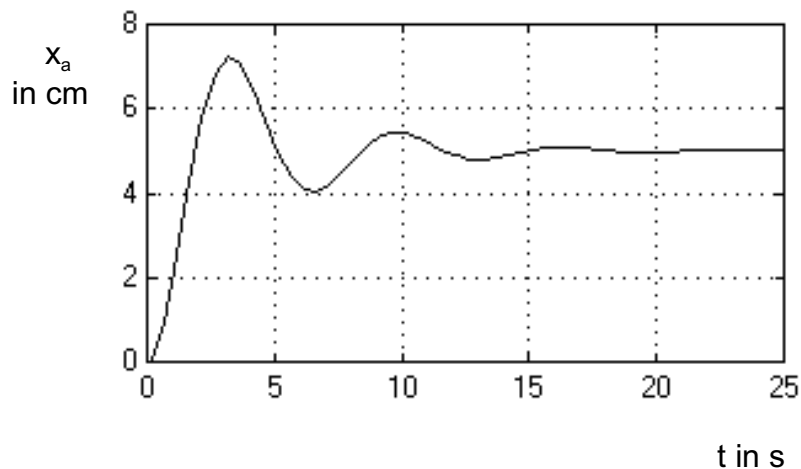
Fall b) $T_1 = 4 \text{ s}$, $T_2 = 1 \text{ s}$, $K_p = 5 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$



Fall c) $T_1 = 2 \text{ s}$, $T_2 = 1 \text{ s}$, $K_p = 5 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$



Fall d) $T_1 = 0.5 \text{ s}$, $T_2 = 1 \text{ s}$, $K_p = 5 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$



- Darstellung des Übertragungsverhaltens mit MATLAB im Frequenzbereich
Die Übertragungsfunktion für ein Übertragungsglied mit PT_2 - Verhalten ergibt sich zu:

$$G(p) = \frac{K_p}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2}$$

Für den Frequenzgang folgt dann:

$$G(j\omega) = \frac{K_p}{1 + T_1 j\omega - T_2^2 \omega^2}$$

Für die Amplitudenkennlinie folgt die Beziehung:

$$|G(j\omega)| = \hat{G}(\omega) = \frac{K_p}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}$$

Für die Phasenkennlinie folgt:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}\right)$$

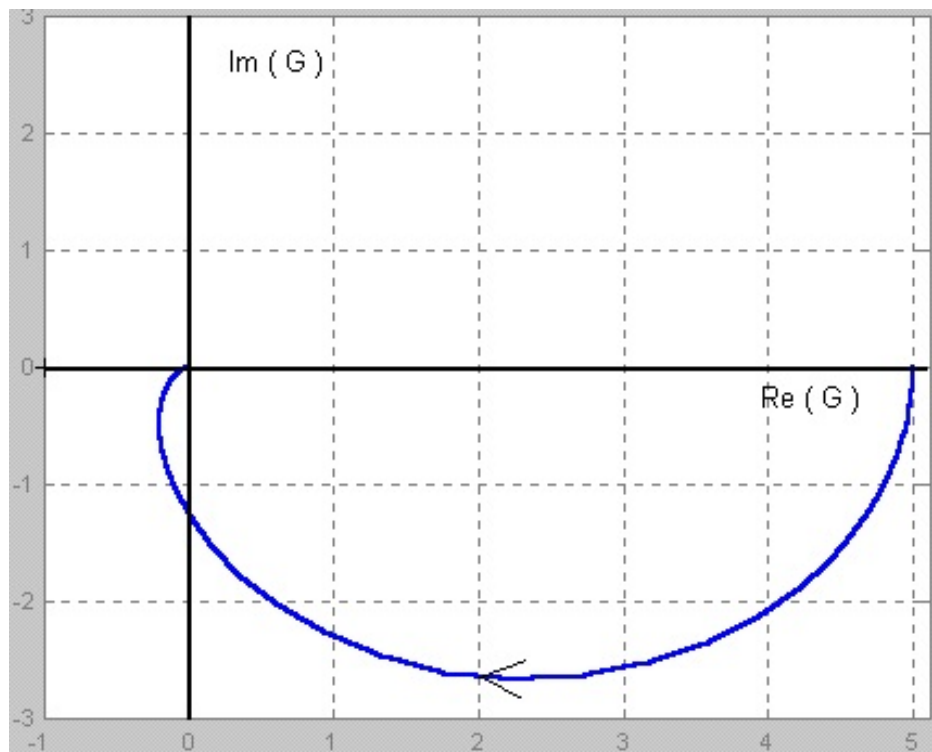
Für die im Zeitbereich bereits diskutierten Sonderfälle können nun die Kennfunktionen im Frequenzbereich dargestellt werden. Dafür lassen sich die im Abschnitt 1.4.2 eingeführten MATLAB-Funktionen nutzen. Vorbereitend dafür muss zunächst die Übertragungsfunktion definiert werden:

```

» T1=4;
» T2=1
» Kp=5;
» G=tf([Kp], [T2*T2 T1 1])
Transfer function:
      5
-----
s^2 + 4 s + 1
» nyquist(G)

```

Es wird ein Diagramm erzeugt, das die Ortskurve des Frequenzganges darstellt:



Mit dem Werkzeug *Itiview* lassen sich auch Diagramme erzeugen, die mehrere Ortskurven für unterschiedliche Parameter enthalten.

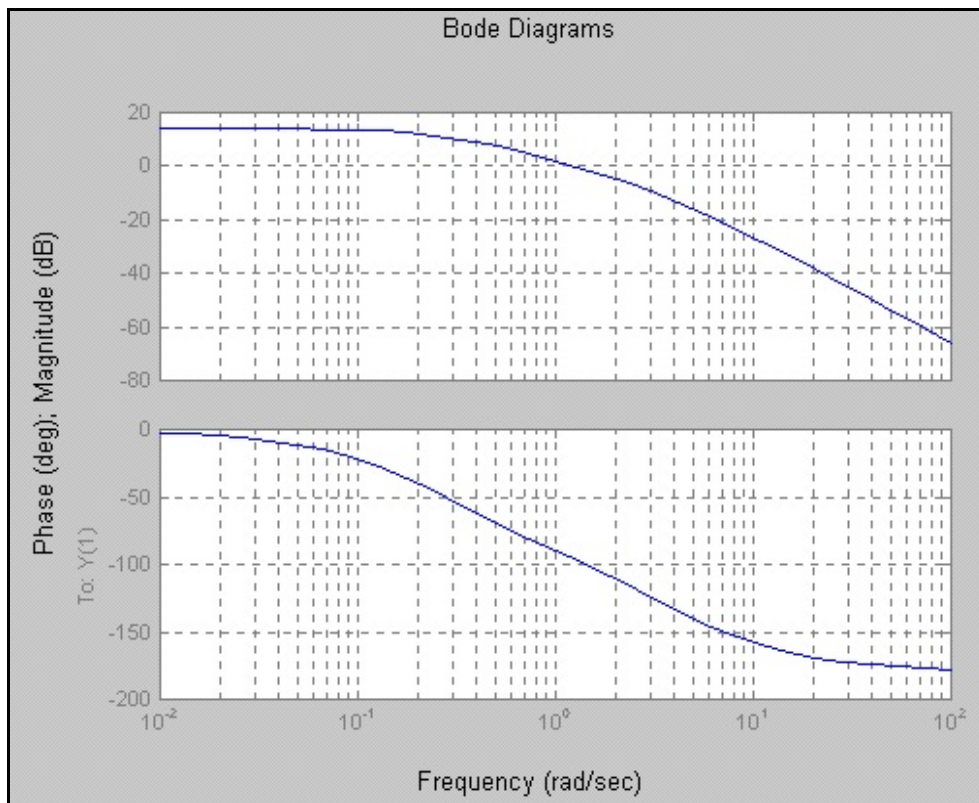
Die Amplituden- und Phasenkenlinien lassen sich mit der Funktion `bode` erzeugen. Die MATLAB-Anweisungen für den Fall b) lauten:

```

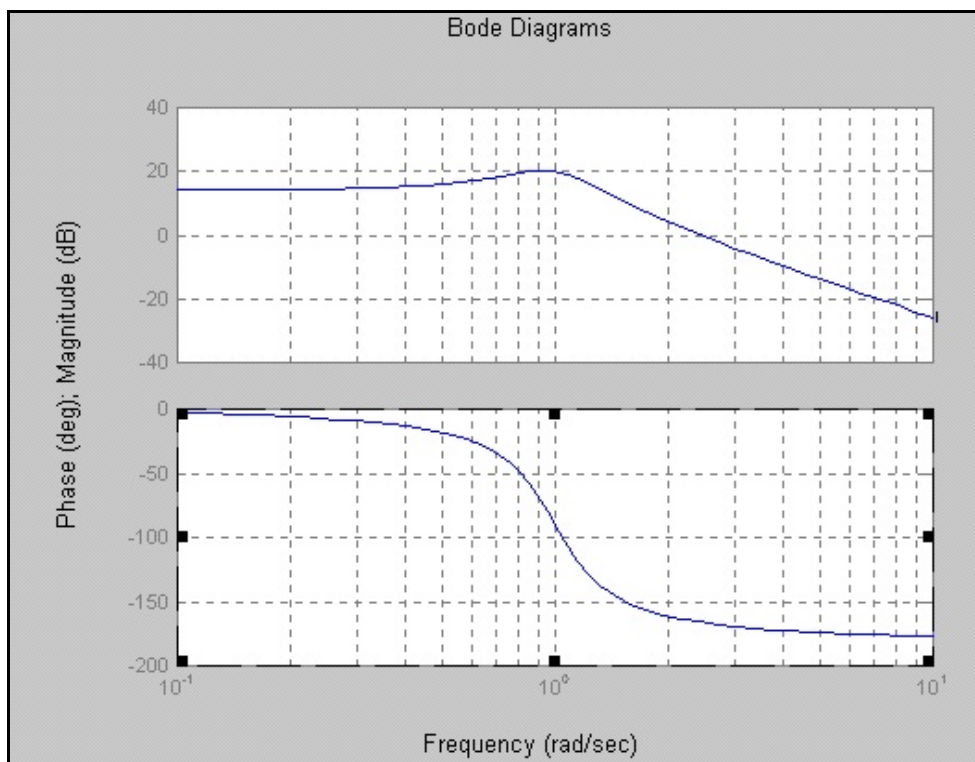
» T1=0.5;
» T2=1;
» Kp=5;
» G=tf([Kp], [T2*T2 T1 1])
» bode(G)

```

Es erscheint das folgende Diagramm:



Für den Fall d) des schwingungsfähigen Verhaltens ergibt sich das folgende Diagramm:



1.5 Ermittlung der mathematischen Modelle linearer Übertragungsglieder

1.5.1 Kennwertermittlung im Zeitbereich

● Überblick

Für die Ermittlung der mathematischen Modelle linearer Übertragungsglieder werden die Methoden der theoretischen und der experimentellen Prozessanalyse angewandt. Die theoretische Prozessanalyse verfolgt das Ziel, die mathematische Zustandsbeschreibung auf der Grundlage der physikalisch-chemischen Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen. Die experimentelle Prozessanalyse gewinnt die mathematische Beschreibung des Übertragungsverhaltens durch Auswertung experimentell gewonnener Signalverläufe für die Ein- und Ausgangssignale.

Durch experimentelle Prozessanalyse sind zwei Problemstellungen zu lösen:

- Wie ist der Modellansatz zu wählen?
- Wie sind die Parameter in den Modellansätzen aus gemessenen Signalverläufen zu bestimmen?

Mathematische Verfahren, die beide Probleme im Zusammenhang lösen, werden als **Identifikationsverfahren** bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass der Modellansatz bekannt ist, muss lediglich das Problem der Parameterschätzung gelöst werden. Man nennt die Lösung dieser Aufgabe auch **Kennwertermittlung**. Dabei gibt es zwei Ansätze:

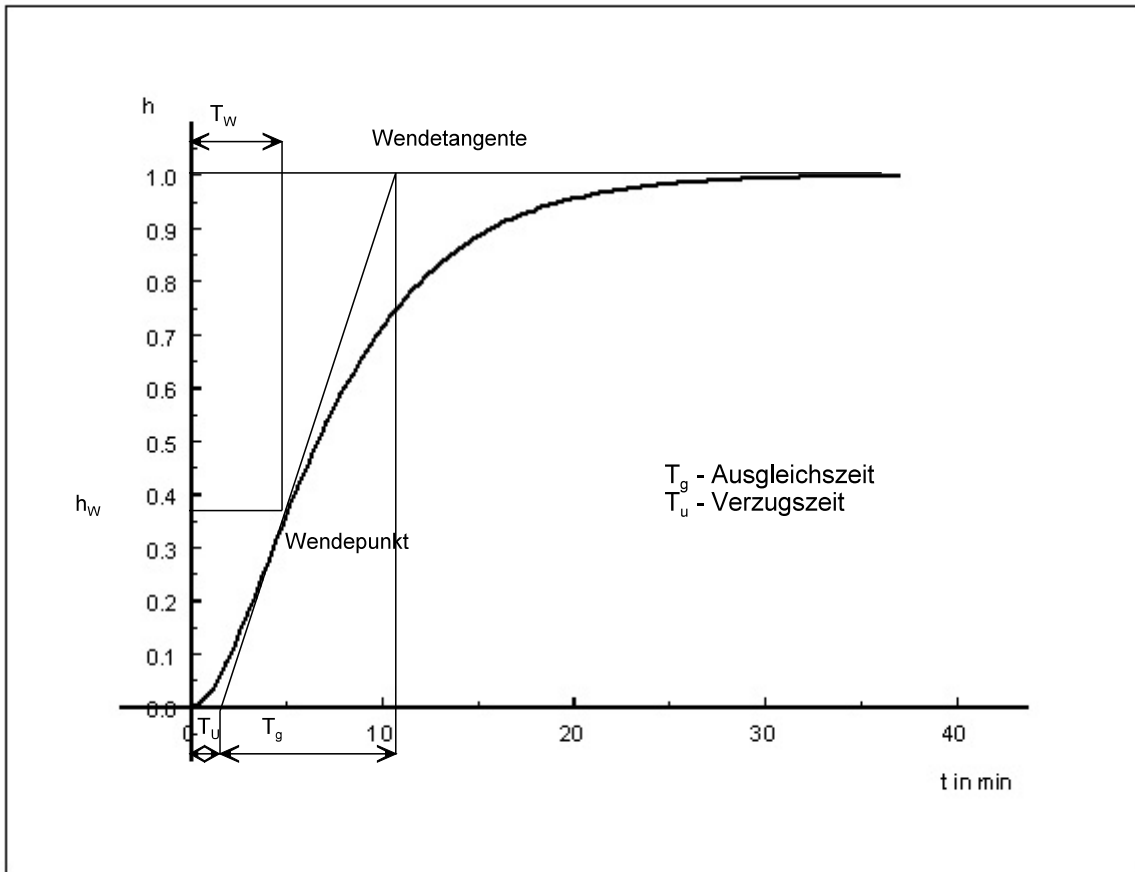
- Es wird vorausgesetzt, dass die Ausgangssignale ungestört gemessen werden. Es lassen sich dann **grafische Verfahren** (z.B. die Tangentenmethode für die Ermittlung der Zeitkonstanten bei Verzögerungsverhalten 1. Ordnung) und **grafo-analytische Verfahren** (z.B. die Wendetangentenmethode) entwickeln.
- Es wird davon ausgegangen, dass das Ausgangssignal von einem Störsignal verfälscht wird. Unter bestimmten Voraussetzungen über das Störsignal kann man davon ausgehen, dass die beste Schätzung der unbekannt Parameter sich ergibt, wenn die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den gemessenen Signalwerten und den durch das Modell berechneten Werten ein Minimum annimmt (Prinzip der Kleinsten Fehlerquadrate).

● Bestimmung der Kennwerte eines aperiodischen P-Übertragungsgliedes mit Verzögerungsverhalten n-ter Ordnung (PT_n - Verhalten)

Grundlage der Kennwertbestimmung ist die Konstruktion der Wendetangente. Im folgenden Bild sind die wesentlichen Parameter, die bei dieser Konstruktion auftreten, angegeben.

In den folgenden Darstellungen ist mit $h(t)$ immer die normierte Übergangsfunktion gemeint:

$$h(t) = \frac{h_{\text{unnormiert}}(t)}{h_{\text{unnormiert}}(\infty)}$$



Es haben sich folgende Modellansätze bewährt ¹:

- Modellansatz mit zwei unterschiedlichen Zeitkonstanten
- Modellansatz mit n gleichen Zeitkonstanten
- Modellansatz mit n harmonisch gestaffelten Zeitkonstanten

□ **Approximation durch ein Modell mit zwei unterschiedlichen Zeitkonstanten**

Der Ansatz für die Übertragungsfunktion lautet (ohne Berücksichtigung des Totzeitanteils):

$$G(p) = \frac{K_P}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$$

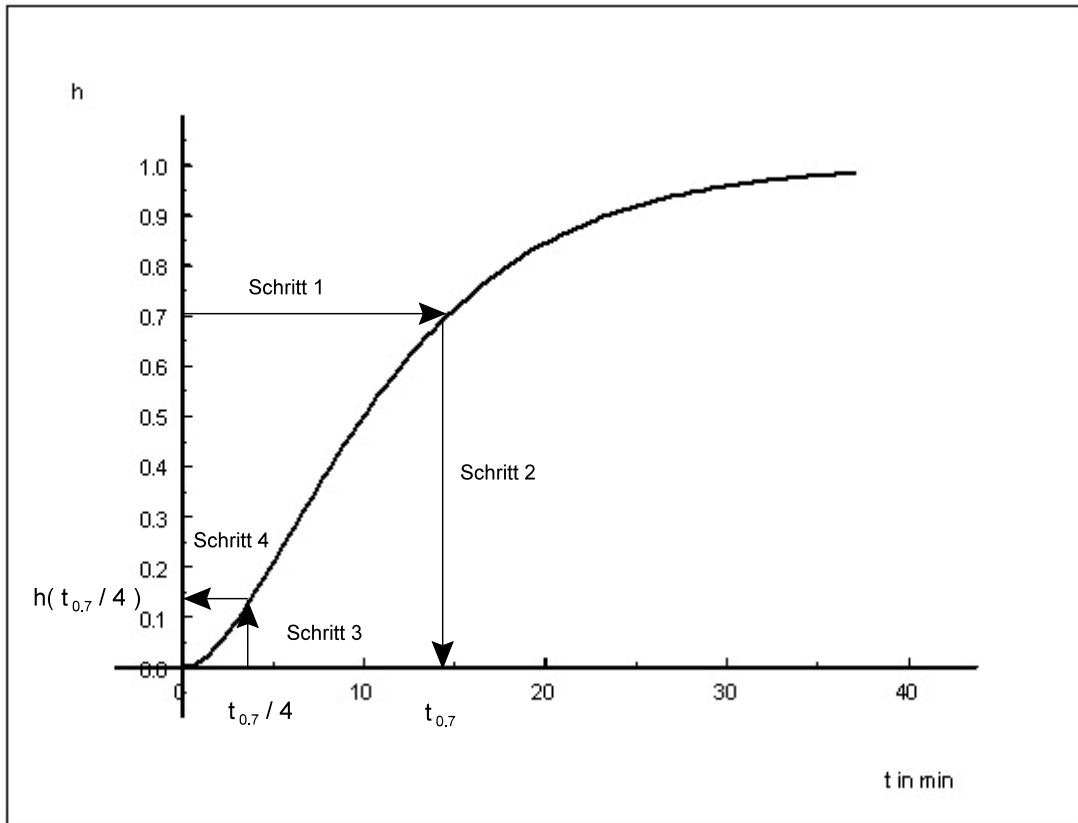
Dieser Modelltyp kann dann herangezogen werden, wenn $h_w \leq 0.264$ und $\frac{T_u}{T_g} \leq 0.104$ gilt.

¹S. hierzu: Wernstedt, J. "Experimentelle Prozessanalyse" Verlag Technik, Berlin, 1990

Die Bestimmung der Zeitkonstanten läuft in folgenden Schritten ab:

- ▶ Aus der Übergangsfunktion werden die Parameter $t_{0.7}$ und $h\left(\frac{t_{0.7}}{4}\right)$ bestimmt.

Diese Bestimmung ist dem folgenden Diagramm zu entnehmen:



- ▶ Aus der nachfolgenden Tabelle ist das Verhältnis $\frac{T_2}{T_1}$ zu entnehmen:

$h\left(\frac{t_{0.7}}{4}\right)$	$\frac{T_2}{T_1}$
0.260	0.0
0.200	0.1
0.174	0.2
0.150	0.3

0.135	0.4
0.131	0.5
0.126	0.6
0.125	0.7
0.124	0.8
0.123	0.9

- ▶ Bestimmung von T_1 nach folgender Beziehung:

$$T_1 = \frac{t_{0.7}}{1.2 \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right)}$$

- ▶ Bestimmung des P-Übertragungsfaktors (gilt auch für die nachfolgenden Modelle):

$$K_p = h(\infty)$$

Die normierte Übergangsfunktion lässt sich wie folgt darstellen:

$$h(t) = 1 - \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}$$

□ Approximation durch ein Modell mit n gleichen Zeitkonstanten

Diese Approximation ist dann heranzuziehen, wenn $h_w > 0.264$ und $\frac{T_u}{T_g} > 0.104$ ist.

Für die Übertragungsfunktion gilt folgender Ansatz:

$$G(p) = \frac{K_p}{(1 + pT)^n}$$

Die Bestimmung der Ordnung n und der Zeitkonstanten T läuft in folgenden Schritten ab:

- ▶ Ermittlung des Verhältnisses $\frac{T_u}{T_g}$ bzw. h_w aus der Wendetangentenkonstruktion.

- ▶ Bestimmung der Ordnung und der Zeitkonstanten aus der folgenden Tabelle:

n	$\frac{T_u}{T_g}$	h_w	$\frac{T_w}{T}$	$\frac{T_u}{T}$	$\frac{T_g}{T}$
1	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
2	0.104	0.264	1.000	0.282	2.718
3	0.218	0.323	2.000	0.805	3.695
4	0.319	0.353	3.000	1.425	4.463
5	0.410	0.371	4.000	2.100	5.119
6	0.493	0.384	5.000	2.811	5.699
7	0.570	0.394	6.000	3.549	6.226
8	0.642	0.401	7.000	4.307	6.711

Für die normierte Übergangsfunktion gilt:

$$h(t) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^i}{i!} \right] e^{-\frac{t}{T}}$$

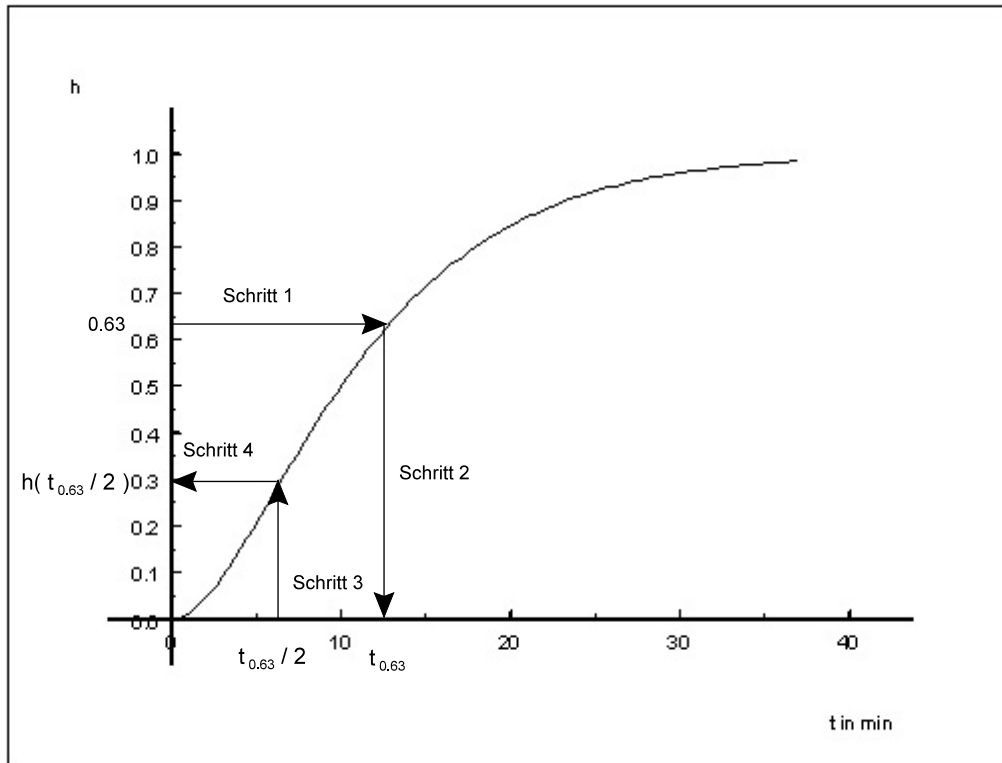
- **Approximation durch ein Modell mit harmonisch gestaffelten Zeitkonstanten**

Dieses Modell ist heranzuziehen, wenn die oben diskutierten Modelle keine befriedigende Annäherung liefern. Die Übertragungsfunktion lässt sich durch folgenden Ansatz beschreiben:

$$G(p) = \frac{K_p}{\prod_{i=1}^n \left(1 + p \frac{T}{i} \right)}$$

Die Ordnung n und die Zeitkonstante T lassen sich in folgenden Schritten ermitteln:

- ▶ Es werden die Parameter $t_{0.63}$ und $h\left(\frac{t_{0.63}}{2}\right)$ aus der normierten Übergangsfunktion wie folgt bestimmt:



- ▶ Aus der folgenden Tabelle lassen sich die Ordnung und eine Hilfsgröße entnehmen:

n	$h(t_{0.63}/2)$	D(n)
1	0.392	0.957
2	0.299	0.638
3	0.242	0.522
4	0.202	0.459
5	0.173	0.419
6	0.149	0.391
7	0.129	0.368
8	0.116	0.352
9	0.103	0.338
10	0.093	0.326

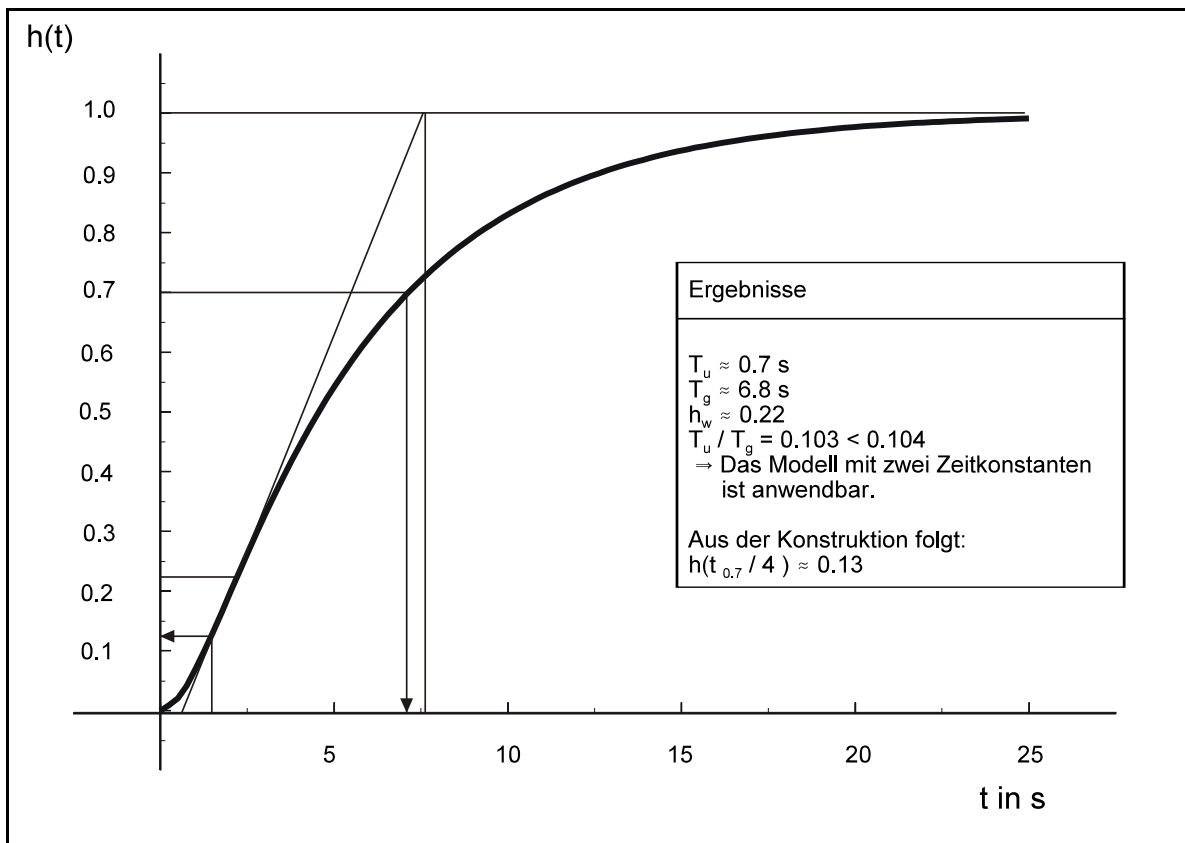
- Die Zeitkonstante T wird nach folgender Beziehung berechnet:

$$T = \frac{t_{0.63}}{1.045 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}} = t_{0.63} D(n)$$

Für die normierte Übergangsfunktion gilt:

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)^n$$

- Beispiel
Es wurde die folgende Übergangsfunktion bestimmt :



Mit den ermittelten Parametern ergeben sich folgende Zeitkonstanten:

$$h\left(\frac{t_{0.7}}{4}\right) = 0.13 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} \approx 0.5$$

$$t_{0.7} \approx 7.2 \text{ s} \Rightarrow T_1 = 4.0 \text{ s} \text{ und } T_2 = 2.0 \text{ s}$$

1.5.2 Kennwertermittlung im Frequenzbereich

Vorbemerkung zur Darstellung der Ortskurven:

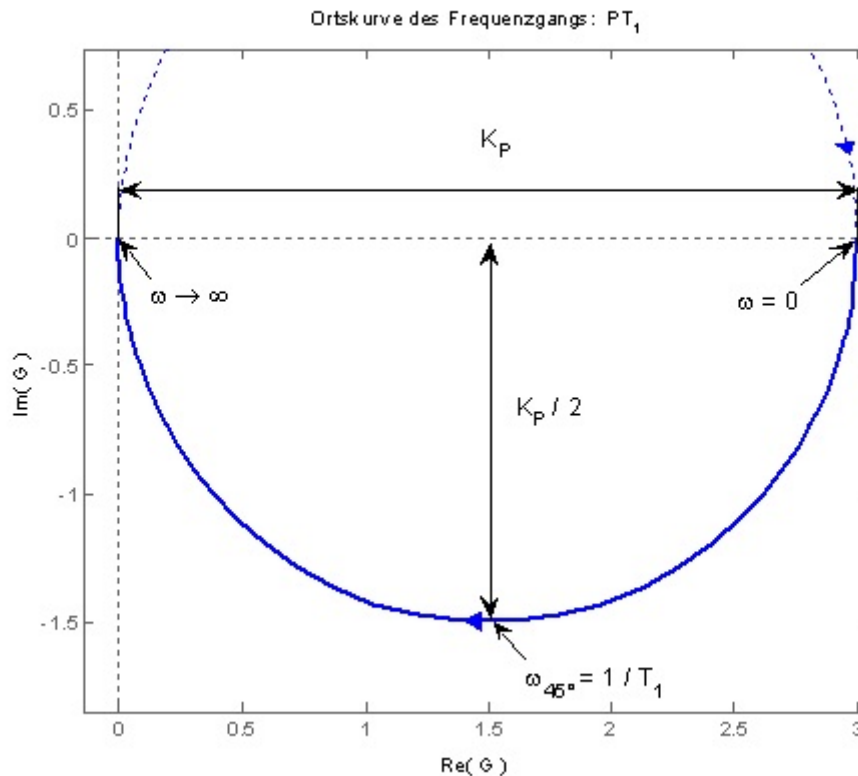
Die nachfolgenden grafischen Darstellungen der Ortskurven wurden mit der MATLAB-Funktion `nyquist` erzeugt. Das hat zur Folge, dass nicht nur die Ortskurven für positive Frequenzen (durchgezogene Kurvenabschnitte) sondern auch für negative Frequenzen (punktierter Kurvenabschnitte) teilweise dargestellt werden. Außerdem ist zu beachten, dass mitunter die Achsen unterschiedlich skaliert (s. Maßstab) werden.

□ PT_1 -Verhalten

Die Kennwerte eines PT_1 -Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{1 + T_1 j\omega}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



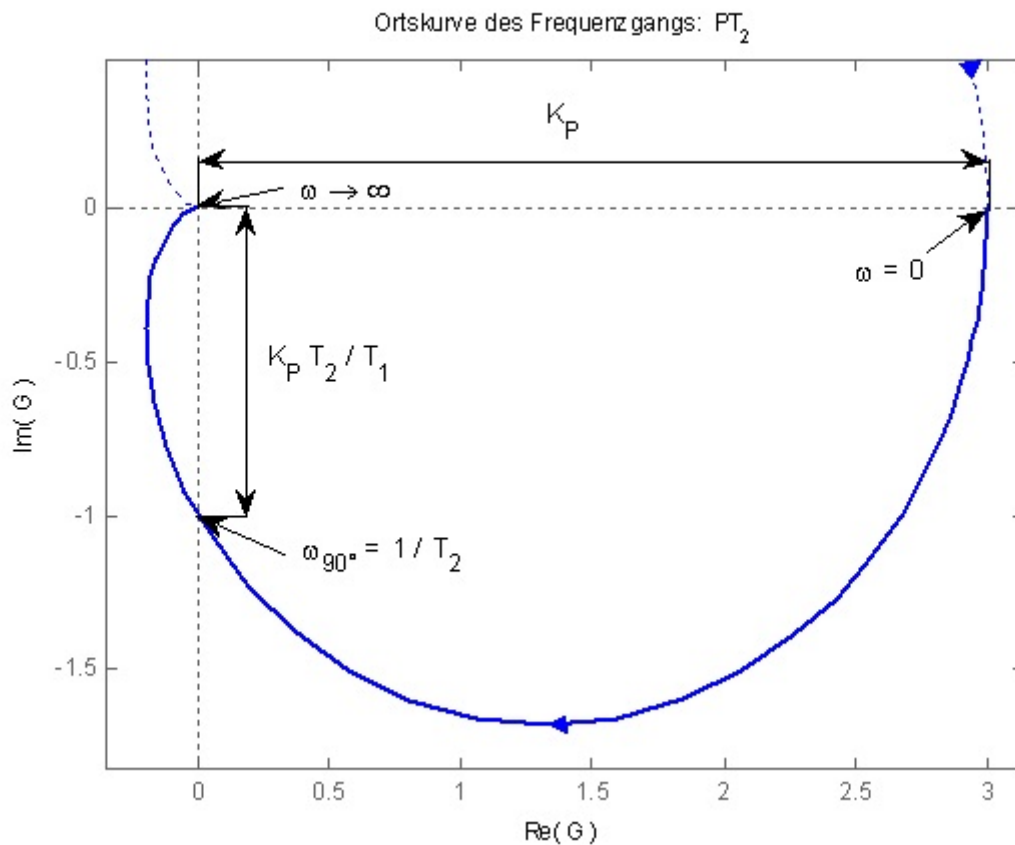
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	K_P	0
$1/T_1$	$K_P/2$	$-K_P/2$
∞	0	0

□ PT₂-Verhalten

Die Kennwerte eines PT₂-Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



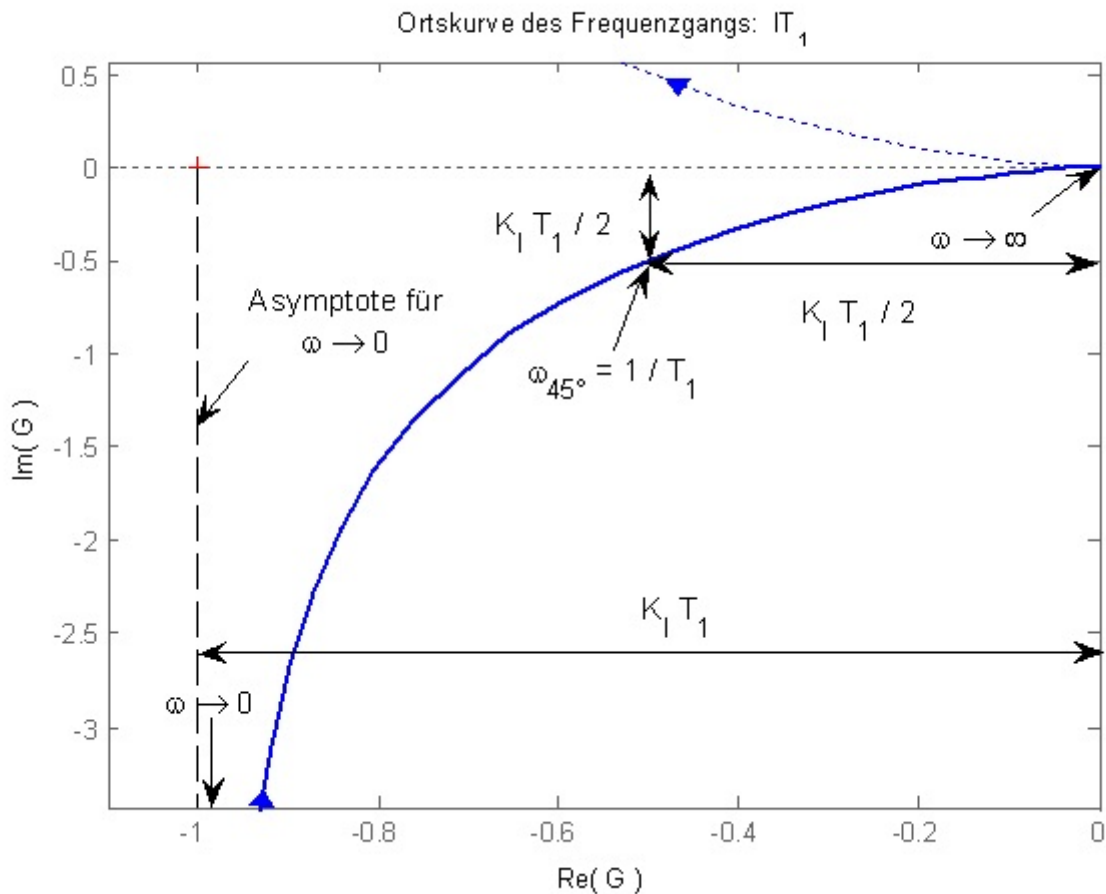
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	K_P	0
$1 / T_2$	0	$-K_P \frac{T_2}{T_1}$
∞	0	0

□ IT_1 - Verhalten

Die Kennwerte eines IT_1 -Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega(1 + T_1 j\omega)}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



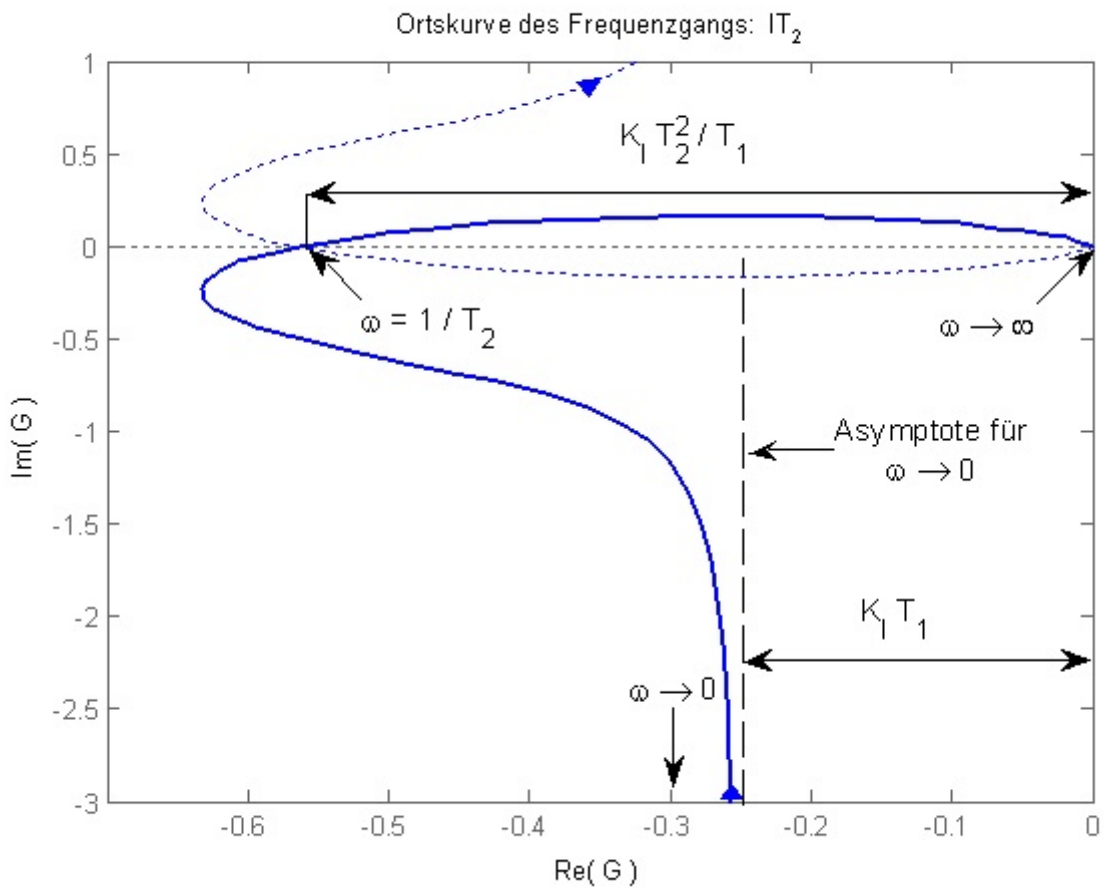
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	$-K_1 T_1$	$-\infty$
$1/T_1$	$-\frac{1}{2} K_1 T_1$	$-\frac{1}{2} K_1 T_1$
∞	0	0

□ IT_2 - Verhalten

Die Kennwerte eines IT_2 -Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega [1 + T_1 j\omega + T_2^2 (j\omega)^2]}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



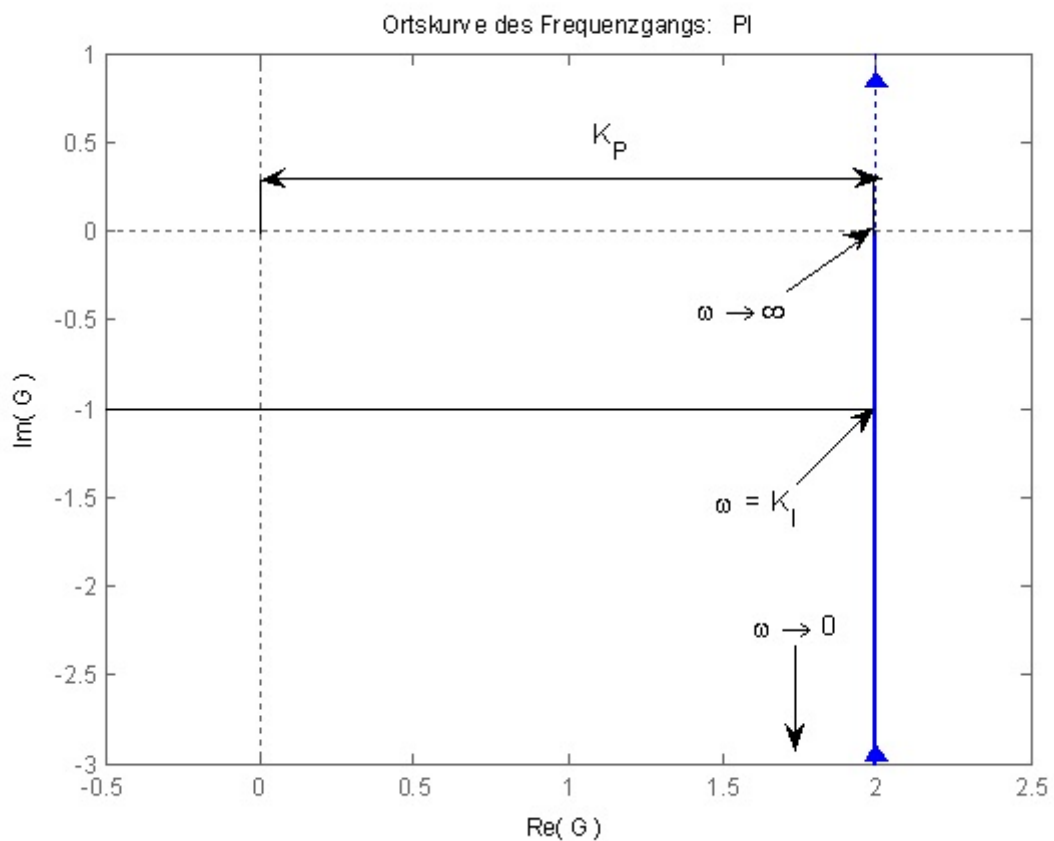
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	$-K_I T_1$	$-\infty$
$1/T_2$	$-\frac{K_I T_2^2}{T_1}$	0
∞	0	0

□ PI - Verhalten

Die Kennwerte eines PI-Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = K_p + \frac{K_i}{j\omega}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



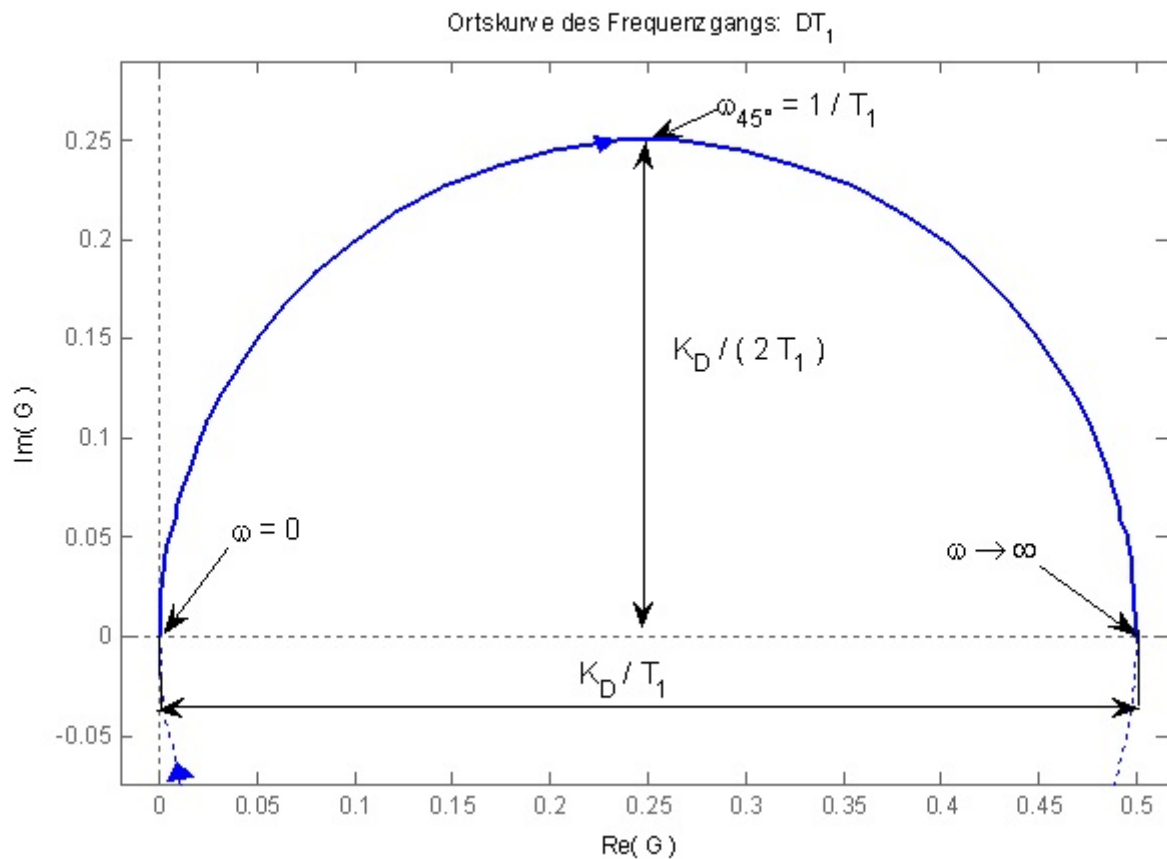
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	K_p	$-\infty$
K_i	K_p	-1
∞	K_p	0

□ DT_1 - Verhalten

Die Kennwerte eines DT_1 -Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{1 + T_1 j\omega}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



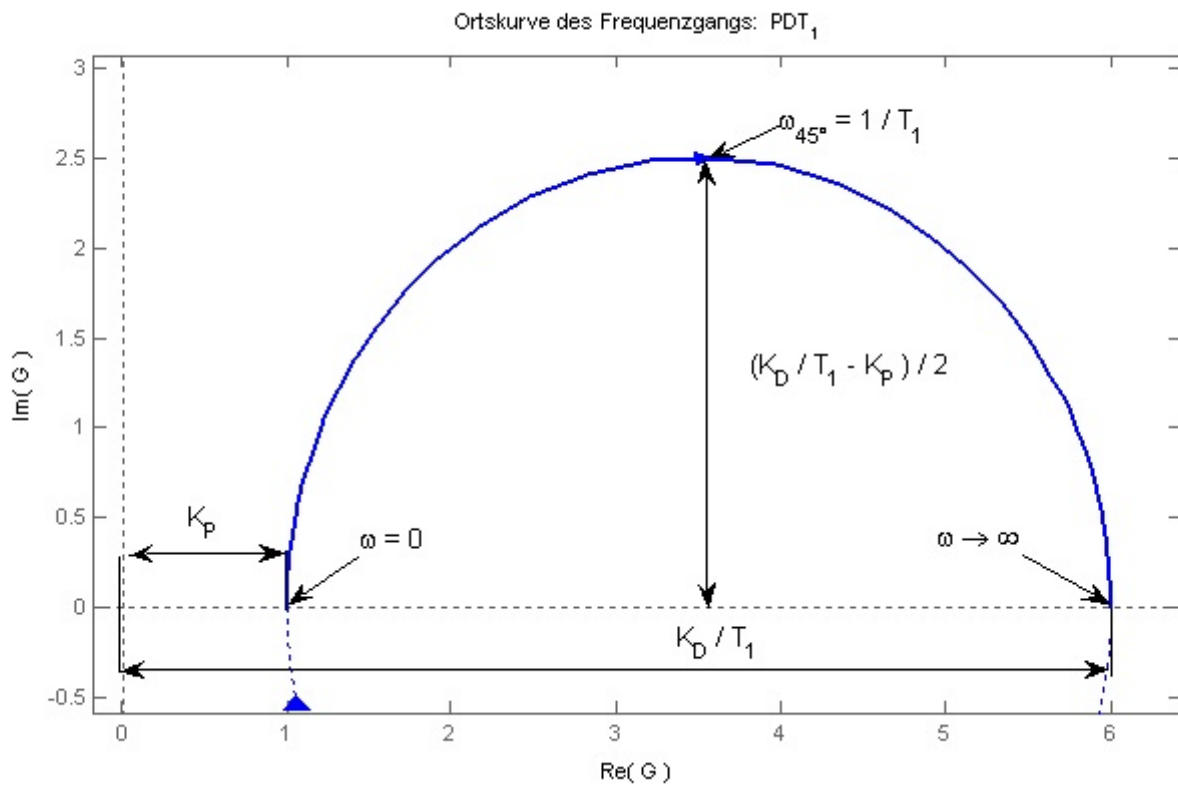
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	0	0
$\frac{1}{T_1}$	$\frac{K_D}{2T_1}$	$\frac{K_D}{2T_1}$
∞	$\frac{K_D}{T_1}$	0

□ PDT₁ - Verhalten

Die Kennwerte eines PDT₁-Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = \frac{K_P + K_D j\omega}{1 + T_1 j\omega}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar:



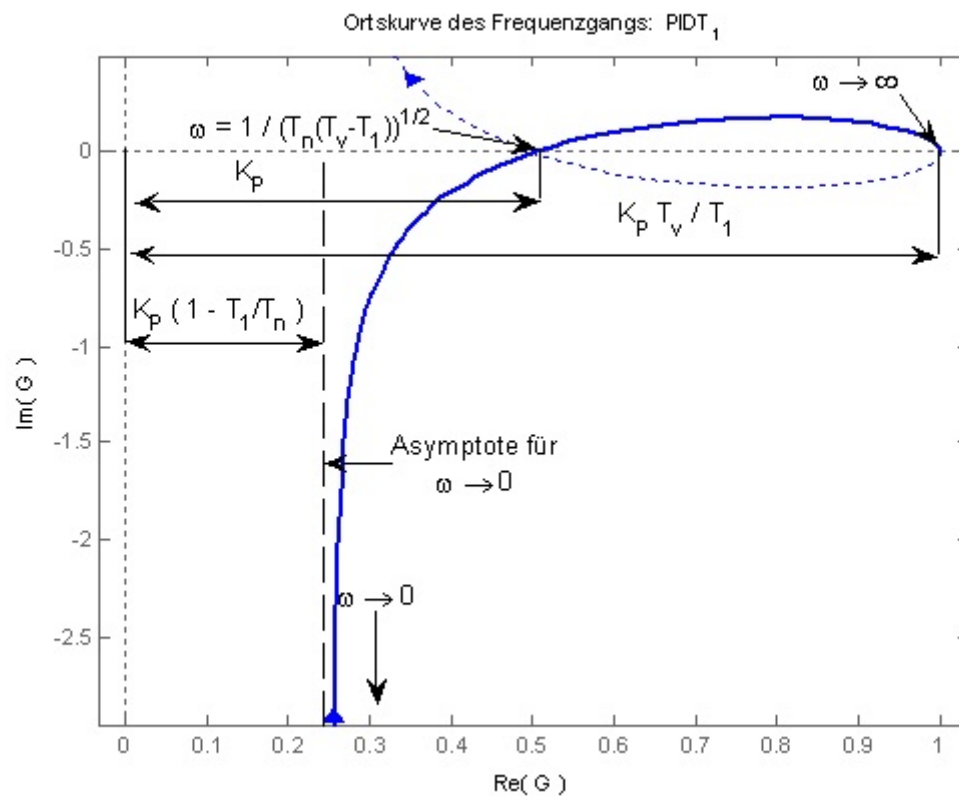
ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	K_P	0
$\frac{1}{T_1}$	$\frac{\frac{K_D}{T_1} + K_P}{2}$	$\frac{\frac{K_D}{T_1} - K_P}{2}$
∞	$\frac{K_D}{T_1}$	0

□ PIDT₁ - Verhalten

Die Kennwerte eines IT₂-Übertragungsgliedes, dessen Frequenzgang durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$G(j\omega) = K_p \frac{1 + \frac{1}{T_n j\omega} + T_v j\omega}{1 + T_1 j\omega}$$

lassen sich aus der Ortskurvendarstellung ermitteln; die folgende Abbildung stellt die Zusammenhänge dar



ω	$\text{Re}(G)$	$\text{Im}(G)$
0	$K_p \left(1 - \frac{T_1}{T_n} \right)$	$-\infty$
$\frac{1}{\sqrt{T_n(T_v - T_1)}}$	K_p	0
∞	$K_p \frac{T_v}{T_1}$	0

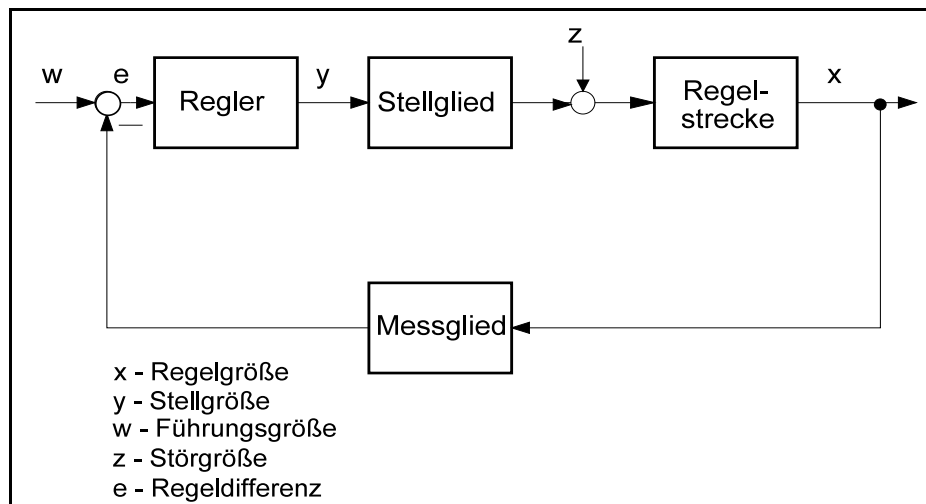
2. Der lineare Regelkreis

2.1 Die Struktur des Regelkreises

- **Einführung**

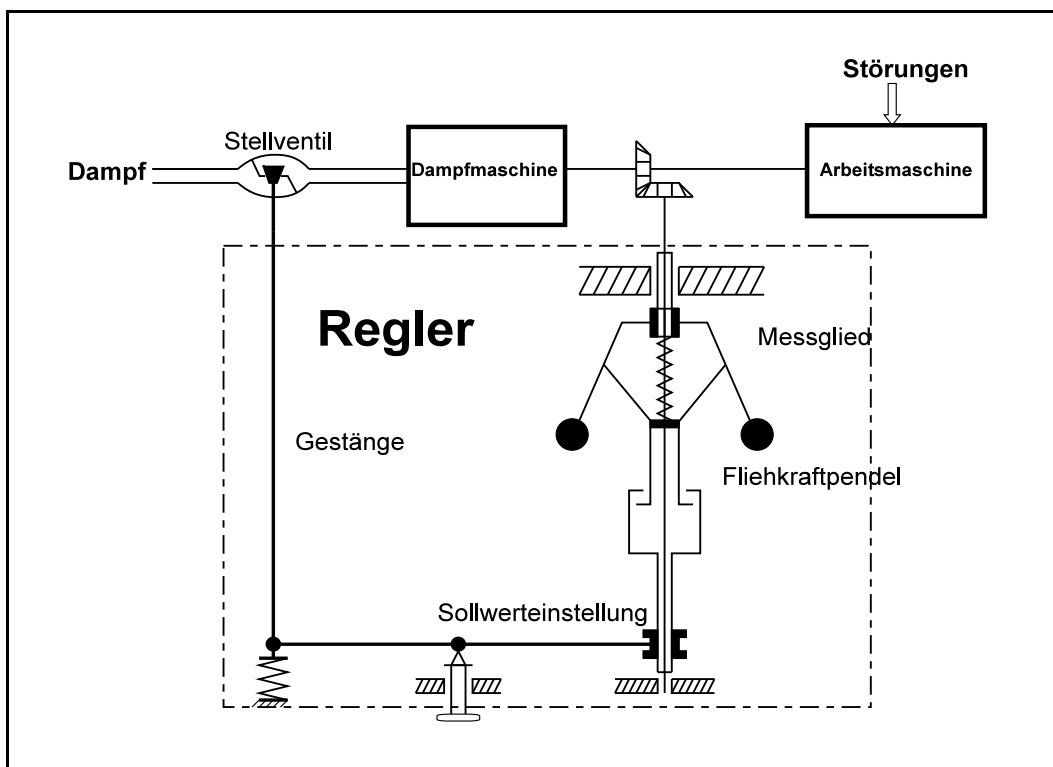
Die Regelung ist eine geschlossene Steuerung, bei der durch Rückführung die Regelgröße ständig mit der Führungsgröße verglichen wird; aus diesem Vergleich wird die Stellmaßnahme abgeleitet, die der Abweichung entgegenwirkt, so dass trotz Störung die Regelgröße sich der Führungsgröße angleicht.

Regelungen sind durch einen geschlossenen Wirkungskreis (s. folgendes Bild), der als Regelkreis bezeichnet wird, gekennzeichnet.



Struktur des einschleifigen Regelkreises

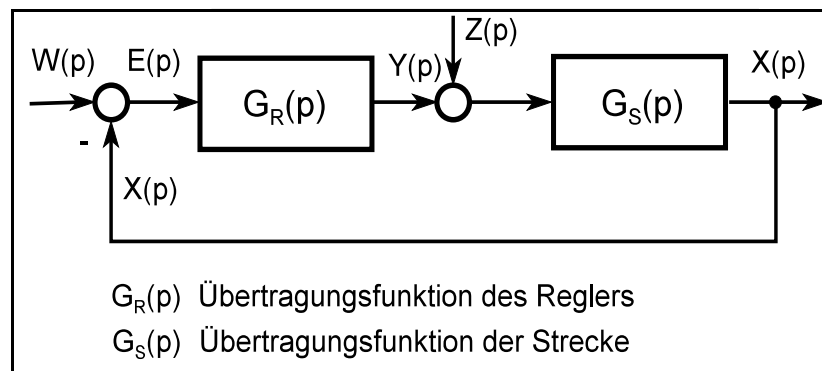
- ▶ Ein historisches Beispiel: Drehzahlregler nach J. Watt



Korrespondenz zum Beispiel:

Größe	Symbol	Zuordnung zum Beispiel
Regelgröße	x	Drehzahl der Arbeitsmaschine
Stellgröße	y	Stellung des Ventils für die Dampfversorgung
Führungsgröße	w	Position der Stellschraube
Störgröße	z	Laständerung der Arbeitsmaschine
Regler		Hebelsystem
Regelstrecke		Arbeitsmaschine
Messglied		Fliehkraftpendel
Stellglied		Dampfventil

- Grundgleichung des Regelkreises und spezielle Übertragungsfunktionen
Wenn man das Übertragungsverhalten des Messgliedes und des Stellgliedes in das Übertragungsverhalten des Reglers integriert, so kann man den folgenden Signalflussplan für den Regelkreis angeben:



Aus diesem Plan lassen sich folgende Beziehungen sofort herleiten:

$$G_R(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} \quad G_S(p) = \frac{X(p)}{Y(p) + Z(p)}$$

$$X(p) = G_S(p)(Z(p) + Y(p))$$

$$Y(p) = G_R(p)E(p) = G_R(p)(W(p) - X(p))$$

Nach einer kurzen Rechnung folgt:

$$X(p) = \frac{Z(p)G_S(p) + W(p)G_R(p)G_S(p)}{1 + G_R(p)G_S(p)} \quad (2.1)$$

Die Gleichung (2.1) erlaubt damit, die LAPLACE-Transformierte der Regelgröße aus den LAPLACE-Transformierten der Eingangssignale (Stör- und Führungsgröße) und den Übertragungsfunktionen für Regler und Strecke zu bestimmen. Das Produkt $G_0(p) = G_R(p) G_S(p)$ ist die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises.

Da es sich um ein lineares System handelt und somit das Superpositionsprinzip gilt, können die Wirkungen der beiden Eingangssignale unabhängig voneinander diskutiert werden:

- Es gelte $Z(p) = 0$; dann kann die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises wie folgt eingeführt werden:

$$G_W(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_R(p) G_S(p)}{1 + G_R(p) G_S(p)} \quad (2.2)$$

- Es gelte $W(p) = 0$; dann kann die Störübertragungsfunktion des Regelkreises wie folgt eingeführt werden:

$$G_Z(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} = \frac{G_S(p)}{1 + G_R(p) G_S(p)} \quad (2.3)$$

Diese Funktionen können herangezogen werden, um das Verhalten des Regelkreises bei Störungen bzw. bei Führungsgrößenänderungen zu untersuchen.

2.2 Reglertypen

2.2.1 Klassifikation

Regler lassen sich nach unterschiedlichen Aspekten klassifizieren. Eine Einteilung, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, ist die nachfolgende:

◆ **Einteilung nach Bereitstellung der Betriebsenergie:**

- Regler mit Hilfsenergie
- Regler ohne Hilfsenergie

◆ **Einteilung nach dem Betriebsmittel:**

- elektrische
- pneumatische Regler (auch Kombinationen sind möglich)
- hydraulische

◆ **Einteilung nach dem physikalischen Charakter der Regelgröße:**

- Temperaturregler
- Drehzahlregler
- Durchsatzregler / usw.

◆ **Einteilung nach den Systemeigenschaften:**

- Spezialregler sind nur für bestimmte Regelgrößen geeignet
- Universalregler sind in ihrem Einsatz unabhängig von der Regelgröße
- Kompaktregler alle Reglerbaugruppen sind in einem Gehäuse untergebracht
- Einheitsregler alle E/A-Kanäle arbeiten mit Einheitssignalen
(Einheitsspannungssignal: 0..10 V
Einheitsstromsignal: 4 .. 20 mA
Einheitsdrucksignal: 0.02 .. 0.1 Mpa)

◆ **Einteilung nach der Auflösung der Zeit und der Regelgröße:**

- analoge Regler (Zeit und Regelgröße sind kontinuierliche Größen)
- digitale Regler (Zeit ist diskrete Größe; die Regelgröße wird abgetastet)
 - = digitale Regler mit kontinuierlicher Regelgröße
 - = digitale Regler mit diskreter Regelgröße

◆ **Einteilung nach dem Übertragungsverhalten:**

- P-Verhalten
- PI-Verhalten
- PD-Verhalten
- PID-Verhalten
- Regler mit höherem Übertragungsverhalten

◆ **Einteilung nach Diskretisierung der Stellgröße:**

- Stetigregler
- Unstetigregler
 - = Zweipunktverhalten
 - = Dreipunktverhalten
 - = Quasistetige Regler

2.2.2 Übertragungsverhalten der Übertragungsglieder des Regelkreises

● **Übertragungsverhalten der Regler**

Im folgenden werden ausgewählte Reglertypen zusammengestellt, die sich im Übertragungsverhalten unterscheiden. Dabei werden wichtige Grundtypen behandelt; kompliziertere Verhaltensweisen lassen sich durch komplexere Schaltungen dieser Grundtypen erzeugen.

◆ *P-Verhalten*

Das Übertragungsverhalten des P-Reglers ist durch folgende Funktionen im Zeit- und Bildbereich gekennzeichnet:

$$y = K_R e , \quad G_R(p) = K_R$$

Das P-Verhalten ist leicht zu realisieren; durch die schnelle Einwirkung auf die Strecke weist er eine gute Dynamik auf. Allerdings ist dieses Verhalten mit einer bleibenden

Regeldifferenz im stationären Zustand verbunden. Der Einstellparameter ist der Übertragungsfaktor K_R .

◆ *I-Verhalten*

Das Übertragungsverhalten des I-Reglers ist durch folgende Funktionen im Zeit- und Bildbereich gekennzeichnet:

$$y = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt, \quad G_R(p) = \frac{1}{T_I p} = K_R \frac{1}{T_n p}$$

Regelkreise, in denen ein I-Regler eingesetzt wird, weisen keine bleibende Regeldifferenz auf; sie sind aber in ihrer Reaktion langsamer und besitzen somit schlechtere dynamische Eigenschaften als solche mit einem P-Regler. I-Regler können nicht an Strecken mit I-Verhalten eingesetzt werden (Strukturinstabilität!). Der Einstellparameter ist die Nachstellzeit $T_n = K_R T_I$.

◆ *PI-Verhalten*

Das Reglerverhalten ist durch folgende Funktionen im Zeit- und Bildbereich gekennzeichnet:

$$y = K_R \left(e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t e(t) dt \right), \quad G_R(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right)$$

Regler mit PI-Verhalten kombinieren die Vorteile des P- und des I-Verhaltens. Es ergibt sich eine verbesserte Dynamik (bezogen auf den I-Regler); eine bleibende Regeldifferenz (wie beim P-Regler) tritt nicht auf. Es sind zwei Einstellparameter, der Übertragungsfaktor K_R (Reglerverstärkung) und die Nachstellzeit T_n , verfügbar.

◆ *PID-Verhalten*

Das Übertragungsverhalten des PID-Reglers ist durch folgende Funktionen im Zeit- und Bildbereich gekennzeichnet:

$$y = K_R \left(e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t e(t) dt + T_v \frac{de(t)}{dt} \right), \quad G_R(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_n p} + T_v p \right)$$

Durch den, im Verhältnis zum PI-Regler, hinzukommenden D-Anteil kann die Reaktionsgeschwindigkeit noch erhöht werden. Damit ergibt sich eine noch höhere Flexibilität in der Anpassung an unterschiedliche Anforderungen als beim PI-Regler. Es sind drei Einstellparameter, der Übertragungsfaktor K_R (Reglerverstärkung), die Nachstellzeit T_n und die Vorhaltzeit T_v , verfügbar.

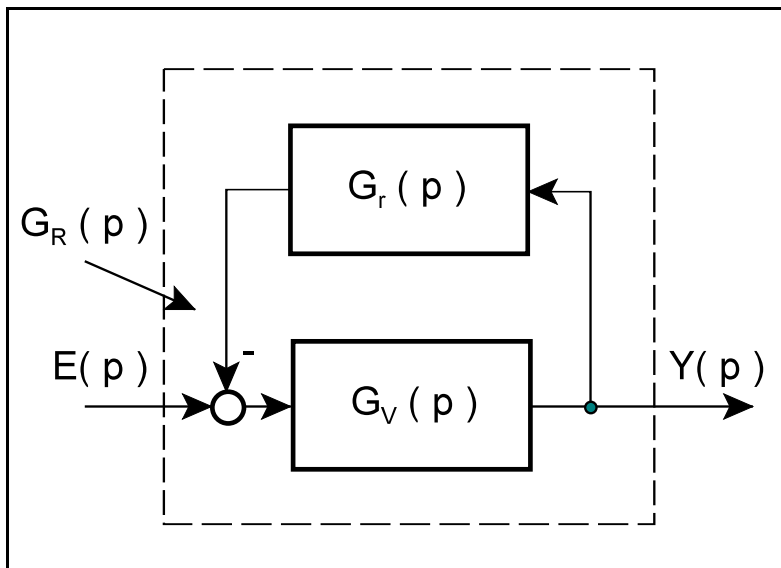
- **Übertragungsverhalten der Regelstrecken**

Die Regelstrecken werden üblicherweise in zwei Klassen eingeteilt:

- ◆ **Regelstrecken mit Ausgleich:**
Nach einer Stellgrößenänderung strebt die Ausgangsgröße (im Kreis die Regelgröße) einem neuen stationären Wert zu (P-Verhalten).
- ◆ **Regelstrecken ohne Ausgleich:**
Nach einer sprungförmigen Stellgrößenänderung wächst die Ausgangsgröße (im Kreis die Regelgröße) stetig an, ohne dass sie einem neuen stationären Wert zustrebt (I-Verhalten).

- **Realisierung stetiger Regler**

Elektrische, hydraulische und pneumatische P-, PI-, PD- oder PID-Regler werden häufig durch eine Rückführschaltung realisiert, die im Vorwärtszweig einen Verstärker mit sehr hoher Verstärkung und im Rückführzweig ein Übertragungsglied, dessen Verhalten vom anzustrebenden Übertragungsverhalten des Reglers bestimmt wird, aufweisen.



Diese Schaltung vermindert die Wirkung von Störeinflüssen auf das Übertragungsverhalten des Reglers. Der Signalflussplan ist dem nebenstehenden Bild zu entnehmen.

Aus dem nebenstehend dargestellten Signalflussplan lässt sich für die Übertragungsfunktion des Reglers folgende Beziehung ableiten:

$$G_R(p) = \frac{1}{\frac{1}{G_V(p)} + G_r(p)} \quad \text{mit } G_V(p) = K_V \text{ und } K_V \Rightarrow \infty \text{ folgt } G_R(p) \approx \frac{1}{G_r(p)}$$

Es wird also angenommen, dass der Verstärker eine sehr große Verstärkung K_V besitzt. In der folgenden Tabelle sind die Formen der Übertragungsglieder für den Rückführzweig in ihrer Zuordnung zum resultierenden Übertragungsverhalten des Reglers zusammengestellt.

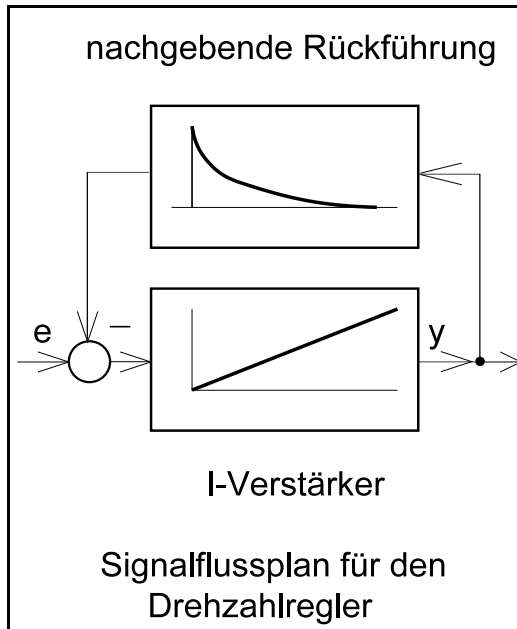
	Starre Rückführung	Verzögerte Rückführ.	Nachgebende Rückf.	Verzögerte und nachgebende Rückführung
Signalflussplan				
Übergangs-fkt.				
	P -Verhalten	PD -Verhalten	PI -Verhalten	PID -Verhalten

Für die Übertragungsfunktionen gilt

	$G_r(p)$	$G_R(p)$
P - Verhalten	K_r	$K_R = \frac{1}{K_r}$
PD - Verhalten	$\frac{K_r}{1 + T_1 p}$	$K_R = \frac{1}{K_r}, T_v = T_1$
PI - Verhalten	$\frac{K_r T_1 p}{1 + T_1 p}$	$K_R = \frac{1}{K_r}, T_n = T_1$
PID - Verhalten	$\frac{K_r}{1 + T_1 p} \frac{T p}{1 + T p}$	$K_R = \frac{T_1 + T}{K_r T}, T_v = \frac{T_1 T}{T_1 + T}, T_n = T_1 + T$

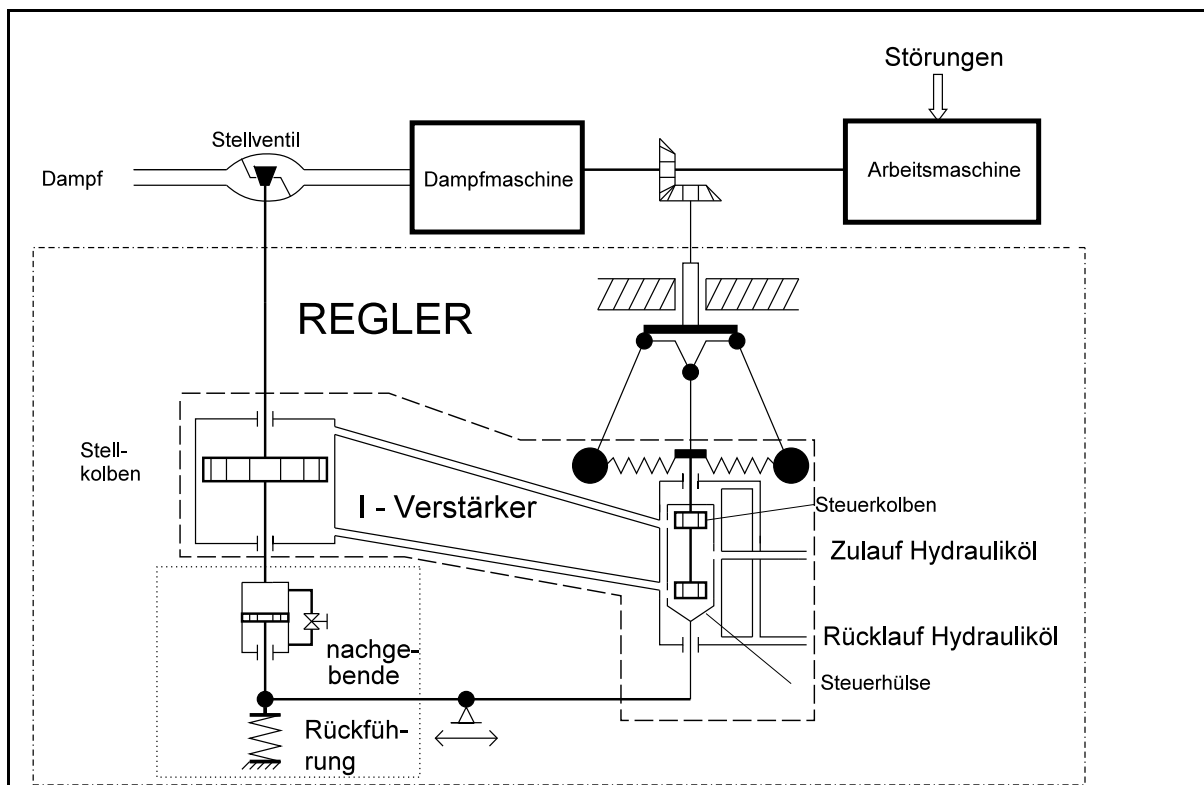
► **Beispiel:**

Der im einführenden Beispiel vorgestellte Drehzahlregler nach J. Watt besitzt P-Verhalten. Im folgenden Beispiel wird ein Regler (durch hydraulische Bauelemente) realisiert, der für die gleiche Aufgabenstellung eingesetzt werden kann, der aber ein anderes Übertragungsverhalten aufweist.



Dieser Regler besteht aus einer Rückführung, die im wesentlichen dem eingeführten Konzept folgt. Im Vorwärtszweig wird aber, im Unterschied zur oben beschriebenen Struktur, ein I-Verstärker eingesetzt. Dieser besteht (s. nachfolgendes technisches Schema) aus dem Steuerkolben und dem Stellkolben. Im Rückführzweig wird die nachgebende Rückführung durch eine Schaltung realisiert, die aus einem Kolben und einer Feder besteht. Diese Anordnung besitzt DT_1 -Verhalten. Im nebenstehenden Bild ist der Signalflussplan dieses Reglers dargestellt.

Im folgenden Bild ist die Prinzipskizze des Regelkreises angegeben:



Das Übertragungsverhalten des Reglers, der im Rückführzweig eine nachgebende Rückführung und im Vorwärtszweig einen I-Verstärker besitzt, lässt sich durch folgende Betrachtung ermitteln. Es gilt zunächst für die Übertragungsglieder (s. Signalflossplan):

I-Verstärker:
$$G_V(p) = \frac{1}{T_V p}$$

Nachgebende Rückführung:
$$G_r(p) = \frac{K_r T_r p}{1 + T_r p}$$

Für die Übertragungsfunktion des Reglers ist die Beziehung:

$$G_R(p) = \frac{1}{\frac{1}{G_V(p)} + G_r(p)}$$

anzuwenden. Einsetzen und Umformen liefert:

$$G_R(p) = \frac{T_r}{T_V + K_r T_r} \left(\frac{1 + \frac{1}{T_r p}}{1 + \frac{T_V T_r}{T_V + K_r T_r} p} \right)$$

Nach Einführung neuer Konstanten:

$$K_R = \frac{T_r}{T_V + K_r T_r}, \quad T_n = T_r, \quad T_{1R} = \frac{T_V T_r}{T_V + K_r T_r}$$

folgt für die Übertragungsfunktion des Reglers:

$$G_R(p) = \frac{K_R \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right)}{1 + T_{1R} p}$$

Der Regler zeigt also PIT₁-Verhalten.

2.3 Stabilität von Regelkreisen

2.3.1 Definition

Für lineare Übertragungsglieder lässt sich die Stabilität anhand der Eigenschaften der Nullstellen (Eigenwerte) der charakteristischen Gleichung diskutieren. Da die Eigenwerte die Eigendynamik des Übertragungsglieds kennzeichnen, kann man davon ausgehen, dass sich ein stabiles Verhalten nur dann einstellt, wenn die in der Gleichung (1.5) überlagerten Teillösungen alle mit der Zeit abklingen, wenn also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{homogen}}(t) = 0$$

erfüllt ist. Bei der durch (1.5) gegebenen Lösung ist das aber nur dann der Fall, wenn bezüglich der Eigenwerte gilt:

$$\text{Re}[p_i] < 0 \quad \text{für alle } i = 1 \dots n \quad (2.4)$$

Die Eigenwerte müssen somit in der linken, komplexen p -Halbebene liegen. Bezogen auf die Pole der Übertragungsfunktion lässt sich eine äquivalente Forderung formulieren:

Ein Übertragungsglied heißt **asymptotisch stabil**, wenn die Pole seiner Übertragungsfunktion in der linken Halbebene der komplexen p -Ebene liegen.

Wenn kein Pol in der rechten, komplexen p -Halbebene liegt, keine Mehrfachpole auf der imaginären Achse liegen und auf dieser ein einfacher Pol oder ein komplexes Polpaar liegen, so heißt das Übertragungsglied *grenzstabil*.

Auf den Regelkreis angewandt, kann man formulieren:

Ein linearer Regelkreis heißt **asymptotisch stabil**, wenn die Nullstellen seiner charakteristischen Gleichung

$$G_R(p)G_S(p) + 1 = 0$$

in der linken Halbebene der komplexen p -Ebene liegen.

(2.5)

2.3.2 Das HURWITZ-Kriterium

Das HURWITZ-Kriterium geht von der Differentialgleichung bzw. deren charakteristischer Gleichung aus. Für die Beurteilung der Stabilität werden nur die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung herangezogen; die Nullstellen werden dagegen **nicht** ermittelt.

Für die Untersuchung der **Stabilität eines Regelkreises** sind die Koeffizienten seiner charakteristischen Gleichung

$$G_R(p)G_S(p) + 1 = G_0(p) + 1 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

heranzuziehen.

Das HURWITZ-Kriterium kann wie folgt formuliert werden:

Das Übertragungsglied ist stabil, wenn sämtliche Koeffizienten der charakteristischen Gleichung positiv sind und wenn die nachfolgenden Determinanten größer Null sind:

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

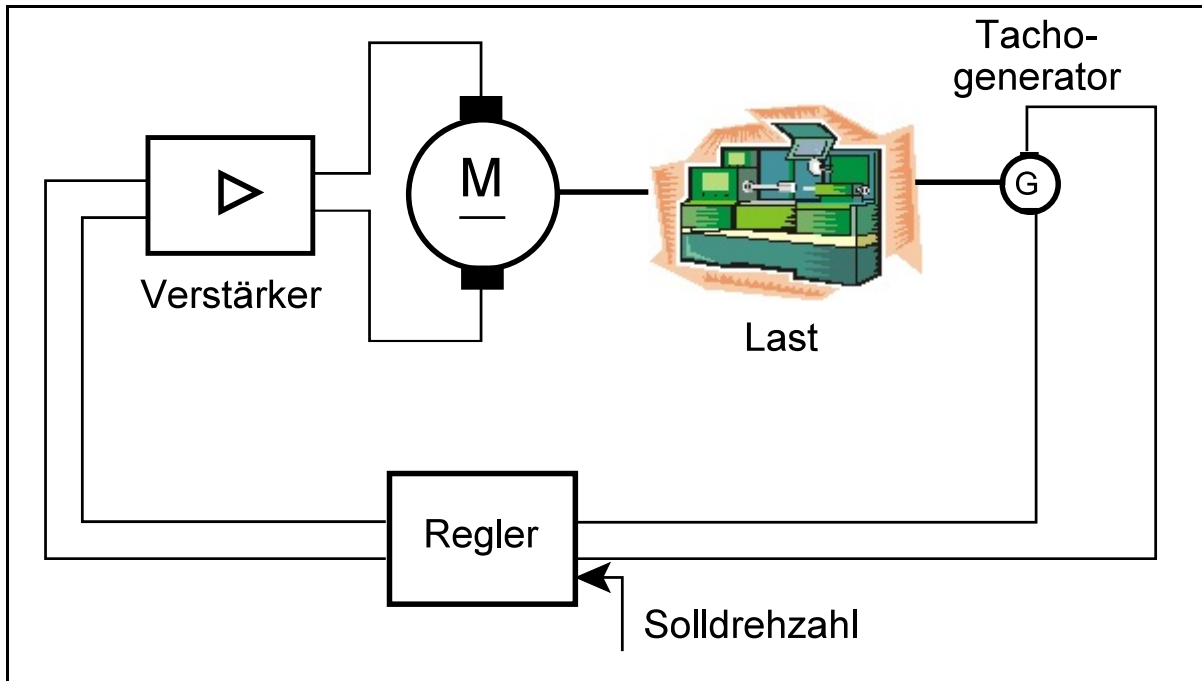
D_n besitzt n Zeilen und n Spalten.
Nicht besetzte Positionen werden mit Nullen aufgefüllt.
Die D_1 bis D_{n-1} sind die Unterdeterminanten von D_n .

(2.6)

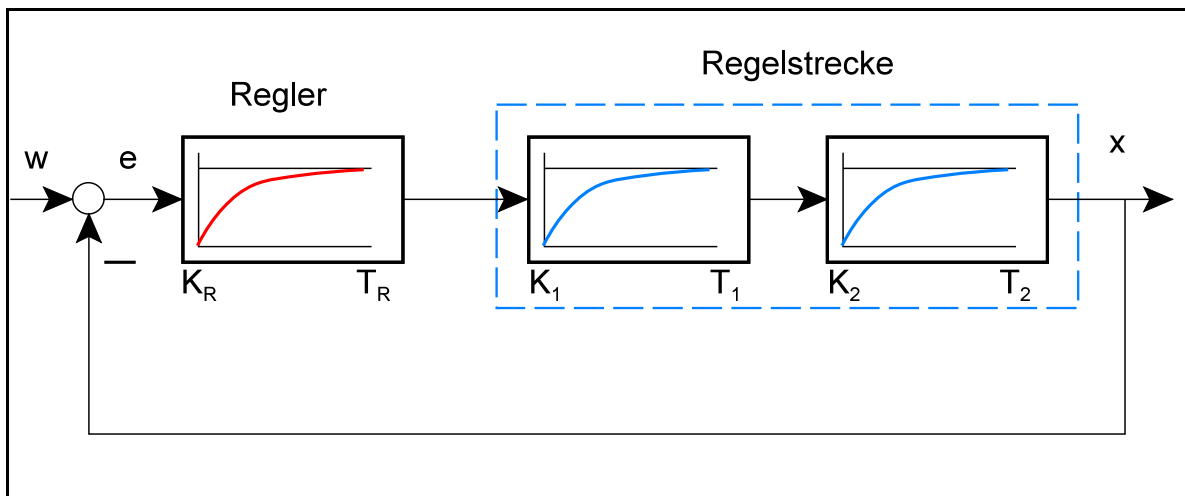
Hinweis: Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung können auch sämtlich negativ sein. Durch Multiplikation mit -1 lässt sich dann der oben vorausgesetzte Fall einheitlich positiver Vorzeichen erreichen.

● **Beispiel:** Stabilitätsbedingung für Drehzahlregelung

Für die Stabilisierung der Antriebsdrehzahl einer Maschine ist eine Regelung zu entwerfen. Der Motors kann in guter Näherung durch PT_2 -Verhalten mit zwei unterschiedlichen Zeitkonstanten beschrieben werden. Für den Regler kann PT_1 -Verhalten angenommen werden, wobei die Verzögerungszeitkonstante nicht verändert werden kann; als Entwurfparameter steht somit nur die Reglerverstärkung K_R zur Verfügung. Es ist eine Bedingung gesucht, die die Reglerverstärkung erfüllen muss, damit der Regelkreis stabil arbeitet. Diese Bedingung lässt sich mit dem HURWITZ-Kriterium entwickeln. Im folgenden Bild ist zunächst die prinzipielle Struktur des Drehzahl-Regelkreises dargestellt:



Entsprechend den getroffenen Voraussetzungen zum Zeitverhalten von Strecke und Regler lässt sich der folgende Signalfussplan entwickeln:



Die Übertragungsfunktionen von Strecke und Regler ergeben sich damit wie folgt:

$$G_R(p) = \frac{K_R}{1 + T_R p}$$

$$G_S(p) = \frac{K_1 K_2}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Für die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises folgt dann:

$$G_0(p) = G_R(p) G_S(p) = \frac{K_1 K_2 K_R}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_R p)}$$

Damit ergibt sich als charakteristische Gleichung:

$$1 + G_0(p) = 1 + \frac{K_1 K_2 K_R}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_R p)} = 0$$

Diese lässt sich wie folgt umformen:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_R p) + K_1 K_2 K_R = 0$$

Das ist eine Gleichung 3. Grades in p . Der Klammerausdruck lässt sich auflösen. In diesem Zusammenhang können die Koeffizienten vor den Potenzen von p in der für die Anwendung des Hurwitz-Kriteriums notwendigen Form definiert werden. Für die charakteristische Gleichung ergibt sich dann:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

mit

$$a_0 = K_1 K_2 K_R + 1$$

$$a_1 = T_1 + T_2 + T_R$$

$$a_2 = T_1 T_2 + T_1 T_R + T_2 T_R$$

$$a_3 = T_1 T_2 T_R$$

Für die Koeffizienten gilt offensichtlich $a_{1..3} > 0$; damit ist die erste Forderungen des Hurwitz-Kriteriums erfüllt.

Für die Herleitung der Stabilitätsbedingung verbleiben drei HURWITZ-Determinanten nach Gleichung (2.6). Für diese folgt:

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

Die Bedingung für D_1 wurde bereits als erfüllt nachgewiesen. Unter Anwendung der bekannten Beziehungen für die Auflösung zweireihiger und dreireihiger Determinanten folgt nach kurzer Rechnung für D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

und für D_3 :

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 = a_3 D_2 > 0$$

Da $a_3 > 0$ gilt, ist die Bedingung für D_3 auch erfüllt, wenn die für D_2 erfüllt ist. Somit muss für die Ermittlung der Stabilitätsgrenze nur die Bedingung für D_2 herangezogen werden. Es folgt zunächst durch einfache Umstellung der Ungleichung:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \Rightarrow a_1 a_2 > a_0 a_3$$

Unter Einsetzen der ursprünglichen Konstanten für die Koeffizienten ergibt sich damit:

$$(T_1 + T_2 + T_R)(T_1 T_2 + T_1 T_R + T_2 T_R) > (1 + K_1 K_2 K_R) T_1 T_2 T_R$$

Diese Ungleichung muss nun nach K_R aufgelöst werden. Das führt zu folgendem Ergebnis:

$$K_R < \frac{1}{K_1 K_2} \left[\frac{(T_1 + T_2 + T_R)(T_1 T_2 + T_1 T_R + T_2 T_R)}{T_1 T_2 T_R} - 1 \right]$$

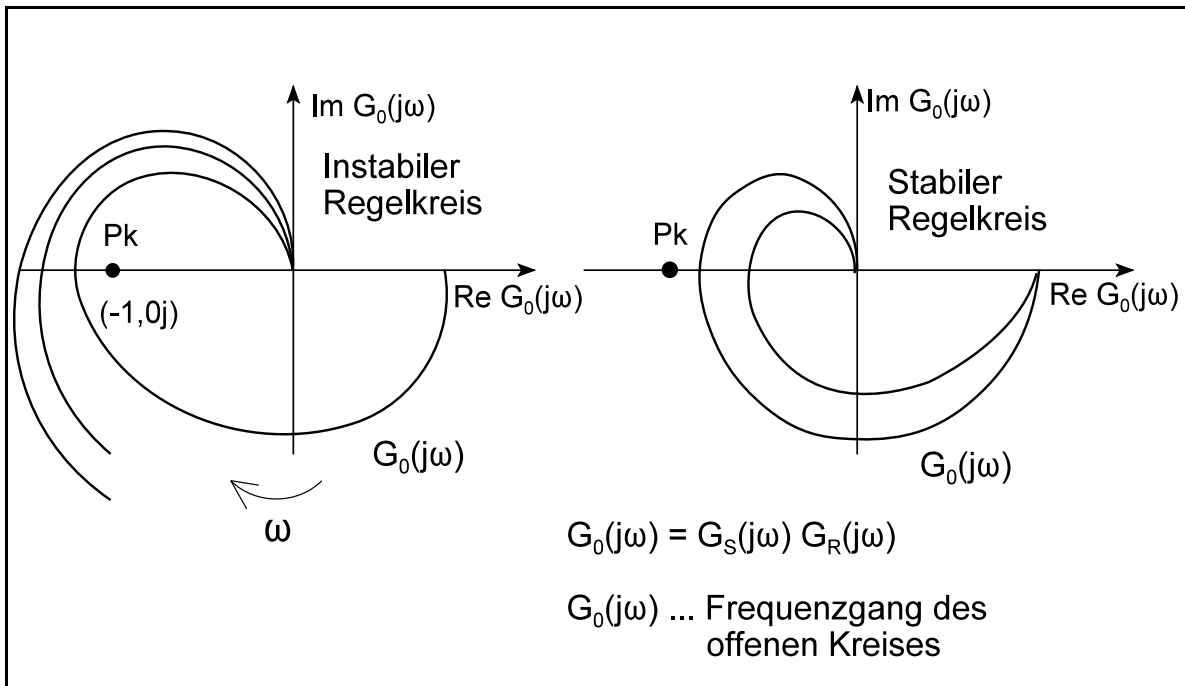
Diese Beziehung lässt sich noch umformen zu:

$$K_R < \frac{1}{K_1 K_2} \left[(T_1 + T_2 + T_R) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_R} \right) - 1 \right]$$

Nur wenn die Reglerverstärkung diese Bedingung erfüllt, arbeitet der Regelkreis stabil. Es ist in diesem Zusammenhang aber zu beachten, dass das HURWITZ- Kriterium keine Aussage bezüglich der Güte des Regelvorgangs liefert.

2.3.3 Das NYQUIST-Kriterium

Aus der Grundgleichung des Regelkreises folgt, dass die Übertragungsfunktionen $G_W(p)$ und $G_Z(p)$ für diejenigen p -Werte, für die $G_R(p) G_S(p) + 1 = 0$ gilt, ihre Pole haben. Daraus folgt, dass der Punkt \mathbf{Pk} mit den Koordinaten $(-1, 0j)$ für den Verlauf der Ortskurve des offenen Kreises $G_R(j\omega) G_S(j\omega)$ einen **kritischen Punkt** darstellt. Im folgenden Bild sind die Verhältnisse für die Ortskurve des Frequenzgangs des offenen Kreises dargestellt. Für stabiles Verhalten verläuft die Ortskurve rechts vom kritischen Punkt, während im Falle des instabilen Verhaltens diese links den kritischen Punkt umschließt.



Darstellung der Bedingungen des NYQUIST-Kriteriums

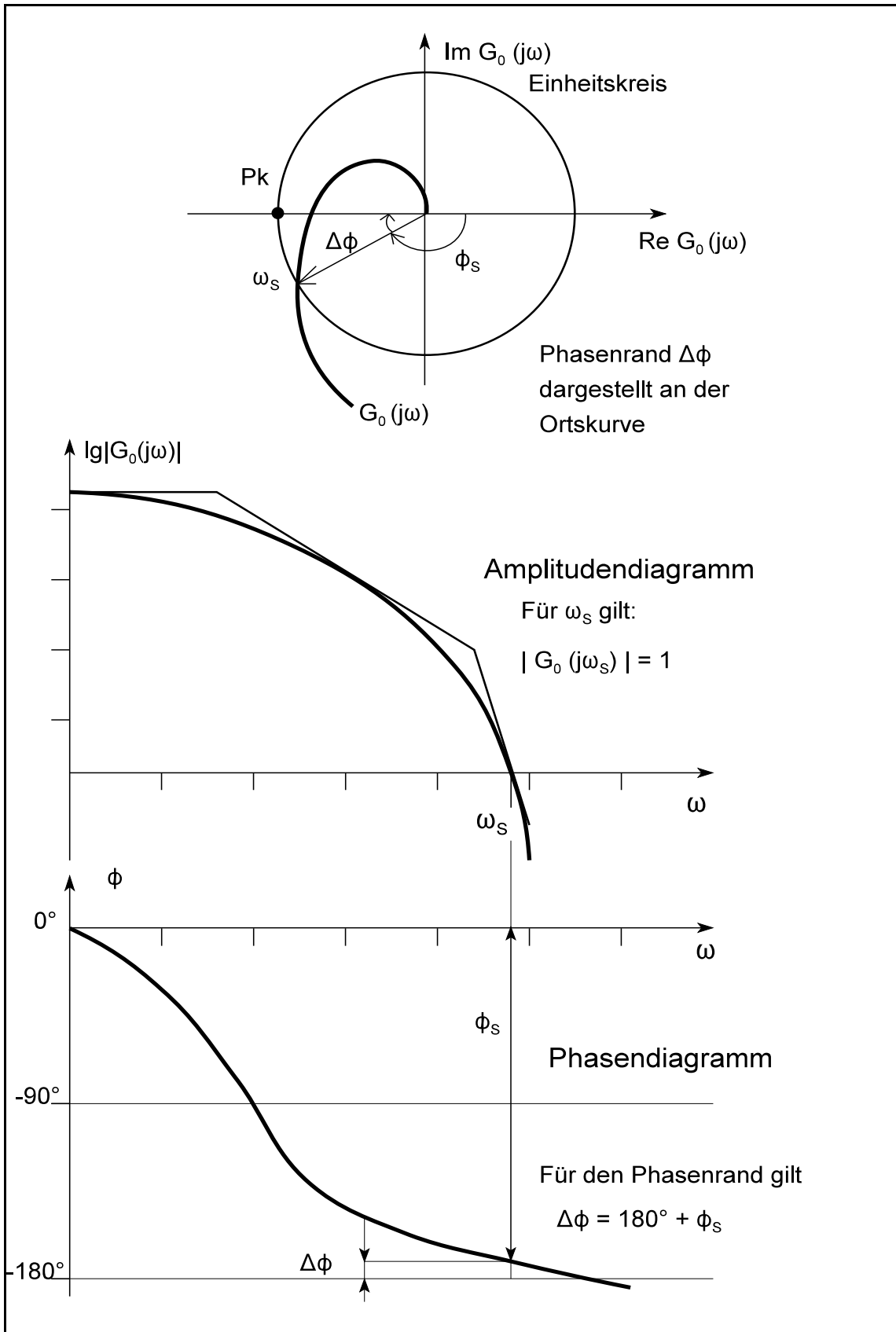
Das Stabilitätskriterium nach NYQUIST lässt sich wie folgt formulieren:

Der Regelkreis ist stabil, wenn der kritische Punkt links von der Ortskurve des offenen Kreises beim Überstreichen des Bereichs $\omega = 0 \dots \infty$ liegt.
(2.7)

Das NYQUIST-Kriterium lässt sich auch anschaulich im Amplituden- und Phasendiagramm erklären. Im Bild auf der folgenden Seite sind die Verhältnisse dargestellt. Wenn man diese Darstellung zugrunde legt, kann das NYQUIST-Kriterium auch wie folgt formuliert werden:

Der Regelkreis ist stabil, wenn für ω_s , das aus der Bedingung $|G_0(j\omega_s)| = 1$ folgt, der Phasenrand $\Delta\phi$ größer Null ist.
 (2.8)

Das NYQUIST-Kriterium kann auch für die Untersuchung der Stabilität von Systemen mit Totzeitgliedern herangezogen werden.



NYQUIST-Kriterium im Amplituden- und Phasendiagramm

Während das HURWITZ-Kriterium nur eine Aussage über das Stabilitätsverhalten liefert, kann man aus den für das NYQUIST-Kriterium notwendigen Betrachtungen auch auf

das Abklingen des Einschwingvorgangs des Regelkreises schließen. In der folgenden Tabelle sind einige ausgewählte Richtwerte für den Phasenrand angegeben:

Phasenrand	Dämpfung	Kommentar
0 °		Kreis ist instabil.
30 °		praktische Mindestforderung, die nicht unterschritten werden sollte.
40 °	ca. 0.2	Kreis ist stabil; Einschwingvorgang ist nach ca. vier Halbwellen abgeklungen.
60 °	ca. 0.7	Kreis ist stabil; Einschwingvorgang verläuft nahezu aperiodisch.

★ Beispiele

- Stabilisierung einer Regelung durch “Anheben” des Phasenrandes

Eine Regelstrecke besitzt den Frequenzgang

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{(1 + j\omega T)^3} \quad \text{mit} \quad K_S = 2.5 \quad T = 0.7 \text{ s}$$

Es wurde ein PI-Regler mit folgenden Parametern ausgewählt:

$$G_R(j\omega) = K_R \left(1 + \frac{1}{j\omega T_n} \right) = \frac{K_R j\omega + \frac{K_R}{T_n}}{j\omega} \quad \text{mit} \quad K_R = 2.4, \quad T_n = 3 \text{ s}$$

Es soll überprüft werden, ob der Regelkreis stabil ist. Dazu werden Phasen- und Amplitudenrand bestimmt. Das kann über die MATLAB-Funktion

margin(G0)

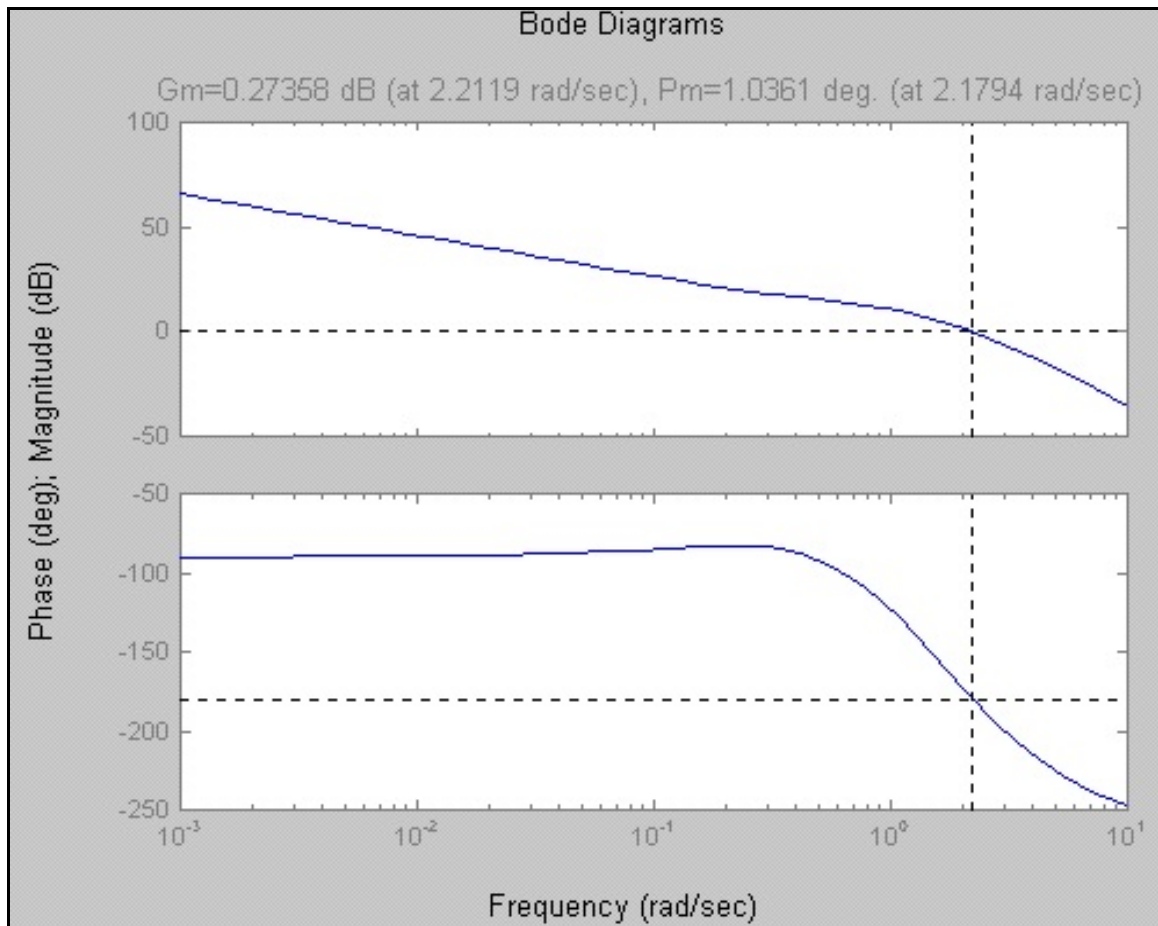
erfolgen. Im folgenden ist die MATLAB-Befehlsfolge gegeben:

```

» GS=tf([2.5],[0.343 1.47 2.1 1]);
» GR=tf([2.4 0.8],[1 0]);
» G0=GR*GS
Transfer function:
      6 s + 2
-----
0.343 s^4 + 1.47 s^3 + 2.1 s^2 + s
» margin(G0)

```

Es erscheint das folgende Diagramm:



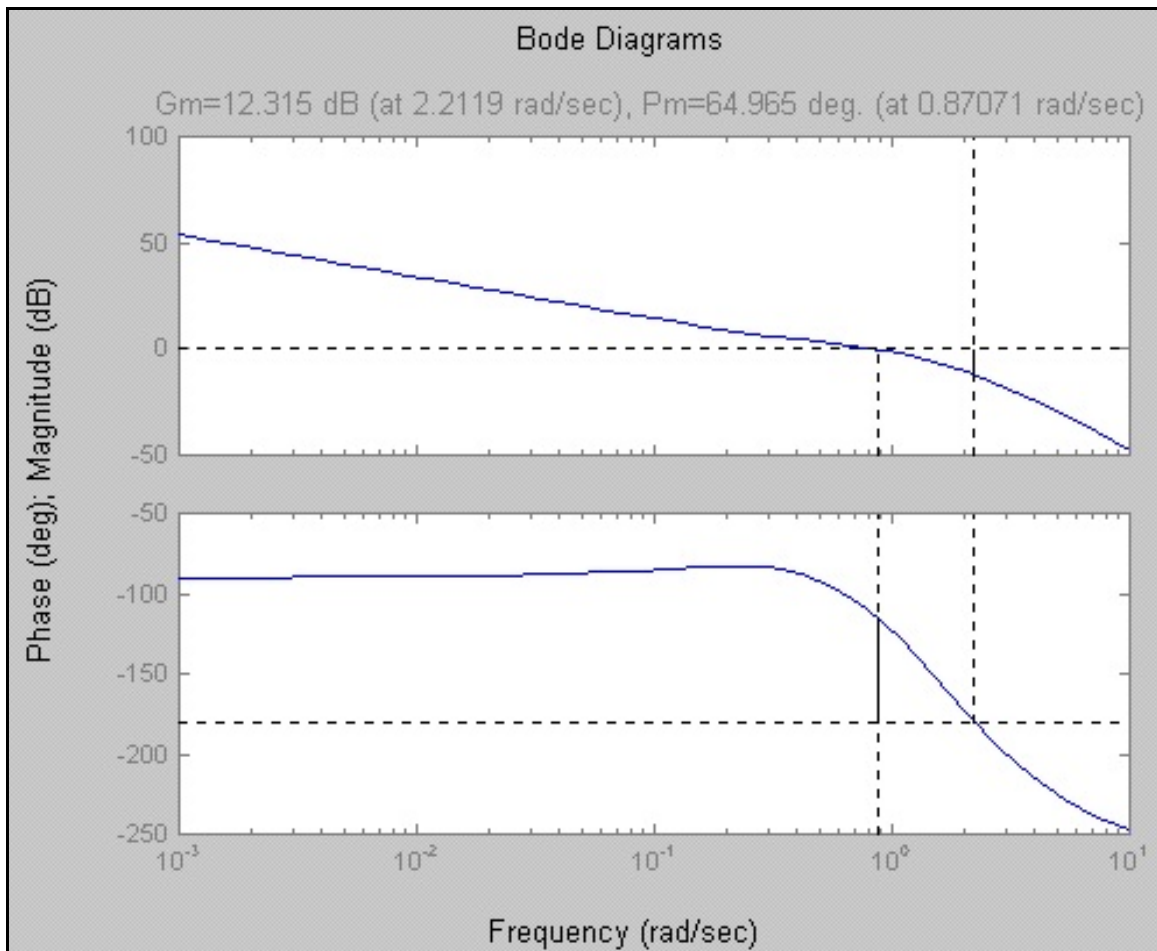
Dem Diagramm ist zu entnehmen, dass der Phasenrand bei etwa 1° liegt; der Regelkreis ist praktisch grenzstabil. Die Reglereinstellung muss also korrigiert werden. Dafür kann dieses Diagramm unmittelbar genutzt werden. Wenn man nur die Reglerverstärkung verändert, ändert sich die Lage der Phasenkennlinie nicht. Man kann sich also den gewünschten Phasenrand im Phasendiagramm vorgeben und die entsprechende Schnittfrequenz ermitteln. Anschließend ist die Amplitudenkennlinie so weit zu verschieben, dass sie für die ermittelte Frequenz die Frequenzachse schneidet. Die Veränderung der Reglerverstärkung hat eine Parallelverschiebung der Amplitudenkennlinie zur Folge. Die notwendige Korrektur der Reglereinstellung ist also leicht im obigen Diagramm zu ermitteln. Es soll ein Phasenrand von ca. 60° realisiert werden. Aus dem Diagramm lässt sich die Frequenz für die Phasenlage -120° (diese Lage entspricht dem Phasenrand von 60°) mit $\omega_s \approx 0.9$ rad/s ablesen. Damit die Amplitudenkennlinie durch diesen Punkt verläuft, muss sie um etwa 12 dB abgesenkt werden. Für die Korrektur der Reglerverstärkung ergibt sich damit:

$$\lg(K_{R_{\text{neu}}}) = \lg(K_{R_{\text{alt}}}) - \frac{\Delta K}{20} \text{ dB}$$

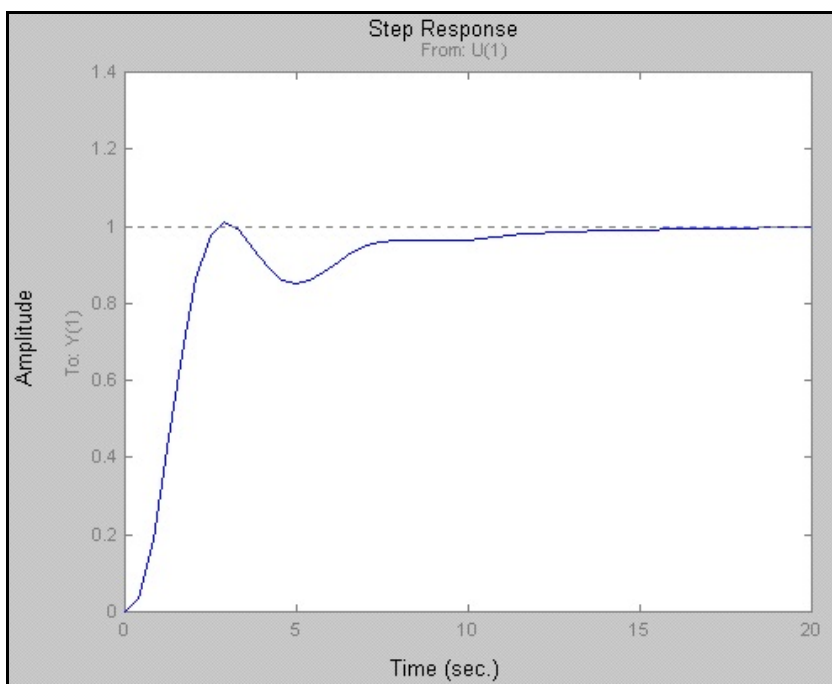
Nach Ausführung dieser Berechnung ergibt sich ein Wert für die Reglerverstärkung von:

$$K_{R_{\text{neu}}} \approx 0.6$$

Mit dieser Reglerverstärkung lassen sich über die MATLAB-Funktion `margin` Amplituden- und Phasenrand neu bestimmen. Das Ergebnis ist im folgenden Diagramm dargestellt.



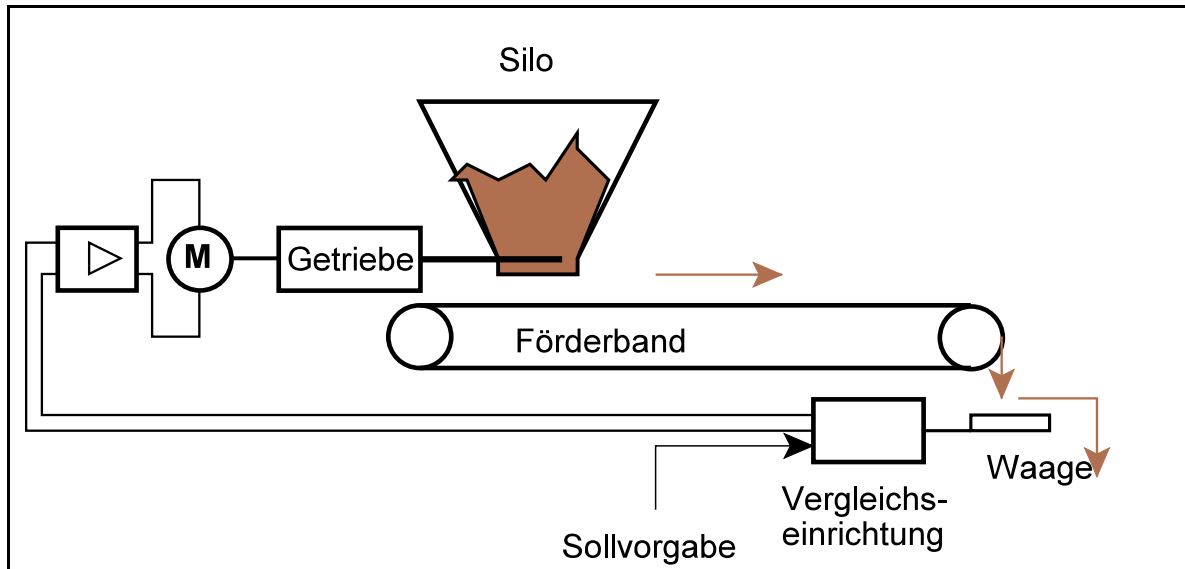
Der neu bestimmte Phasenrand liegt bei 64° ; das trifft die Vorgabe im Rahmen der möglichen Ablesegenauigkeit in den Diagrammen.



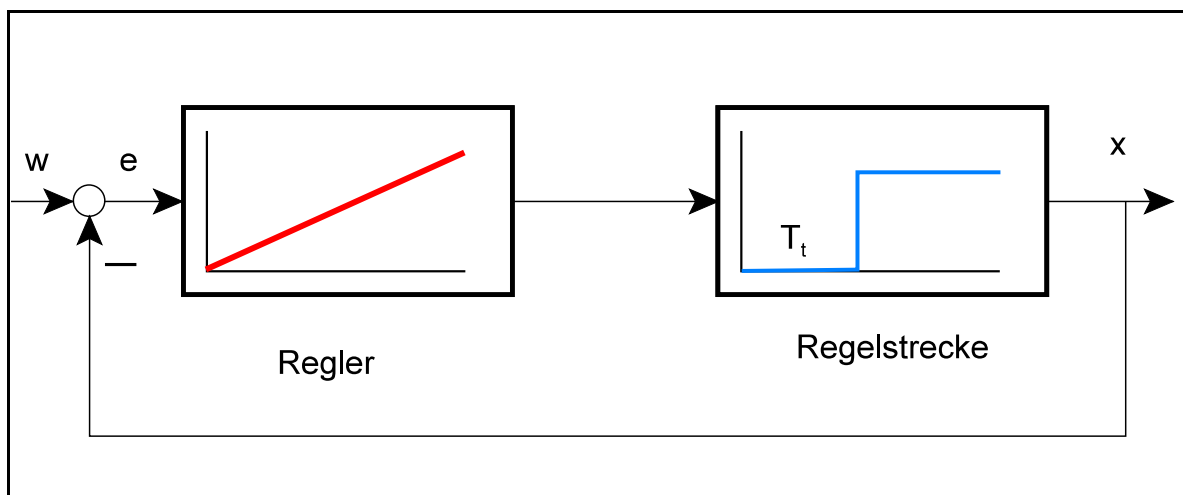
Im nebenstehenden Diagramm ist die Führungs-Übergangsfunktion der Regelgröße dargestellt. Diese wurde mit der MATLAB-Funktion `step` erzeugt.

- Herleitung der Stabilitätsbedingung für einen Regelkreis mit einem Totzeit-Glied als Regelstrecke

Für die im folgenden Bild schematisch dargestellte Feststoffdosierung soll eine notwendige Bedingung für die Reglerverstärkung hergeleitet werden, die für einen stabilen Betrieb zu erfüllen ist.



Für den Regelkreis kann der folgende Signalfussplan angegeben werden:



Bei der Regelstrecke handelt es sich um ein P-Glied mit Totzeit. Für die Übertragungsfunktion bzw. den Frequenzgang gilt dann (s. Tabelle auf S. 17):

$$G_S(p) = K_S e^{-T_t p} \Rightarrow G_S(j\omega) = K_S e^{-jT_t \omega}$$

Die Lauflänge auf dem Förderband sei L ; die Bandgeschwindigkeit werde mit v_B

bezeichnet. Für die Totzeit gilt dann:

$$T_t = \frac{L}{v_B}$$

Der Regler kann als reiner I-Regler angenommen werden; solange eine Regeldifferenz anliegt, wird der Dosierschieber am Boden des Silos nach links bzw. rechts bewegt. Damit ergibt sich für den Regler die folgende Übertragungsfunktion bzw. der folgende Frequenzgang:

$$G_R(p) = \frac{K_R}{p} \Rightarrow G_R(j\omega) = \frac{K_R}{j\omega}$$

Für den Frequenzgang des aufgetrennten Kreises folgt damit:

$$G_0(j\omega) = G_R(j\omega) G_S(j\omega) = \frac{K_R K_S e^{-j\omega T_t}}{j\omega}$$

Diese Beziehung lässt sich durch Erweiterung von Zähler und Nenne mit j umformen in:

$$G_0(j\omega) = G_R(j\omega) G_S(j\omega) = -j \frac{K_R K_S e^{-j\omega T_t}}{\omega}$$

Der Term $-j$ lässt sich über die EULER-Formel wie folgt umformen:

$$-j = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Damit kann $G_0(j\omega)$ in die folgende Form gebracht werden:

$$G_0(j\omega) = \left[\frac{K_R K_S}{\omega} \right] e^{-j\left(\omega T_t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Nach dem NYQUIST-Kriterium muss für den stabilen Kreis gelten:

$$\text{Wenn } |G_0(j\omega_0)| = 1, \text{ dann } \phi(\omega_0) > -\pi !$$

Für den konkreten Fall folgt:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{K_R K_S}{\omega} \Rightarrow \frac{K_R K_S}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_0 = K_R K_S$$

$$\phi(\omega) = -\left(\omega T_t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \phi(\omega_0) = -\left(K_R K_S T_t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Daraus ergibt sich mit der Bedingung des NYQUIST-Kriteriums die gesuchte Bedingung für die Reglerverstärkung:

$$\phi(\omega_0) = -\left(K_R K_S T_t + \frac{\pi}{2}\right) > -\pi \Rightarrow K_R < \frac{\pi}{2 K_S T_t}$$

2.4 Reglereinstellung

2.4.1 Ziel der Reglereinstellung

Der Regler muss in jedem konkreten Anwendungsfall an die zu regelnde Strecke so angepasst werden, dass sich ein im Sinne der Aufgabenstellung günstiges Verhalten des Regelkreises einstellt. Die Güte der Anpassung kann durch Kriterien bewertet werden. Die Reglereinstellung lässt sich dann als Optimierungsproblem formulieren. Für den Fall, dass die Reglerstruktur vorgegeben ist, kann die Optimierung sich lediglich auf die Reglerparameter erstrecken; man spricht in diesem Fall von **Parameteroptimierung**. Entwurfsverfahren, die auch die Struktur des Reglers als Freiheitsgrad der Optimierung zulassen, werden dagegen als Verfahren der **Strukturoptimierung** bezeichnet. Im folgenden soll ausschließlich der Weg der Parameteroptimierung betrachtet werden.

Für die Auswahl des Reglertyps und für die Einstellung günstiger Reglerparameter kann man heuristische Einstellregeln nutzen, die auf Simulationsuntersuchungen und auf Erfahrungen beruhen. Die Anwendung solcher Regeln führt in vielen praktischen Fällen zu befriedigenden Resultaten.

In groben Zügen betrachtet vollzieht sich der Prozess der Reglereinstellung in folgenden Schritten:

1. Formulierung der Zielstellung und Kennzeichnung der Regelstrecke.
2. Auswahl des Reglertyps (nach heuristischen Regeln).
3. Untersuchung der Stabilität des entstehenden Kreises; Formulierung notwendig einzuhaltender Bedingungen, die aus der Stabilitätsuntersuchung resultieren.
4. Parametrierung des Reglers auf der Basis von Einstellregeln oder nach einem Verfahren der Parameteroptimierung.
5. Gerätetechnische und/oder programmtechnische Realisierung.
6. Feineinstellung am Prozess. Notfalls Rücksprung zu vorgelagerten Schritten, wenn die Ergebnisse nicht befriedigend ausfallen.

2.4.2 Heuristische Regeln für die Wahl des Reglertyps

Für die Wahl des Reglertyps ist der jeweilige **Typ der Regelstrecke** von wesentlicher Bedeutung. Wenn man dieses Auswahlkriterium zu Grunde legt, kann man von folgenden Regeln ausgehen¹:

¹E. Samal

"Grundriß der praktischen Regelungstechnik",
R. Oldenbourg Verlag, München, 2000. [S. 273 ff.]

- **Strecken mit Ausgleich**

Regelstrecke	Reglertyp			
	P	I	PI	PID
unverzögert	Theoretisch ideale Verhältnisse; praktisch ungeeignet.	Gute Eignung.	PI-/PID-Regler sind für diese Strecken nicht notwendig!	
Verzögerung 1. Ordnung	Gute Eignung; kein Überschwingen der Regelgröße.	Brauchbar; Überschwingen der Regelgröße!		
Verzög. 2.Ordn.	Geeignet	Bedingt geeignet	Geeignet	Gut geeignet
Verzögerung hoher Ordnung	Nur brauchbar, wenn größere bleibende Regeldifferenz zulässig ist.	Geeignet; aber große Einschwingzeiten und große Überschwingweiten.	Gut geeignet	Gut geeignet; meist noch bessere Gütemaße als mit PI-Regler erreichbar.

- **Strecken ohne Ausgleich**

Regelstrecke	Reglertyp			
	P	I	PI	PID
Unverzögert	Gute Eignung	Ungeeignet, weil instabil!	Gute Eignung, vor allem, wenn bleibende Regeldifferenz vermieden werden soll	Eignung wie PI-Regler. Die Regelgüte lässt sich gegenüber PI-Regler noch verbessern.
Mit Verzögerung	Geeignet			

Bei der Wahl des Reglertyps sollte auch der **Charakter der Regelgröße** beachtet werden. In der folgenden Tabelle sind Regeln für die Entscheidung nach diesem Kriterium angegeben¹:

¹ E. Samal
 "Grundriß der praktischen Regelungstechnik",
 R. Oldenbourg Verlag, München, 2000 [S. 276 ff.]

Regelgröße	Reglertyp			
	P	I	PI	PID
	Bleibende Regeldifferenz	Keine bleibende Regeldifferenz		
Temperatur	Geeignet bei geringen Güteanforderungen	Ungeeignet wegen zu großer Überschwingweiten.	Sehr gute Eignung bei höheren Ansprüchen.	Für diese Regelgrößen kaum notwendig.
Druck	Noch geeignet	Geeignet		
Durchfluss	Ungeeignet	Geeignet		
Niveau	In vielen Fällen gute Eignung.	Ungeeignet, da instabiles Verhalten!		
Drehzahl	In vielen Fällen gute Eignung.	Brauchbar; es ist mit größeren Überschwingweiten als beim P-Regler zu rechnen.	Gute Eignung bei höheren Ansprüchen.	Eignung wie PI-Regler aber meist noch bessere Regeltüte.
Spannung	Geeignet	In vielen Fällen gute Eignung.	Gute Eignung, auch für hohe Ansprüche.	

2.4.3 Heuristische Regeln für die Reglereinstellung

Bei der Anwendung von Regeln zur Reglerparametrierung sind die für die Regeln getroffenen Voraussetzungen bezüglich des Streckenverhaltens zu beachten. Häufig verwendete Regeln sind die von CHIEN, HRONES und RESWICK, die von der Sprungantwort der Regelstrecke ausgehen und die nachfolgend beschriebenen Einstellregeln von ZIEGLER und NICHOLS, die bestimmte Kenngrößen an der Stabilitätsgrenze verwenden.

- **Einstellregeln nach ZIEGLER und NICHOLS**

Diese Einstellregeln wurden an P-Strecken mit Verzögerung 1. Ordnung und Totzeit ermittelt. Die Einstellregeln lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Der Regler wird als P-Regler eingestellt (Vorhaltzeit $\Rightarrow 0$, Nachstellzeit $\Rightarrow \infty$).
2. Der Verstärkungsfaktor K_R des Reglers wird so lange erhöht, bis die Regelgröße gerade ungedämpft schwingt (die Stabilitätsgrenze ist erreicht!). Für diesen Fall werden ermittelt:
 K_{Rk} der kritische Verstärkungsfaktor
 T_k die kritische Schwingungsdauer
3. Die günstigen Reglereinstellungen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0.5 K_{Rk}$	-	-
PI-Regler	$0.45 K_{Rk}$	$0.85 T_k$	-
PID-Regler	$0.6 K_{Rk}$	$0.5 T_k$	$0.12 T_k$

- **Einstellregeln nach CHIEN, HRONES und RESWICK**

Diese Einstellregeln gehen von der experimentell ermittelten Sprungantwort der Regelstrecke aus. Die im Abschnitt 1.5. eingeführten Kenngrößen gelten auch für die folgenden Formeln. Die Größe K_S bezeichnet die Verstärkung der Regelstrecke.

- Einstellregeln für günstiges Störverhalten / Aperiodische Störsprungantwort

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0.3 \frac{T_g}{T_u K_S}$	-	-
PI-Regler	$0.6 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$4.0 T_u$	-
PID-Regler	$0.95 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$2.4 T_u$	$0.42 T_u$

- Einstellregeln für günstiges Störverhalten / ca. 20 % Überschwingen bei Störsprung

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0.7 \frac{T_g}{T_u K_S}$	-	-
PI-Regler	$0.7 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$2.3 T_u$	-
PID-Regler	$1.2 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$2.0 T_u$	$0.42 T_u$

- Einstellregeln für günstiges Führungsverhalten / Aperiodische Führungsprungantwort

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0.3 \frac{T_g}{T_u K_S}$	-	-
PI-Regler	$0.35 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$1.2 T_g$	-
PID-Regler	$0.6 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$1.0 T_g$	$0.5 T_u$

- Einstellregeln für günstiges Führungsverhalten / ca. 20% Überschwingen bei Führungssprung

Reglertyp	Reglerparameter		
	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0.7 \frac{T_g}{T_u K_S}$	-	-
PI-Regler	$0.6 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$1.0 T_g$	-
PID-Regler	$0.95 \frac{T_g}{T_u K_S}$	$1.35 T_g$	$0.47 T_u$

- **Einstellregeln für ausgewählte Regelgrößen**

Auch bei der Reglerparametrierung kann man, wie bei der Wahl des Reglertyps, die spezifischen Eigenschaften bestimmter Regelgrößen berücksichtigen. Dabei kann man davon ausgehen, dass diese Regelgrößen für bestimmte Prozessklassen und damit für bestimmte Regelstrecken typisch sind, die durch ein charakteristisches dynamisches Verhalten gekennzeichnet sind. In der folgenden Tabelle sind Empfehlungen für die Reglereinstellung nach diesem Gesichtspunkt gegeben¹:

Regelgröße	Reglertyp	K_R	T_n	T_v
Temperatur	PID	2...10	1..20 min	0.2..3 min
Druck	PI	3...10	10..60 min	-
Durchfluss	PI	0.5...1	10..30 s	-
Konzentration	PID	0.2...0.5	10..20 min	2..5 min
Niveau	P	1...20	-	-
	PI	2...20	1..10 min	-

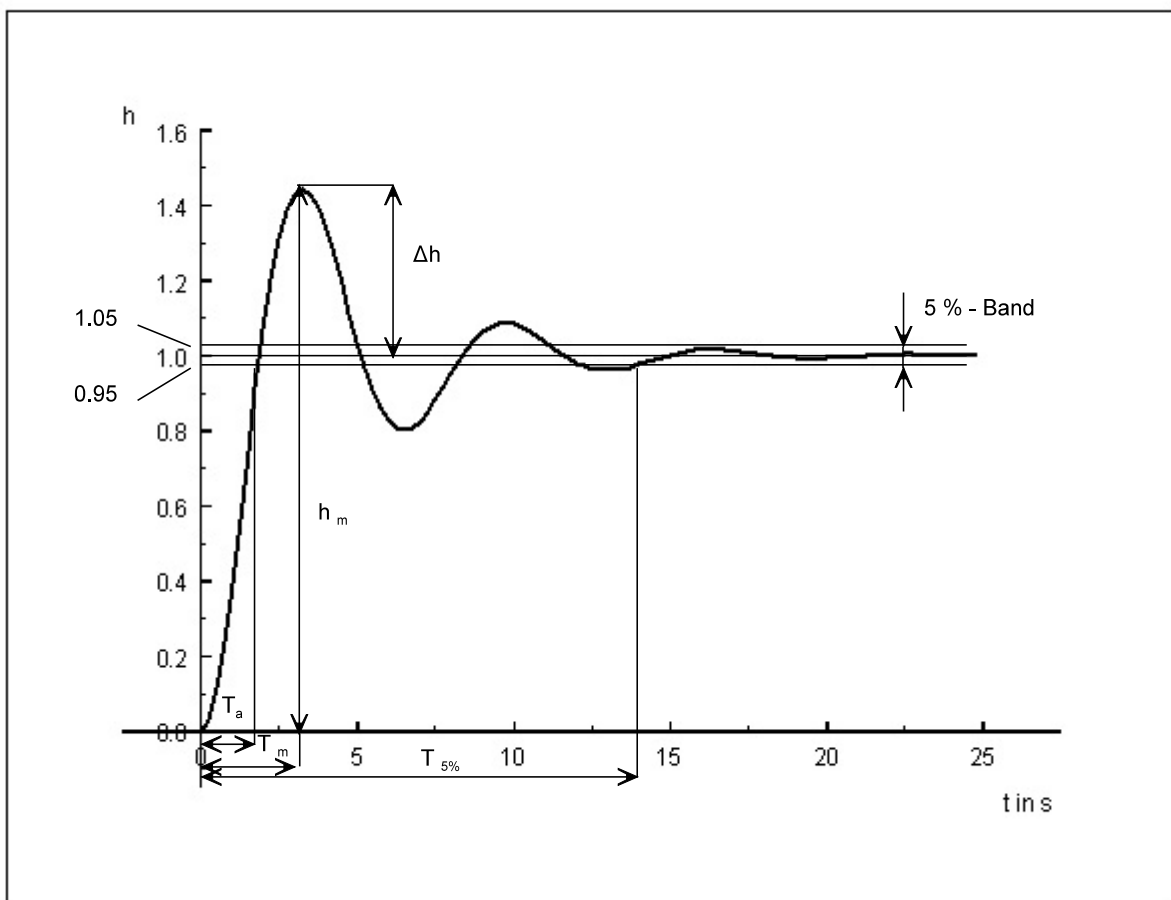
¹E. Samal

"Grundriß der praktischen Regelungstechnik"
R. Oldenbourg Verlag, München, 2000 [S. 277]

2.4.4 Gütekriterien für die Parameteroptimierung

Im folgenden wird davon ausgegangen, dass die Regelgüte durch quantifizierbare Gütemaße bewertet wird. Bei der Wahl der Gütemaße kann man zum einen von bestimmten Kenngrößen der Übergangsfunktion der Regelgröße ausgehen; man kann aber auch Kriterien definieren, die den Verlauf der Regeldifferenz integral bewerten. Die Gütemaße lassen sich als Funktionen der Reglerparameter darstellen. Die optimale Einstellung kann nun durch ein Extremum des Gütemaßes (wie bei den Integralkriterien) oder durch eine Forderung an den Verlauf des Frequenzgangs (wie beim Betragsoptimum) definiert werden. Die Entscheidungsvariablen für die Lösung des Problems sind in jedem Falle die Reglerparameter.

- **Kenngrößen der Übergangsfunktion als Gütemaße**



Bedeutung der Kenngrößen:

Δh maximale Überschwingweite

h_m maximale Auslenkung der Regelgröße

T_a Anschwingzeit ($h(t)$ tritt erstmalig in das Toleranzband ein)

T_m Zeit bis zum Erreichen des erstes Maximums

$T_{5\%}$ Beruhigungszeit (Regelgröße verbleibt im Toleranzband)

Die Kenngrößen der Übergangsfunktion, die durch Stör- oder Führungsgrößen sprünge erzeugt wird, hängen von den Reglerparametern ab. Durch systematische Veränderung der Parameter sind dann die für die Aufgabe günstigen so zu finden, dass die Parameter der Übergangsfunktion in den gewünschten Bereichen liegen. Bei einer Einstellung mit mehreren Zielen muss in der Regel ein Kompromiss gefunden werden.

- **Integralkriterien**

Die folgenden Gütemaße bewerten den Gesamtverlauf des Regelvorgangs. In der nachfolgenden Übersicht sind nicht nur die Gütemaße sondern auch die Extremalforderungen angegeben, denen sie genügen müssen. Die Entscheidungsvariablen der Optimierungsprobleme sind die Reglerparameter; die Lösung des Optimierungsproblems liefert dann die im Sinne des Kriteriums optimalen Reglerparameter.

Lineare Regelfläche:	$I_{lin} = \int_0^{\infty} e(t) dt \Rightarrow \text{Min}$	(2.9)
Quadratische Regelfläche:	$I_q = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \Rightarrow \text{Min}$	
ITAE - Kriterium:	$I_{ITAE} = \int_0^{\infty} t e(t) dt \Rightarrow \text{Min}$	

Die lineare Regelfläche kann sinnvoll nur für Regelvorgänge herangezogen werden, die aperiodisch verlaufen, da sich bei schwingenden Regelvorgängen positive und negative Anteile praktisch aufheben. Dieses Problem besteht bei der quadratischen Regelfläche nicht. Das ITAE (Integral of time multiplied absolute value of error)-Kriterium liefert Parameter, die zu schnellen Einschwingvorgängen führen. Es ist darum zur Reglereinstellung für Folgeregelungen, bei denen die Führungsgröße ständig verändert wird, zu empfehlen.

- **Das Betragsoptimum**

Für die Optimierung des Führungsverhaltens kann für die Formulierung eines Optimalitätskriteriums auch der Betrag des Führungs-Frequenzgangs herangezogen werden. Für optimales Führungsverhalten ist zu fordern, dass

$|G_w(j\omega)| \approx 1$

gilt. Wenn diese Forderung für alle Frequenzen erfüllt wäre, läge ideales Führungsverhalten vor, da die Regelgröße der Führungsgröße praktisch verzögerungsfrei folgen

würde. Für technische Systeme ist dies nicht zu erwarten, da (zunehmend mit dem Anwachsen der Frequenz) immer Verzögerungselemente wirksam sind. Das Kriterium wird sich demzufolge immer nur näherungsweise erfüllen lassen.

Die Forderung des Kriteriums wird erfüllt, wenn die Zähler- und Nennerpolynome des Führungs-Frequenzgangs möglichst viele übereinstimmende Koeffizienten besitzen. Aus diesem Sachverhalt heraus lassen sich Bedingungen herleiten, die zu Einstellregeln für den Regler führen. Die Diskussion dieser Bedingungen zeigt aber auch, dass nicht alle Koeffizienten zur Übereinstimmung zu bringen sind, das Kriterium also im allgemeinen nur näherungsweise zu erfüllen ist.

► Beispiel

Für einen Regelkreis, der aus einer Strecke mit PT_2 -Verhalten und einem PI-Regler besteht, sollen Einstellregeln nach dem Kriterium des Betragsoptimums hergeleitet werden. Für die Frequenzgänge von Strecke und Regler gilt:

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \quad G_R(j\omega) = K_R \left(1 + \frac{1}{j\omega T_n} \right)$$

Es werde vorausgesetzt, dass $T_1 > T_2$ gilt.

Der Frequenzgang des aufgetrennten Kreises ergibt sich dann zu:

$$G_0 = G_R G_S = \frac{K(1 + j\omega T_n)}{j\omega T_n(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \quad \text{mit } K = K_R K_S$$

Wenn man die Zeitkonstante T_1 mit der Nachstellzeit T_n kompensiert, so folgt:

$$T_n = T_1 \Rightarrow G_0 = \frac{K}{j\omega T_n(1 + j\omega T_2)}$$

Damit hat man die Einstellregel für die Nachstellzeit. Für den Führungsfrequenzgang folgt mit dem Frequenzgang des aufgeschnittenen Kreises:

$$G_w(j\omega) = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{K}{K + j\omega T_n - T_n T_2 \omega^2}$$

Für den Betrag des Führungs-Frequenzgangs folgt dann:

$$|G_w(j\omega)| = \sqrt{\frac{K^2}{K^2 + \omega^2(T_n^2 - 2T_n T_2 K) + T_n^2 T_2^2 \omega^4}}$$

Um das Betragskriterium erfüllen zu können, müssten die Koeffizienten vor ω^2 und ω^4 verschwinden. Für den Koeffizienten vor ω^2 ist das zu erreichen; man gewinnt damit die folgende Einstellregel für die Reglerverstärkung:

$$T_n^2 - 2T_n T_2 K_R K_S = 0 \Rightarrow K_R = \frac{T_n}{2T_2 K_S}$$

In der Literatur¹ sind Einstellregeln, die auf dem Betragsoptimum basieren, für eine Reihe von Spezialfällen des Regler- und Streckenverhaltens zu finden. Im folgenden sollen zwei für die praktische Anwendung wichtige Fälle (ohne Herleitung) angegeben werden:

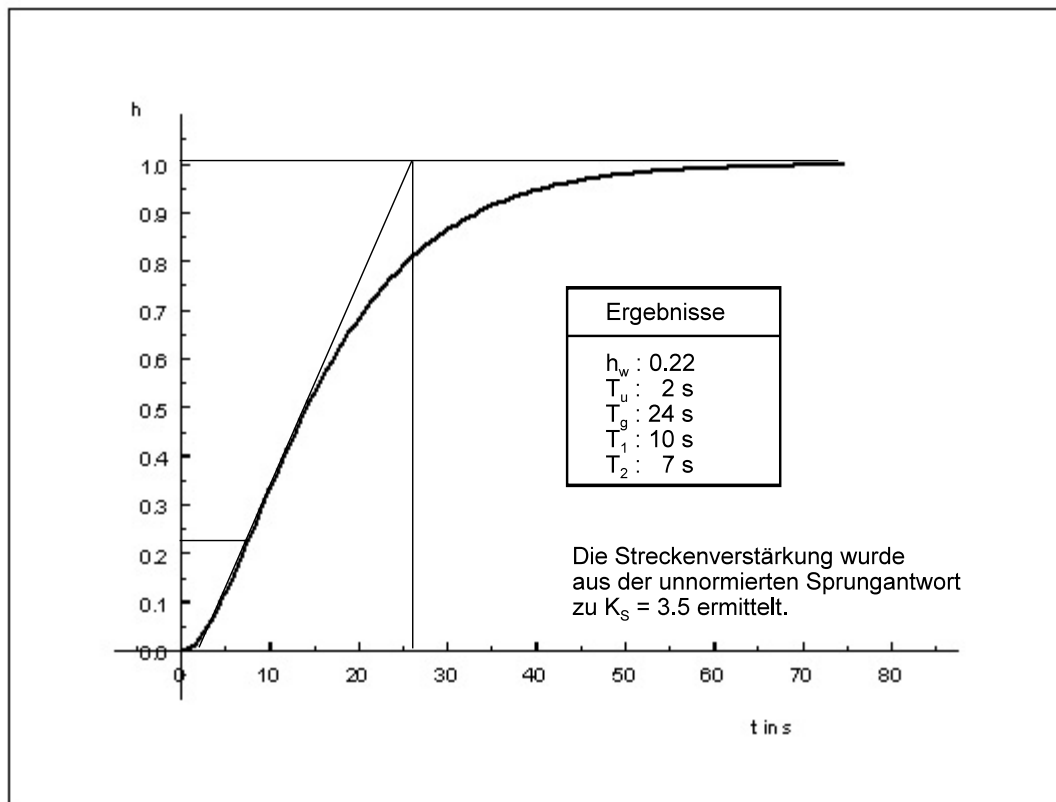
Übertragungsfunktion der Strecke	Übertragungsfunktion des Reglers	Einstellregeln
$\frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}$	PI-Regler $\frac{r_0 + r_1 p}{2 p}$	$r_0 = a_0 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}$ $r_1 = a_1 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - a_0$
$\frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}$	PID-Regler $\frac{r_0 + r_1 p + r_2 p^2}{2 p}$	$D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0^2 & -a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2 a_0 a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_2^2 + 2 a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_0^2 & 0 \\ a_3 & -a_1^2 + 2 a_0 a_2 & a_1 \\ a_5 & a_2^2 + 2 a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & a_0^2 \\ a_3 & -a_2 & -a_1^2 + 2 a_0 a_2 \\ a_5 & -a_4 & a_2^2 + 2 a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 \end{vmatrix}$

¹S. z.B. Föllinger, O. „Regelungstechnik“, Heidelberg, 1990, S. 260

2.4.5 Beispiele zur Reglereinstellung

- **Identifikation der Regelstrecke**

Für die Regelstrecke wurde folgende Sprungantwort ermittelt:

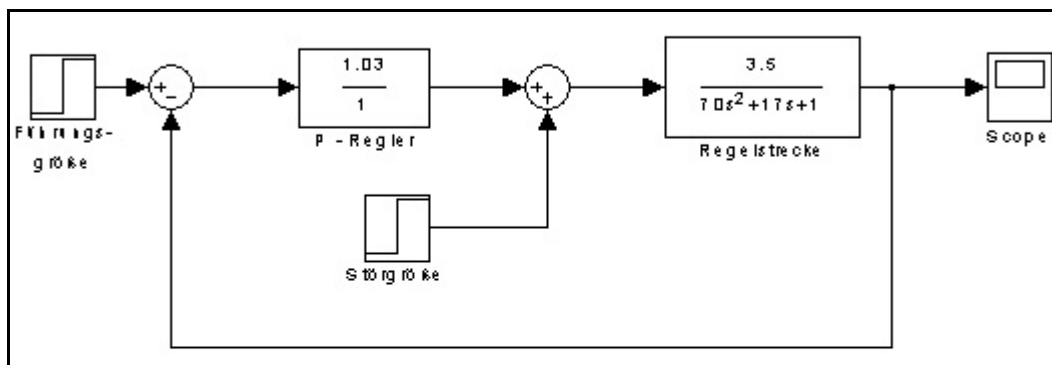


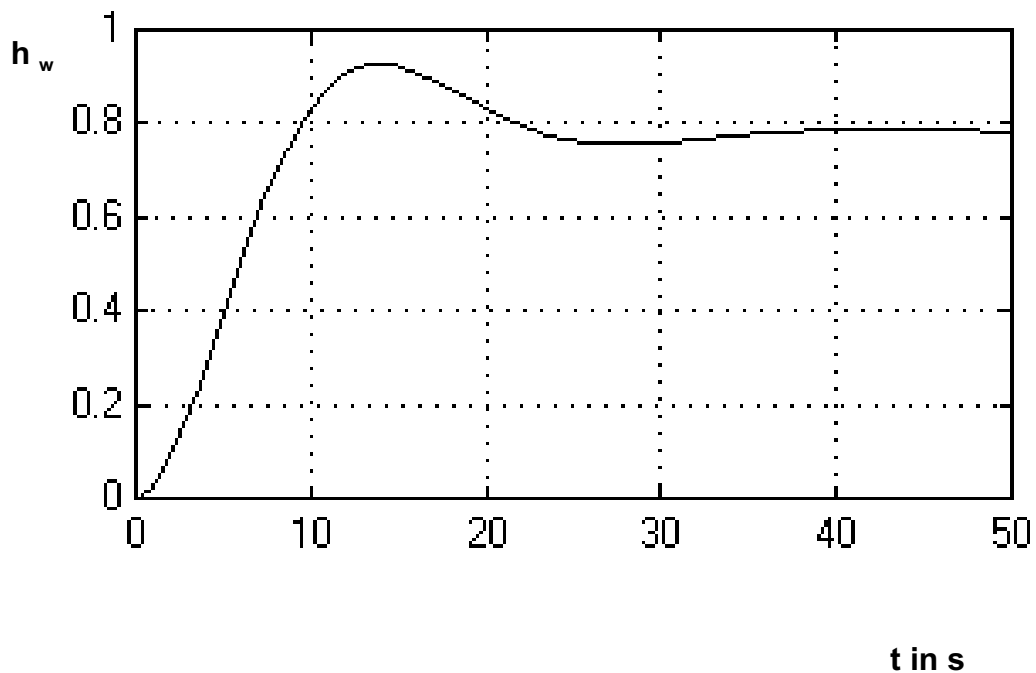
Nach den im Abschnitt 1.5 beschriebenen Verfahren kann das Verhalten der Regelstrecke durch PT_2 -Verhalten mit zwei unterschiedlichen Zeitkonstanten angenähert werden. Nach Ausführung des grafischen Verfahrens ergeben sich die im Bild angegebenen Resultate.

- **P - Regler**

Nach den Regeln von CHIEN, HRONES und RESWICK ergibt sich die Verstärkung des P-Reglers für angestrebtes günstiges Führungsverhalten zu: $K_R = 1.03$

Im folgenden Bild ist die Führungs-Übergangsfunktion des Regelkreises zu sehen. Sie wurde mit der oben abgebildeten Simulink-Struktur ermittelt.





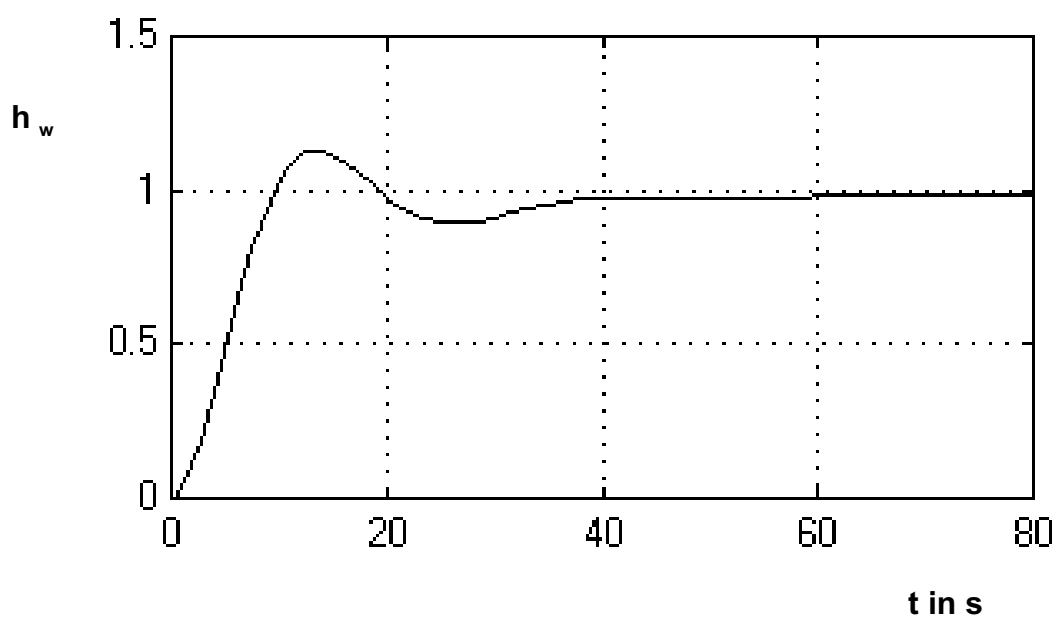
Die zu erwartende bleibende Regeldifferenz ist deutlich zu erkennen.

- **PI-Regler**

Nach den Regeln von CHIEN, HRONES und RESWICK ergeben sich die Verstärkung und die Nachstellzeit des PI-Reglers für angestrebtes günstiges Führungsverhalten, möglichst ohne Überschwingen, zu:

$$K_R = 1.2$$

$$T_n = 28.8 \text{ s}$$



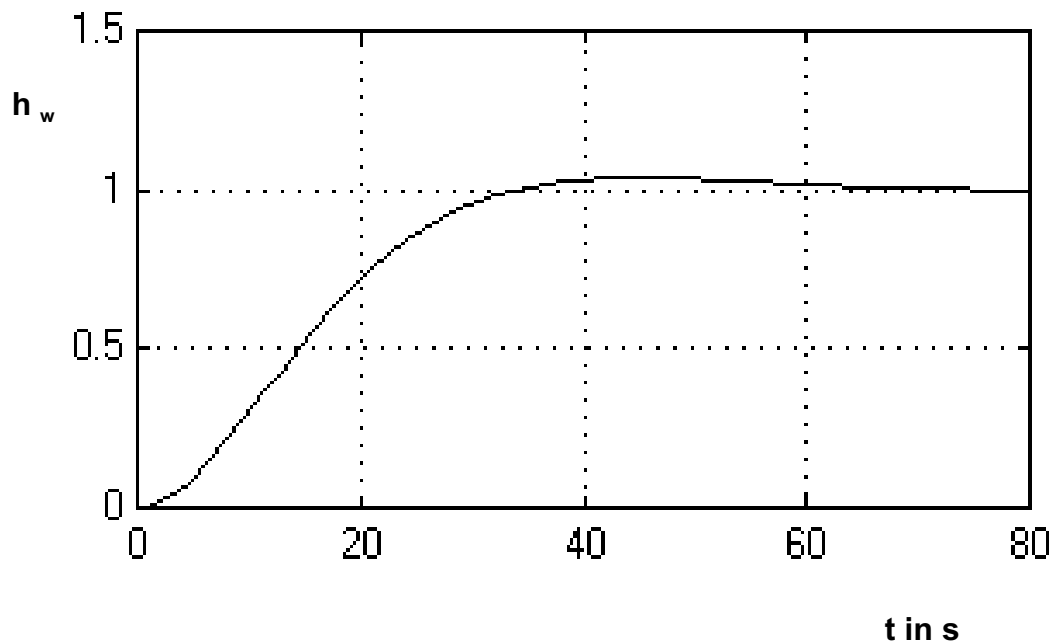
Im Bild ist wieder die Führungs-Übergangsfunktion der Regelgröße dargestellt. Zum einen ist festzustellen, dass keine bleibende Regeldifferenz mehr auftritt. Zum anderen muss registriert werden, dass bei der gewählten Einstellung ein leichtes Überschwingen auftritt. Es liegt in der Natur der empirischen Einstellregeln, dass sie nicht immer alle vorausgesetzten Bedingungen erfüllen.

Der PI-Regler kann, wenn günstiges Führungsverhalten angestrebt wird, auch nach den Einstellregeln, die über das Betragsoptimum gewonnen wurden, parametrisiert werden. Es ergeben sich dann folgende Reglerparameter:

$$T_n = T_1 = 10 \text{ s}$$

$$K_R = 0.2$$

Das nachfolgende Bild zeigt die Führungssprungantwort für diese Reglereinstellung:



- **PID-Regler**

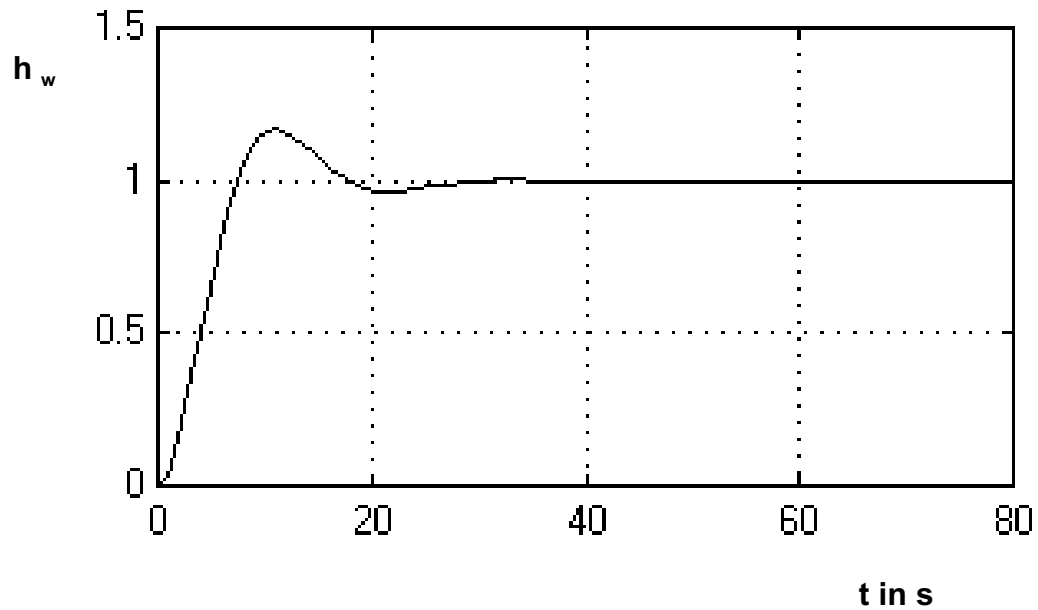
Nach den Regeln von CHIEN, HRONES und RESWICK ergeben sich die Verstärkung, die Nachstellzeit und die Vorhaltzeit eines PID-Reglers für angestrebtes günstiges Führungsverhalten, möglichst ohne Überschwingen, zu:

$$K_R = 2.06$$

$$T_n = 24 \text{ s}$$

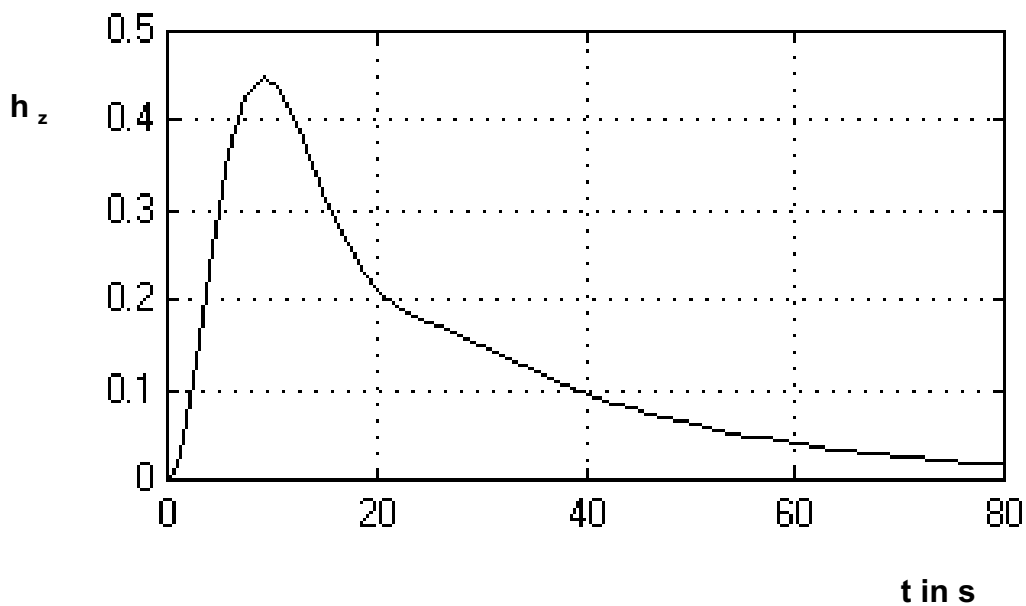
$$T_v = 1.0 \text{ s}$$

Im folgenden Bild ist die Führungs-Übergangsfunktion der Regelgröße dargestellt:



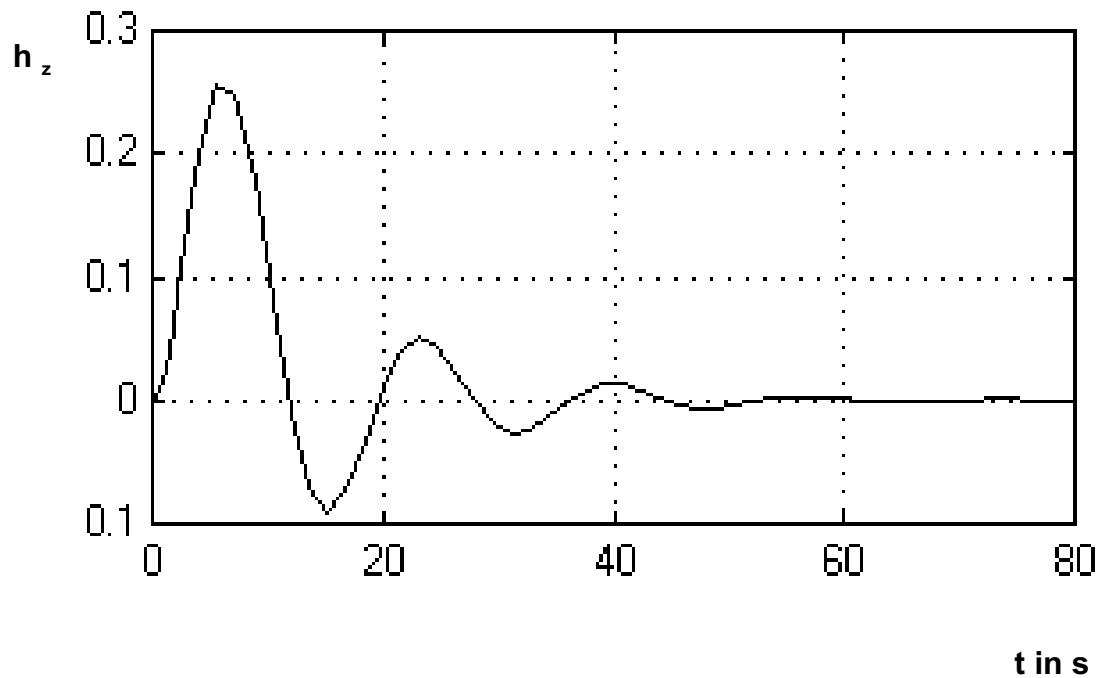
Es ist festzustellen, dass wiederum ein leichtes Überschwingen auftritt, wobei die Überschwingweite größer als im Falle des PI-Reglers ausfällt. Im Gegensatz zum PI-Regler wird die Ruhelage aber schneller erreicht.

Von Interesse ist nun, wie das Störverhalten des Regelkreises ausfällt, wenn die für Führungsverhalten günstige Reglereinstellung beibehalten wird. Im folgenden Bild ist zunächst die Stör-Übergangsfunktion bei der Reglereinstellung für günstiges Führungsverhalten dargestellt; danach wird die Einstellung der Reglers für günstiges Störverhalten ermittelt, und die Stör-Übergangsfunktion wird auch für diesen Fall angegeben.



Nach den Regeln von CHIEN, HRONES und RESWICK ergeben sich die Verstärkung, die Nachstellzeit und die Vorhaltzeit eines PID-Reglers für angestrebtes günstiges Störverhalten, möglichst ohne Überschwingen, zu:

$$\begin{aligned}K_R &= 3.26 \\T_n &= 4.8 \text{ s} \\T_v &= 0.84 \text{ s}\end{aligned}$$



Im Vergleich zu der auf das Führungsverhalten optimierten Einstellung ist festzustellen, dass der Störsprung schneller abgebaut wird und dass eine geringere Überschwingweite der Regelgröße auftritt.

3. Erweiterte Regelungsstrukturen

3.1 Strukturelle Erweiterungen des einschleifigen Regelkreises

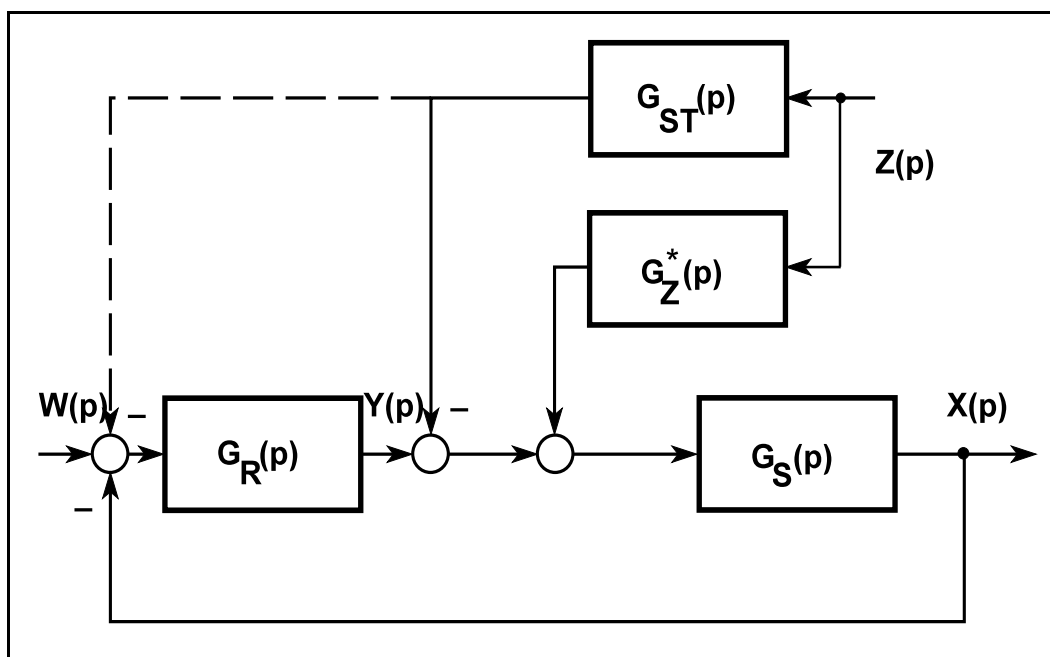
Der einschleifige Regelkreis besitzt Grenzen, die in seiner Wirkungsstruktur begründet sind. So ist es möglich, dass trotz optimierter Einstellparameter keine befriedigende Regelgüte erreicht wird. Abhilfe lässt sich dann nur durch strukturelle Veränderungen schaffen, die vor allem darauf gerichtet sind, Störungen frühzeitig zu erkennen; dadurch wird erreicht, dass auf die Störung reagiert werden kann, bevor ihre Wirkung auf die Regeldifferenz zur Reaktion des Reglers führt.

Im folgenden werden zwei wichtige strukturelle Erweiterungen des einschleifigen Regelkreises behandelt, die unter bestimmten Bedingungen zur Verbesserung des Störverhaltens führen können.

3.2 Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung

Voraussetzung für eine Störgrößenaufschaltung ist die Messbarkeit der Störgröße. Unter dieser Bedingung kann der Regelkreis durch eine überlagerte Steuerung ergänzt werden. Im folgenden Bild sind im Signalflussplan die prinzipiellen Möglichkeiten der Störgrößenaufschaltung dargestellt. Die Übertragungsfunktion $G_Z^*(p)$ berücksichtigt, dass die Wirkung der Störung auf die Strecke anders beschaffen sein kann, als auf die durch die Steuerübertragungsfunktion $G_{ST}(p)$ beschriebene, überlagerte Steuerung.

Die Stabilität und das Führungsverhalten des Regelkreises werden durch die Störgrößenaufschaltung nicht berührt, da sie auf die Übertragungsfunktion des offenen Kreises und auf die Führungsübertragungsfunktion keinen Einfluss hat.



Signalflussplan für Störgrößenaufschaltung

Im Signalflussplan sind zwei Möglichkeiten der Störgrößenaufschaltung gezeigt:

- a) die Aufschaltung auf den Streckeneingang
- b) die Aufschaltung auf den Reglereingang.

Für den Fall a) lässt sich die Steuerübertragungsfunktion $G_{ST}(p)$ wie folgt ermitteln:

Es gilt

$$X(p) = G_S(p) \left(G_Z^*(p)Z(p) - G_{ST}(p)Z(p) + Y(p) \right)$$

Da $Y(p)$ nicht von $Z(p)$ explizit abhängt, kann die Wirkung der Störung auf die Regelgröße dadurch verhindert werden, dass die Stellgröße der überlagerten Steuerung zu jedem Zeitpunkt der Störung entgegenwirkt (dynamische Invarianz), wenn also gilt:

$$\boxed{G_{ST}(p) = G_Z^*(p)} \quad (3.1)$$

Im Fall b) (gekennzeichnet durch die unterbrochene Wirkungslinie im Signalflussplan) ergibt sich aus den zwei Gleichungen (die aus dem Signalflussplan abzulesen sind)

$$X(p) = G_S(p) \left(G_Z^*(p)Z(p) + Y(p) \right)$$

$$Y(p) = G_R(p) \left(W(p) - X(p) - G_{ST}(p)Z(p) \right)$$

Wenn die zweite in die erste Gleichung eingesetzt wird, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$X(p) = \frac{G_0(p)}{1 + G_0(p)} W(p) + \frac{G_S(p) \left(G_Z^*(p) - G_R(p)G_{ST}(p) \right)}{1 + G_0(p)} Z(p)$$

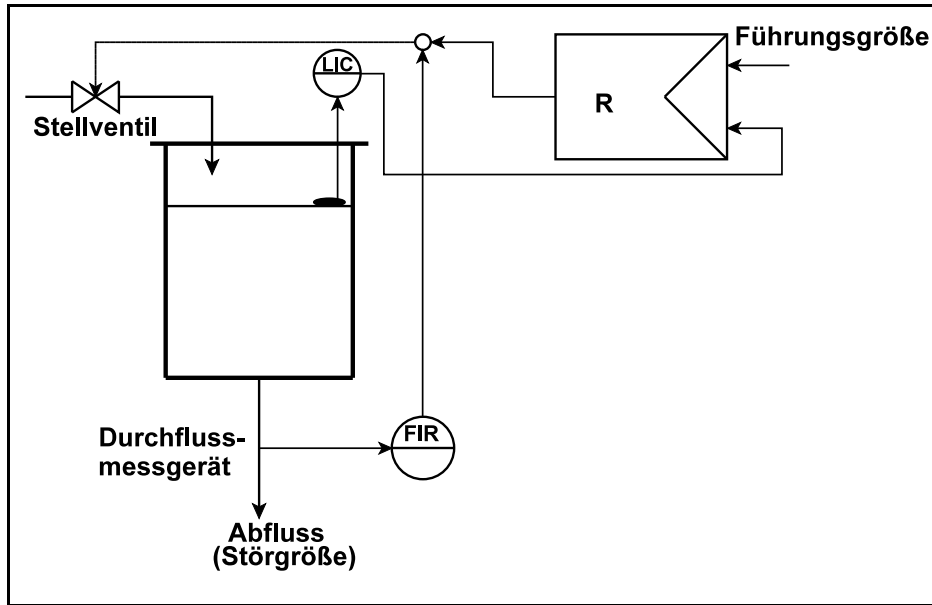
Aus dieser Gleichung folgt, dass die Wirkung der Störgröße auf die Regelgröße genau dann aufgehoben wird, wenn der zweite Term dieser Gleichung verschwindet. Das ist der Fall, wenn gilt:

$$\boxed{G_{ST}(p) = \frac{G_Z^*(p)}{G_R(p)}} \quad (3.2)$$

Wenn die überlagerte Steuerung diese Übertragungsfunktion realisiert, wird dynamische Invarianz erreicht.

► **Beispiel**

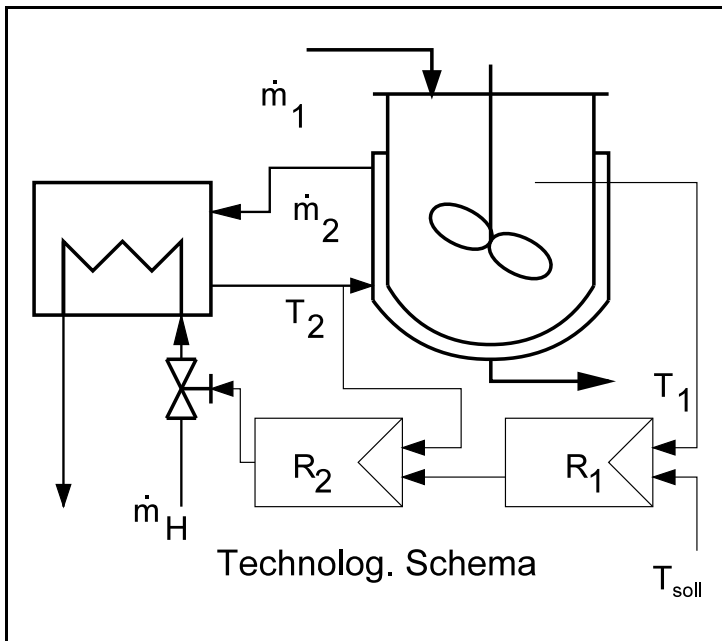
Im nachfolgenden Bild ist das Prinzipschema für eine Störgrößenaufschaltung bei einer Füllstandsregelung gegeben; dabei greift die Störgrößenaufschaltung am Streckeneingang an.



Prinzipschema einer Füllstandsregelung mit Störgrößenaufschaltung

3.3 Regelkreis mit Hilfsregelgröße

Nicht in jedem Falle ist die Messung der Störgröße möglich. Mitunter lassen sich aber auch Zustandsgrößen messen, die empfindlicher auf die Störgröße reagieren als die eigentliche Regelgröße. Wenn diese Größen für die Regelung herangezogen werden, entstehen zusätzliche Kreise für diese Hilfsregelgrößen, die miteinander gekoppelt sind. Die Einführung von Hilfsregelgrößen hat auch Auswirkungen auf die Stabilitätsreserve und das Führungsverhalten der Regelung.



Regelkreis mit Hilfsregelgröße

Die Einführung von Hilfsregelgrößen setzt die sinnvolle Zerlegung der Regelstrecke voraus. Das ist nur möglich auf der Basis einer soliden Prozessanalyse. Bei dieser Methode werden somit höhere Ansprüche an die Prozessanalyse gestellt als bei der Störgrößenaufschaltung.

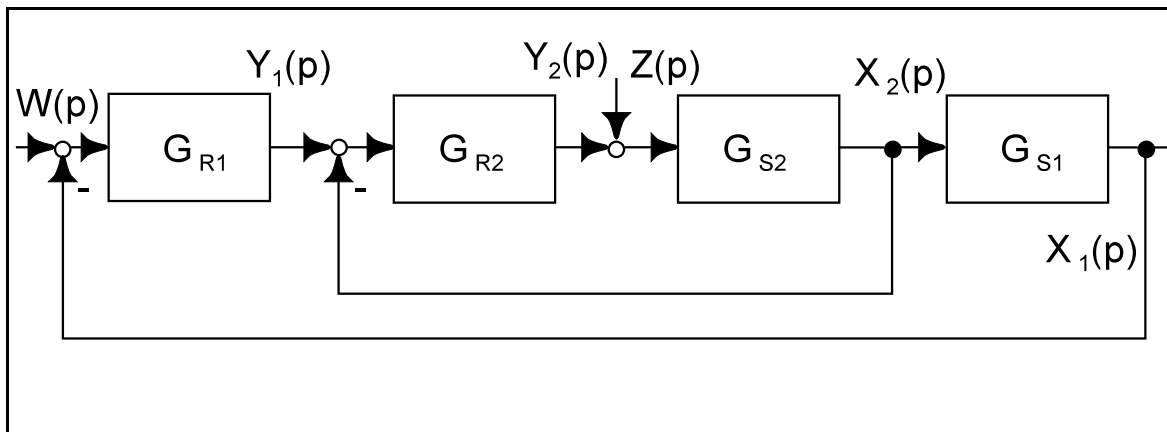
► Beispiel

Im nebenstehenden Bild ist das System für die Beheizung eines Reaktors dargestellt. Hauptregelgröße ist die Temperatur im Reaktor, Hilfsregel-

größe ist die Temperatur im Heizkreislauf. Die Stellgröße des Reglers im Hauptregelkreis wird zur Führungsgröße des Regelkreises für die Hilfsregelgröße. Störungen, die auf das Heizsystem wirken, werden durch den unterlegten Hilfsregelkreis ausgegletzt; sie machen sich praktisch nicht mehr in der Regeldifferenz der Reaktortemperatur bemerkbar.

- **Kaskadenregelung**

Das Beispiel stellt eine Struktur dar, die sich verallgemeinern lässt und die als Kaskadenregelung bezeichnet wird. Im folgenden Bild ist der Signalfussplan für den allgemeinen Fall dargestellt:



Dabei gelten folgende Zuordnungen zum Beispiel

Allgemeiner Fall	Beispiel
Hauptregelgröße x_1	Temperatur im Reaktor T_1
Hilfsregelgröße x_2	Temperatur im Heizsystem T_2
Führungsgröße w	Solltemperatur im Reaktor T_{soll}
Hauptstellgröße y_1	Ausgangsgröße des Reglers R_1
Hilfsstellgröße y_2	Ausgangsgröße des Reglers R_2
Störgröße z	Vordruck vor dem Ventil, über das der Strom des Heizmediums \dot{m}_H eingestellt wird.

Aus dem Signalfussplan lassen sich sofort folgende Beziehungen herleiten:

$$X_1(p) = G_{S1}(p)X_2(p)$$

$$Y_1(p) = G_{R1}(p)(W(p) - X_1(p))$$

$$X_2(p) = G_{S2}(p)(Y_2(p) + Z(p))$$

$$Y_2(p) = G_{R2}(p)(Y_1(p) - X_2(p))$$

Für die Hauptregelgröße ergibt sich dann folgende Verknüpfung mit den Eingangsgrößen des Regelkreises (das Argument p wird weggelassen):

$$X_1 = \frac{G_{S1} G_{S2} G_{R1} G_{R2}}{1 + G_{S2} G_{R2} + G_{S1} G_{S2} G_{R1} G_{R2}} W + \frac{G_{S1} G_{S2}}{1 + G_{S2} G_{R2} + G_{S1} G_{S2} G_{R1} G_{R2}} Z$$

(3.3)

Für die Störübertragungsfunktion folgt dann:

$$G_Z(p) = \frac{X_1(p)}{Z(p)} = \frac{G_{S1}(p) G_{S2}(p)}{1 + G_{S2}(p) G_{R2}(p) + G_{S1}(p) G_{S2}(p) G_{R1}(p) G_{R2}(p)}$$

Die Führungsübertragungsfunktion lässt sich in gleicher Weise aus der Ausgangsbeziehung herleiten.

$$G_W(p) = \frac{X_1(p)}{W(p)} = \frac{G_{S1}(p) G_{S2}(p) G_{R1}(p) G_{R2}(p)}{1 + G_{S2}(p) G_{R2}(p) + G_{S1}(p) G_{S2}(p) G_{R1}(p) G_{R2}(p)}$$

Für die Auslegung der Regler einer Kaskadenregelung wird wie folgt vorgegangen:

- Zunächst wird der innere Kreis betrachtet. Häufig wird ein PI-Regler für diesen Kreis gewählt. Es kann aber auch durchaus ein P-Regler eingesetzt werden, da es bei diesem Kreis vor allem auf Geschwindigkeit und weniger auf die statische Regelgüte ankommt. Der innere Kreis muss dafür sorgen, dass Störungen vom äußeren Kreis ferngehalten werden. Andererseits muss der Kreis auch schnell auf sich verändernde Führungsvorgaben des äußeren Kreises reagieren.
- Der innere Kreis und die Regelstrecke des äußeren Kreises werden zu einem Übertragungsglied zusammengefasst, auf das der Regler des äußeren Kreises wirkt. Wenn man annehmen kann, dass der innere Regelkreis sehr viel schneller reagiert als der äußere, kann man den inneren Kreis wie ein statisches Übertragungsglied behandeln.
- Der Regler des äußeren Kreises wird so eingestellt, dass das Führungsverhalten dieses Kreises optimal wird. Häufig wird im äußeren Kreis ein PI-Regler eingesetzt, da für diesen Kreis auch die statische Regelgüte maßgebend ist.

► **Beispiel**

Es ist eine Kaskadenregelung zu entwerfen, wobei die Teilstrecken durch folgende Übertragungsfunktionen gegeben sind:

$$G_{S1}(p) = \frac{K_{S1}}{(1 + p T_1)} \quad \text{mit } K_{S1} = 1.5, T_1 = 8.2 \text{ s}$$

$$G_{S2}(p) = \frac{K_{S2}}{(1 + p T_1)(1 + p T_2)} \quad \text{mit } K_{S2} = 3.5, T_1 = 9 \text{ s}, T_2 = 5 \text{ s}$$

Für den inneren Kreis soll ein P-Regler eingesetzt werden; für den äußeren Kreis dagegen ein PI-Regler.

Für die Führungsübertragungsfunktion des inneren Kreises folgt nach kurzer Rechnung:

$$G_{W2}(p) = \frac{\frac{K_2}{K_2 + 1}}{1 + \frac{(T_1 + T_2)}{K_2 + 1} p + \frac{T_1 T_2}{K_2 + 1} p^2} \quad \text{mit } K_2 = K_{R2} K_{S2}$$

Es liegt damit PT_2 - Verhalten vor. Für die Eigenfrequenz und die Dämpfung gelten die Beziehungen:

$$\frac{2D}{\omega_0} = \frac{T_1 + T_2}{K_2 + 1}, \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T_1 T_2}{K_2 + 1}$$

Diese lassen sich umformen zu einer Beziehung für die Reglerverstärkung:

$$K_{R2} = \frac{1}{K_{S2}} \left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 D^2 T_1 T_2} - 1 \right]$$

Wenn man die Dämpfung vorgibt, kann man damit die Reglerverstärkung bestimmen. Für ein günstiges Übertragungsverhalten wählt man $D^2 = 0.5$. Mit den oben gegebenen Streckenparametern folgt damit für die Verstärkung des P-Reglers im inneren Kreis:

$$K_{R2} = 0.34$$

Für die Führungsübertragungsfunktion des inneren Kreises ergibt sich damit:

$$G_{W2} = \frac{0.54}{1 + a_1 p + a_2 p^2} \quad \text{mit } a_1 = 6.4 \text{ s}, a_2 = 20.5 \text{ s}^2$$

Der PI-Regler des äußeren Kreises wird nach dem Betragsoptimum eingestellt. Dafür ist zunächst die Übertragungsfunktion der Reihenschaltung des inneren Kreises mit der äußeren Teilstrecke zu bestimmen. Es gilt:

$$G_{S1}^*(p) = G_{W2}(p) G_{S1}(p)$$

Wenn man diese Multiplikation ausführt und dabei die für die Formeln des Betragsoptimums notwendige Darstellung der Übertragungsfunktion berücksichtigt, erhält man:

$$G_{S1}^*(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}$$

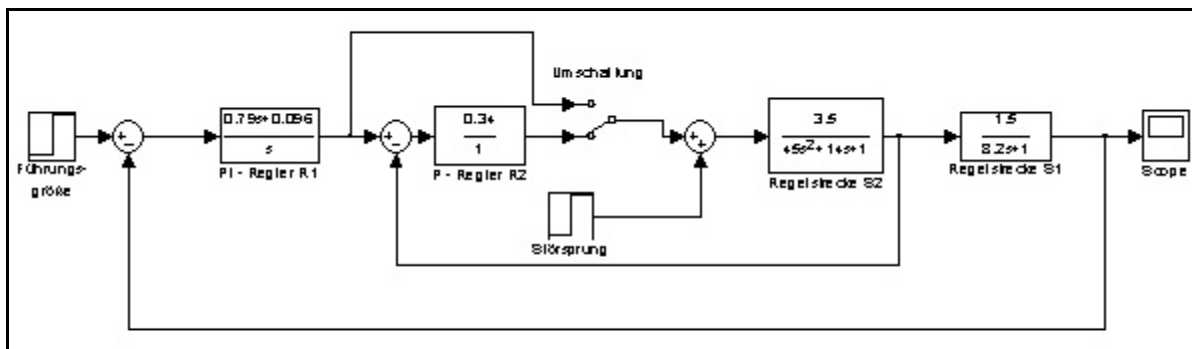
mit $a_0 = 1.23$, $a_1 = 18.0 \text{ s}$, $a_2 = 90.1 \text{ s}^2$, $a_3 = 207.5 \text{ s}^3$

Mit den im Abschnitt 2.4.4 angegebenen Formeln für die Einstellung eines PI-Reglers nach dem Betragsoptimum folgt mit diesen Parametern:

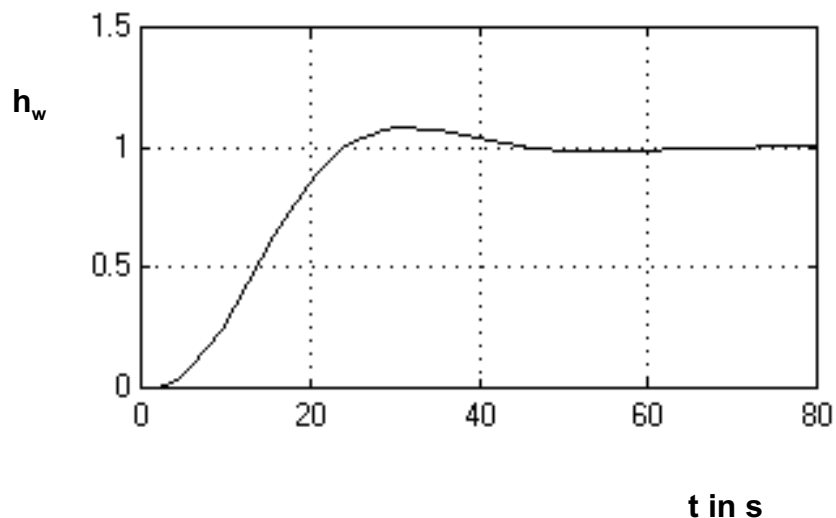
$$G_{R1}(p) = \frac{r_0 + r_1 p}{2 p} \quad \text{mit } r_0 = 0.19 \text{ , } r_1 = 1.58 \text{ s}$$

$$K_{R1} = \frac{r_1}{2} \Rightarrow K_{R1} = 0.79 \quad T_{nR1} = \frac{r_1}{r_0} \Rightarrow T_{nR1} = 8.2 \text{ s}$$

Damit sind die Einstellungen für beide Regler gefunden. Im folgenden soll noch untersucht werden, welche Form die Führungs-Übergangsfunktion des kompletten Systems annimmt. Dazu wird eine Simulink-Struktur entwickelt, die die Kaskadenregelung realisiert.

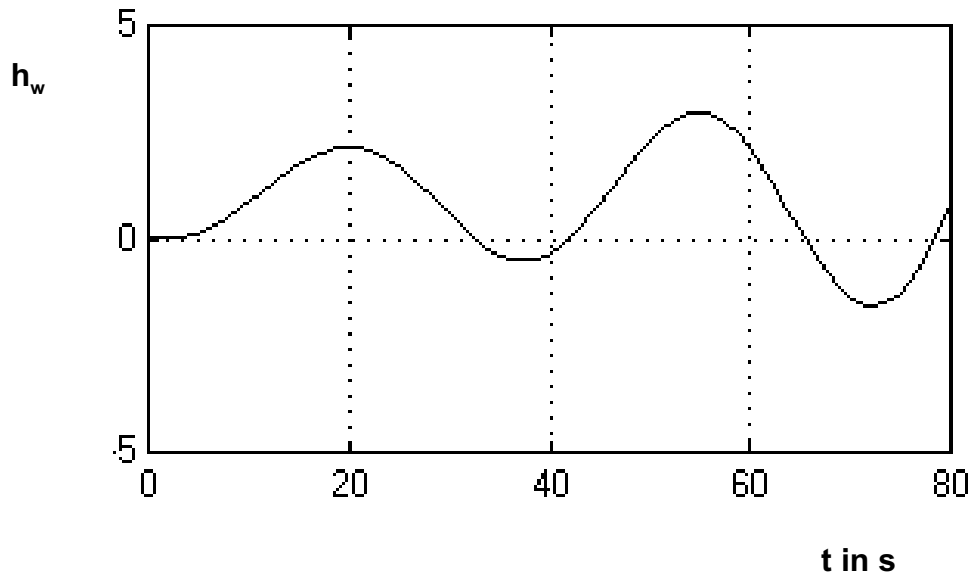


Durch den Schalter kann auch der Fall nachgebildet werden, der ohne den unterlagerten Hilfsregelkreis auftritt; in diesem Falle besteht der Kreis aus den beiden Teilen der Regelstrecke und dem Hauptregler.



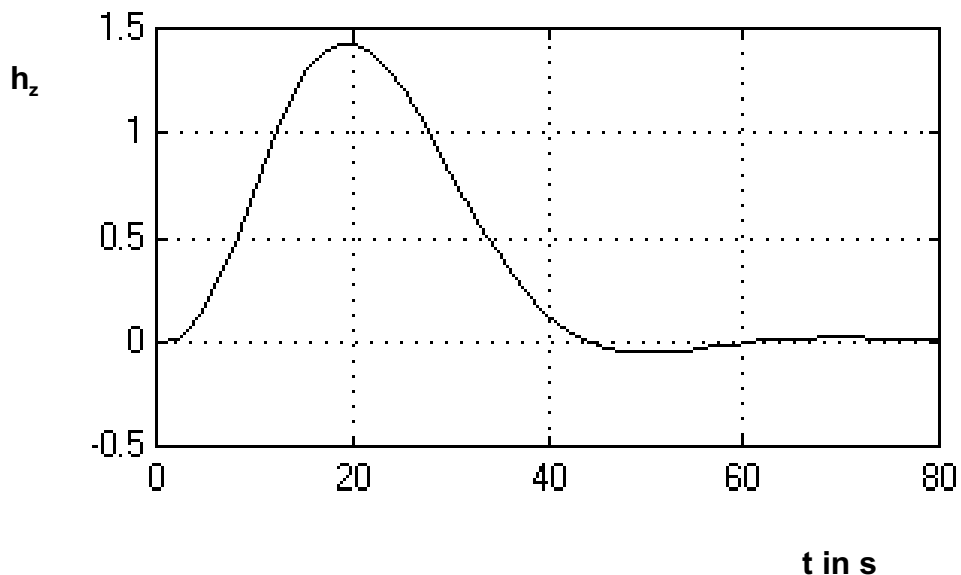
Im Bild ist die Führungs-Übergangsfunktion der Kaskadenregelung, die mit den oben angegebenen Parametern ermittelt wurde, dargestellt.

Wenn man den Schalter so stellt, dass der innere Regelkreis inaktiv ist, so ergibt sich (bei Beibehaltung aller Parameter) die folgende Führungs-Übergangsfunktion:



Es ist zu erkennen, dass der Kreis in diesem Falle instabil wäre.

Mit den gewählten Parametern ergibt sich die folgende Stör-Übergangsfunktion:



Dieser Verlauf legt die Vermutung nahe, dass die Verstärkung des P-Reglers im inneren Kreis zu gering gewählt wurde. Durch eine gezielte Variation dieses Reglerparameters lässt sich das Störverhalten weiter verbessern.

4. Regelkreise mit nichtlinearen Elementen

4.1 Ursachen für Nichtlinearitäten

Wenn ein Element oder mehrere Elemente eines Regelkreises nichtlineare Kennlinien besitzen, kann der Regelkreis nicht mit den bisher entwickelten Methoden beschrieben werden. Eine geschlossene Theorie, wie es sie für lineare Systeme gibt, existiert für nichtlineare Systeme nicht.

Nichtlinearitäten im Regelkreis können sowohl durch nichtlineares Verhalten der Regelstrecke als auch durch nichtlineares Verhalten der Regeleinrichtung bedingt sein. Dabei treten unterschiedliche Typen nichtlinearen Verhaltens auf. Nichtlineares Streckenverhalten kann vielfältige, in den Gesetzmäßigkeiten der Prozesse begründete Ursachen haben. Wenn dagegen die Regeleinrichtung nichtlineares Verhalten besitzt, so kann das durchaus beabsichtigt sein. Das trifft auf alle Reglertypen zu, die als Schalter mit einer endlichen Anzahl von Zuständen arbeiten. Auch die zunehmend an Bedeutung gewinnenden Fuzzy-Regler sind nichtlineare Kennfeldregler.

4.2 Zweipunktregelung

Der Regler arbeitet als Schalter, der zwei Signalzustände hat. Die Schalterfunktion kann wie folgt beschrieben werden:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{wenn } e < 0 \\ 1 & \text{wenn } e \geq 0 \end{cases}$$

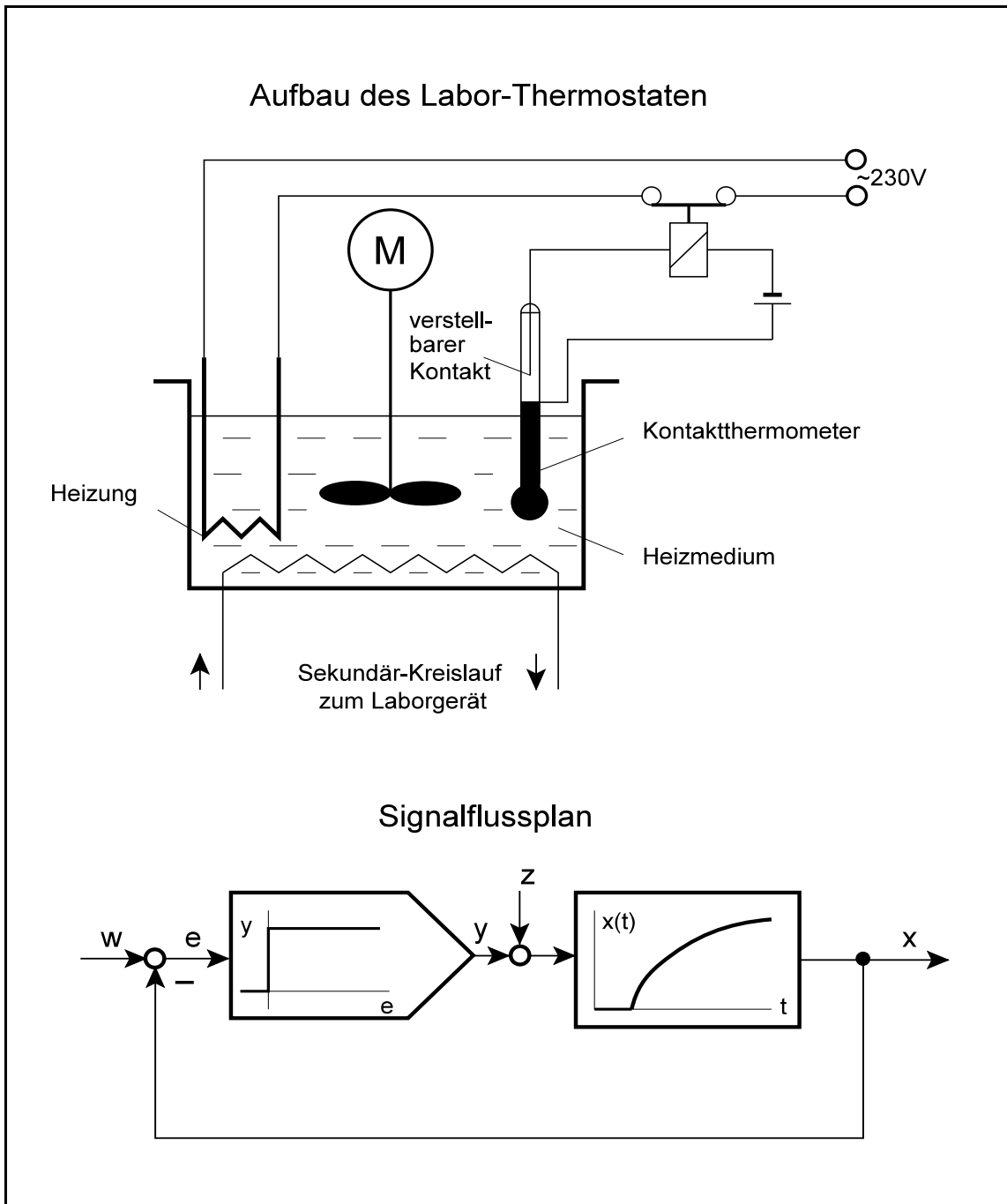
Die technische Realisierung von Zweipunktreglern ist sehr einfach. Das ist ein wesentlicher Vorteil. Von Nachteil ist aber, dass, bedingt durch das schaltende Verhalten des Reglers, die Regelgröße ständig um den Sollwert pendelt. Durch eine geschickte Dimensionierung kann man diesen Nachteil in vielen Fällen so weit mindern, dass der Vorteil der einfachen und robusten Realisierung ausschlaggebend ist.

► Beispiel

Im folgenden Bild ist ein Beispiel für den Einsatz eines Zweipunktreglers angegeben. Neben dem Geräteschema ist auch der Signalflussplan im Bild enthalten.

Das Beispiel steht für ein breites Anwendungsfeld von Zweipunktreglern, nämlich für das der Temperaturregelungen an Strecken mit großer Wärmekapazität. Das Verhalten dieser Strecken kann man sehr gut durch eine Reihenschaltung eines Totzeitgliedes und eines P-Gliedes mit Verzögerung erster Ordnung beschreiben. Im Signalflussplan ist die Sprungantwort eines derartigen Übertragungsgliedes dargestellt. Die Übertragungsfunktion hat dann die folgende Gestalt:

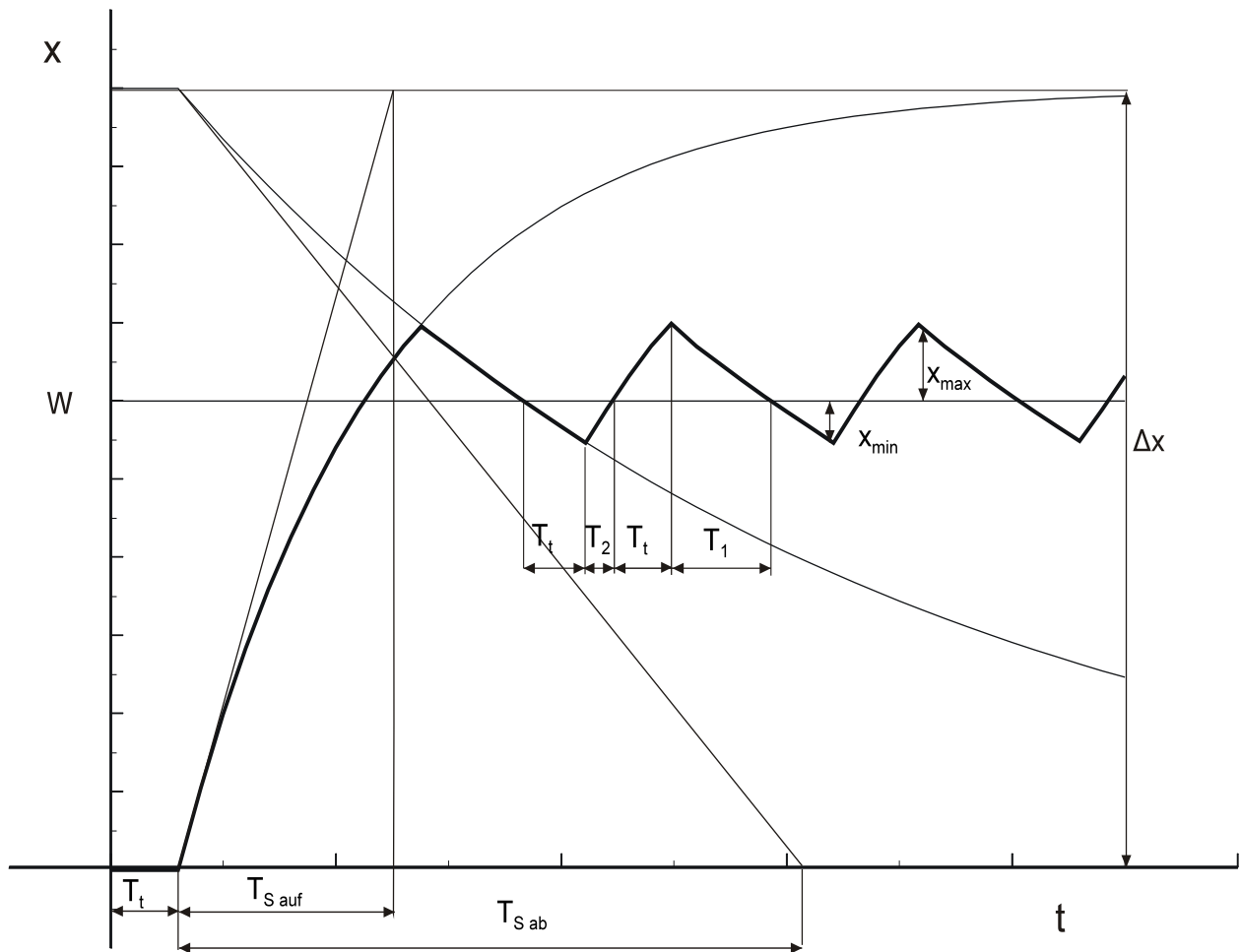
$$G(p) = \frac{K_p}{1 + T_p p} e^{-T_t p}$$



Beispiel für Zweipunktregelung

Im folgenden Bild ist das Arbeitsdiagramm des Zweipunktreglers in einer beispielhaften Darstellung gegeben. Für die Periodendauer einer Arbeitsbewegung gilt:

$$T = 2T_t + T_1 + T_2$$



Die Arbeitsbewegungen kann man durch Geradenstücke annähern, die durch die Tangenten im Schnittpunkt mit der Geraden $w = \text{const.}$ entstehen. Es lassen sich dann durch geometrische Überlegungen folgende Beziehungen (über Ähnlichkeitsbetrachtungen am Dreieck bzw. über die Strahlensätze) herleiten:

$$\frac{T_t}{T_{S_{\text{auf}}}} = \frac{x_{\text{max}}}{\Delta x - w}, \quad \frac{T_t}{T_{S_{\text{ab}}}} = \frac{x_{\text{min}}}{w}, \quad \frac{T_1}{T_t} = \frac{x_{\text{max}}}{x_{\text{min}}}, \quad \frac{T_2}{T_t} = \frac{x_{\text{min}}}{x_{\text{max}}}$$

(4.1)

Die wesentlichen Kenngrößen der Arbeitsbewegung lassen sich mit Hilfe dieser Beziehungen durch die Kennwerte der Strecke und durch den Sollwert ausdrücken. Es gilt:

- Mittlere Regeldifferenz:

$$\bar{e} = \frac{x_{\min} - x_{\max}}{2} = \frac{T_t}{2} \left(\frac{w}{T_{S_{ab}}} - \frac{\Delta x - w}{T_{S_{auf}}} \right) \quad (4.2)$$

- Amplitude der Pendelbewegung:

$$A = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = \frac{T_t}{2} \left(\frac{w}{T_{S_{ab}}} + \frac{\Delta x - w}{T_{S_{auf}}} \right) \quad (4.3)$$

- Schwingungsdauer:

$$T = T_{\text{ein}} + T_{\text{aus}} = T_t \left(2 + \frac{T_{S_{ab}} (\Delta x - w)}{T_{S_{auf}} w} + \frac{T_{S_{auf}} w}{T_{S_{ab}} (\Delta x - w)} \right) \quad (4.4)$$

- Schaltverhältnis:

$$\frac{T_{\text{ein}}}{T_{\text{aus}}} = \frac{T_t + T_2}{T_t + T_1} = \frac{1 + \left(\frac{x_{\min}}{x_{\max}} \right)}{1 + \left(\frac{x_{\max}}{x_{\min}} \right)} = \frac{x_{\min}}{x_{\max}} \quad (4.5)$$

Am günstigsten verläuft die Arbeitsbewegung, wenn $\bar{e} = 0$ ist, das tritt ein bei:

$$w = w_{\text{opt}} = \Delta x \frac{T_{S_{ab}}}{T_{S_{ab}} + T_{S_{auf}}}, \quad \text{dann gilt:} \quad (4.6)$$

$$A = x_{\max} = x_{\min}, \quad T = T_{\text{ein}} + T_{\text{aus}} = 4 T_t, \quad \frac{T_{\text{ein}}}{T_{\text{aus}}} = 1$$

Für den Sonderfall $T_{S_{auf}} = T_{S_{ab}} = T_S$ vereinfachen sich (4.2) bis (4.6) zu:

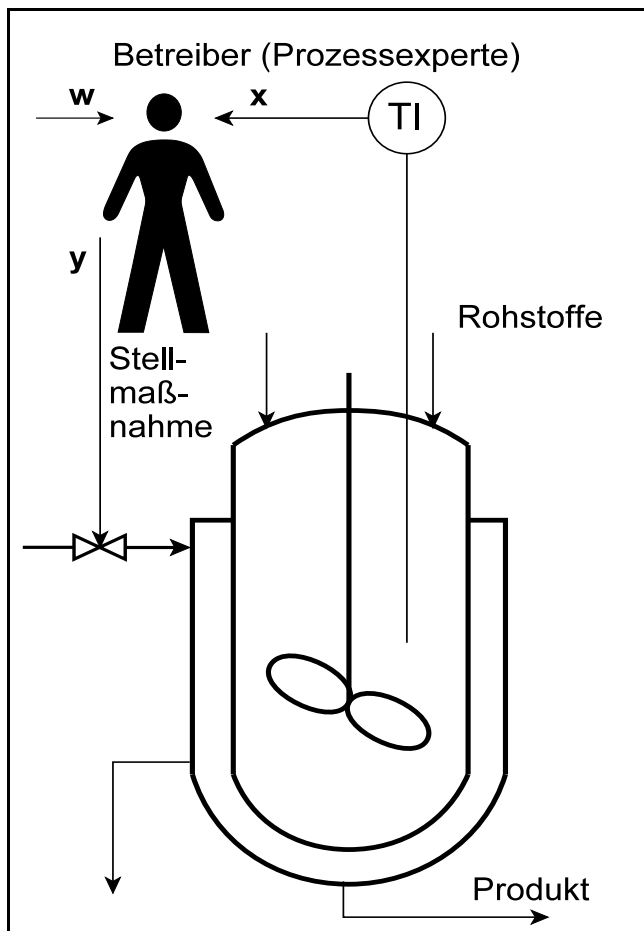
$$\bar{e} = \frac{T_t}{2T_s} (2w - \Delta x) \quad , \quad A = \frac{T_t}{2T_s} \Delta x$$

$$T = T_t \left(2 + \frac{\Delta x - w}{w} + \frac{w}{\Delta x - w} \right) \quad , \quad w_{opt} = \frac{\Delta x}{2}$$
(4.7)

4.3 Fuzzy-Regler

Für eine Reihe von Prozessen, die durch Regelung stabilisiert werden sollen, ist es schwierig, das Verhalten hinreichend genau mathematisch zu beschreiben. Mitunter gibt es aber Erfahrungen und ein gewisses "Expertenwissen", die für die Modellierung der Regelung genutzt werden können. Die systematische Analyse dieser Wissensformen über den Prozess und seine stabile Führung führt auf Regler, die regelbasiert Entscheidungen finden. Eine wichtige Erweiterung dieses Konzeptes stellt der Fuzzy-Regler dar, der in Grundzügen im folgenden dargestellt wird.

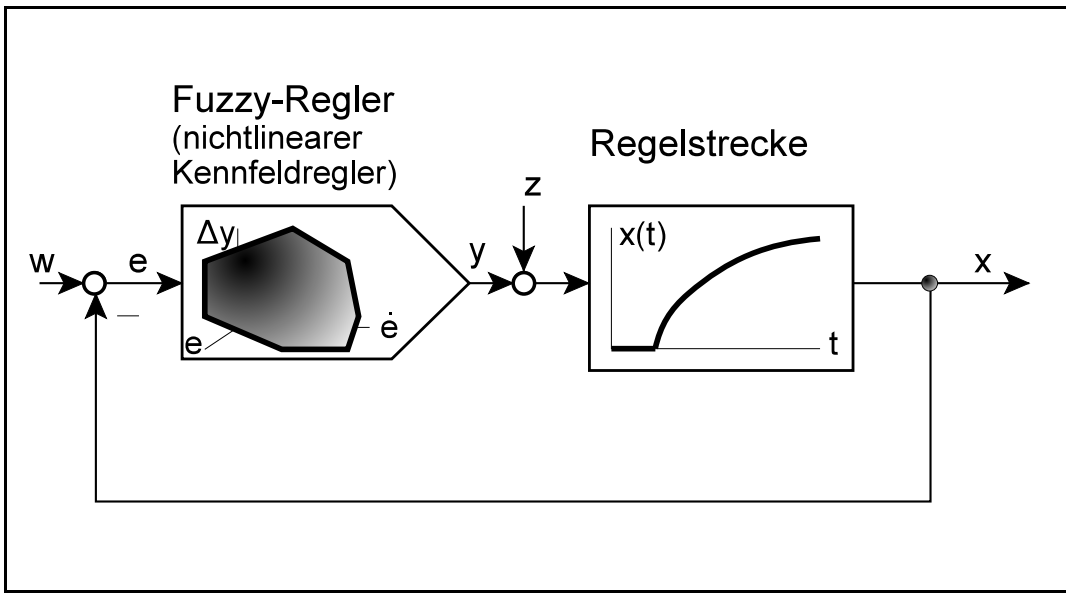
4.3.1 Ein einführendes Beispiel



Der Betreiber des Prozesses (der "Prozess-Experte") nutzt für die Bildung der Stellmaßnahme sein Erfahrungswissen über den Prozess. Dieses Wissen kann als Grundlage für den Entwurf eines Reglers genutzt werden. Dieser Regler basiert im Kern auf einem Regelsystem, das das in Form unscharfer Aussagen abhebbare Expertenwissen repräsentiert. Die unscharfe Logik (engl. fuzzy logic) stellt die formalen Gesetze bereit, die es erlauben, in einem solchen Regelsystem aus vorgegebenen Prämissen Schlussfolgerungen abzuleiten. Im Abschnitt 4.3.4. wird das nachfolgend im Überblick dargestellte Beispiel in seiner quantitativen Umsetzung behandelt. Das Wissen über die Prozessführung lässt sich als System von Regeln der folgenden Form darstellen:

WENN die Regeldifferenz *<positiv groß ... verschwindend ... negativ groß>* ist
UND die Änderungsgeschwindigkeit der Regeldifferenz *<positiv groß ... verschwindend ... negativ groß>* ist
DANN Ändere die Ventilstellung *< positiv stark...nicht...negativ stark>*

Dieses Regelsystem lässt sich auf der Grundlage des Formalismus der **Unscharfen Logik (Fuzzy-Logic)** modellieren und auf einem technischen System (Rechner, spezieller Schaltkreis usw.) implementieren. Die Struktur, die so entsteht, ist ein Regelkreis mit einem speziellen nichtlinearen Regler. Regler, die auf der Basis unscharfer Regelsysteme arbeiten, werden als **Fuzzy-Regler** bezeichnet.



Signalflussplan des Regelkreises mit Fuzzy-Regler

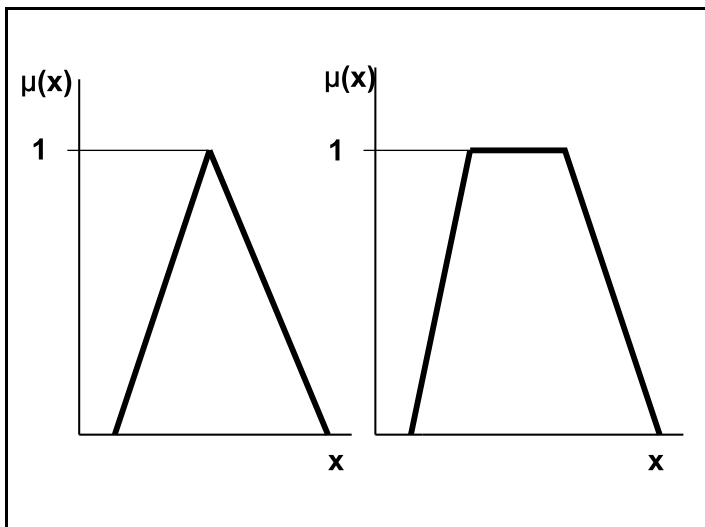
4.3.2 Grundbegriffe der Unscharfen Logik (Fuzzy-Logic)

- **Linguistische Variable**

Linguistische Variablen beschreiben die Merkmale eines Systems in einer Form, die die Unschärfe des sprachlichen Ausdrucks berücksichtigt. Die "Werte", die linguistische Variablen annehmen können, sind verbale Aussagen über Bereiche der Variablen oder daraus abgeleiteter Merkmale (*ist groß, ändert sich schnell* usw.). Der Zusammenhang zwischen linguistischen Variablen und den primären Zustandsgrößen wird über Zugehörigkeitsfunktionen hergestellt.

■ **Zugehörigkeit zu einer unscharfen Menge**

Jeder Wert einer linguistischen Variablen, der in Form einer verbalen Aussage über



Zugehörigkeitsfunktionen

die linguistische Variable erscheint, lässt sich als unscharfer Bereich (oder unscharfe Menge - engl.: fuzzy set) des primären Merkmals interpretieren. Der Grad des Zutreffens einer Aussage für einen bestimmten Wert eines Merkmals kann durch eine positive reelle Zahl aus dem Intervall $[0,1]$ bewertet werden; das ist die *Zugehörigkeit* des Wertes zu der durch den Wert der linguistischen Variablen definierten unscharfen Menge. Im nebenstehenden Bild sind häufig angewandte Formen der Zugehörigkeitsfunktion dargestellt.

■ **Unschärfe Regelsysteme**

Es lassen sich Regelsysteme formulieren, die in der WENN-DANN-Form linguistische Ausdrücke miteinander verknüpfen:

Regel 1: **WENN** $X_1 = L_{11}$ **UND** $X_2 = L_{12}$ **UND** ... $X_m = L_{1m}$ **DANN** $Y = C_1$
 Regel 2: **WENN** $X_1 = L_{21}$ **UND** $X_2 = L_{22}$ **UND** ... $X_m = L_{2m}$ **DANN** $Y = C_2$

 Regel r: **WENN** $X_1 = L_{r1}$ **UND** $X_2 = L_{r2}$ **UND** ... $X_m = L_{rm}$ **DANN** $Y = C_r$

X_1, X_2, \dots, X_m, Y : Linguistische Variablen
 $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{rm}, C_1, C_2, \dots, C_r$: Linguistische Konstanten

■ **Inferenz**

Die Inferenz (Schließen) in unscharfen Regelsystemen verfolgt das Ziel, den Wert der Variablen Y zu finden. Dazu müssen die unscharfen logischen Operationen (Konjunktion und Disjunktion) ausgeführt werden. Für diese fuzzy-logischen Verknüpfungsoperatoren werden häufig folgende Formen herangezogen:

$$\mu_{\text{UND}}(x_1, \dots, x_m) = \min [\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_m(x_m)] \quad (4.8)$$

$$\mu_{\text{ODER}}(x_1, \dots, x_m) = \max [\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_m(x_m)]$$

Das Ergebnis ist i. a. eine “resultierende” Zugehörigkeitsfunktion. Für die Ermittlung einer scharfen Entscheidung sind noch gewisse Mittelungsprozeduren (Defuzzifizierung) auszuführen.

■ **Zum einführenden Beispiel:**

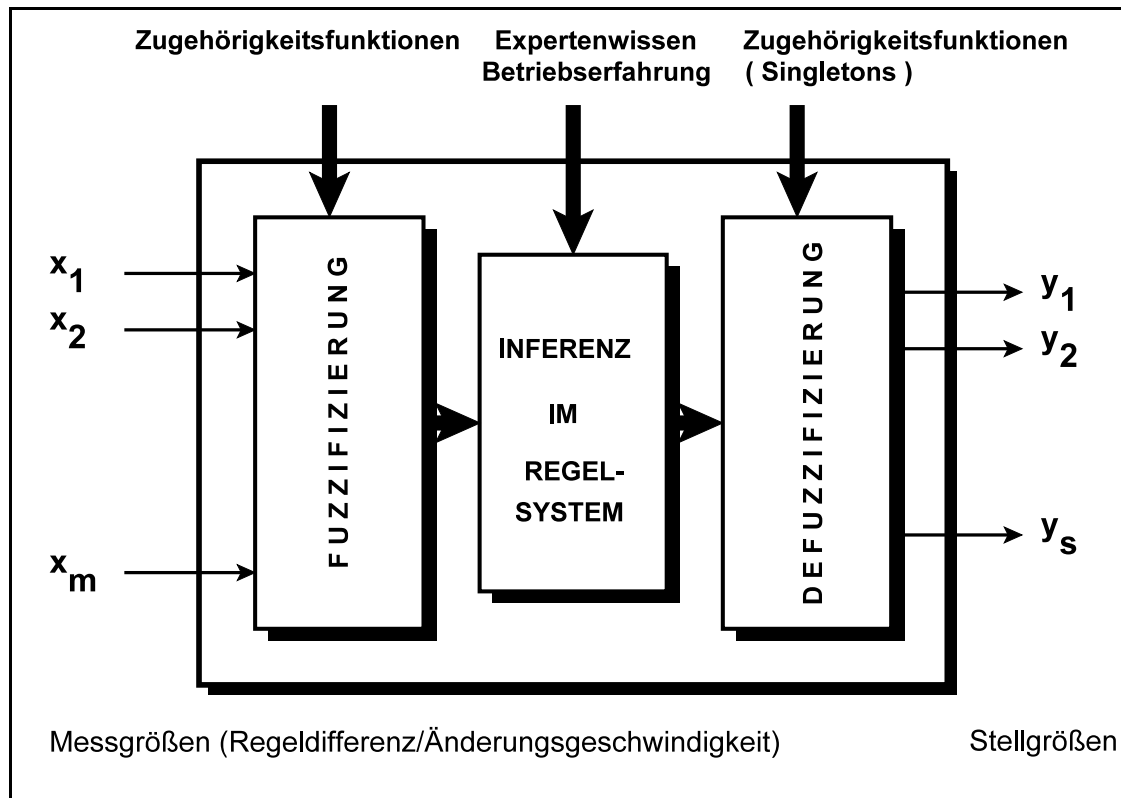
Linguistische Variablen: Regeldifferenz, Änderungsgeschwindigkeit der Regeldifferenz
 Änderung der Ventilstellung.

Linguistische Konstanten: positiv groß, positiv klein, null, negativ klein, negativ groß.

4.3.3 Struktur und Elemente des Fuzzy-Reglers

● **Strukturbild des Fuzzy-Reglers**

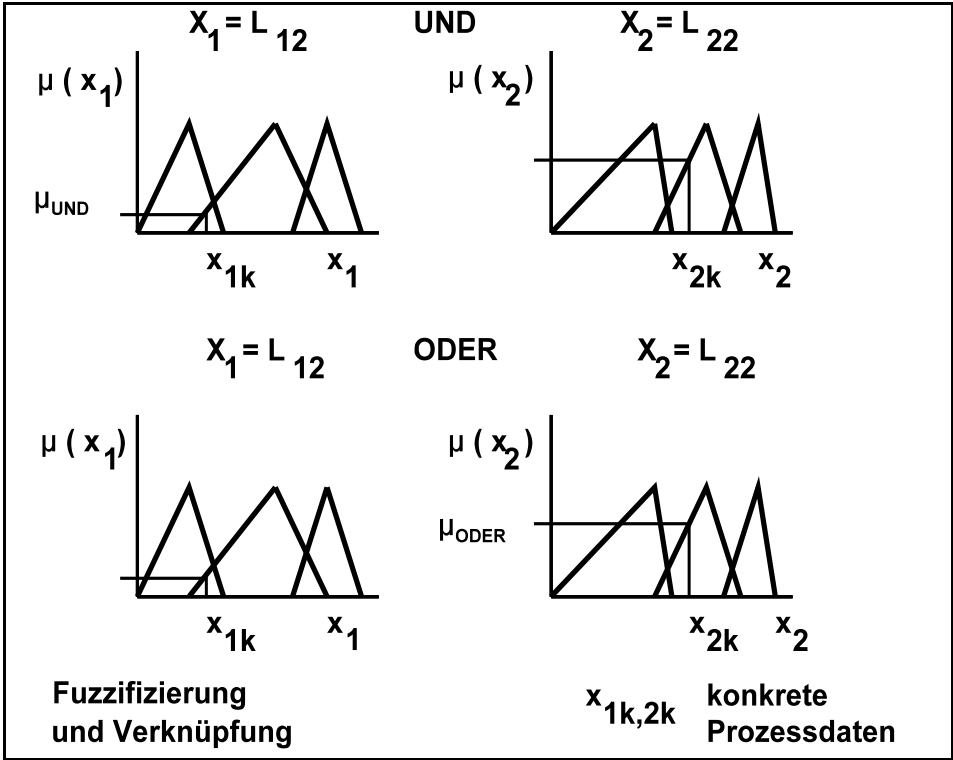
Im folgenden Bild sind die Elemente eines Fuzzy-Reglers in ihrer Kopplung dargestellt:



Elemente eines Fuzzy-Reglers

● **Fuzzifizierung**

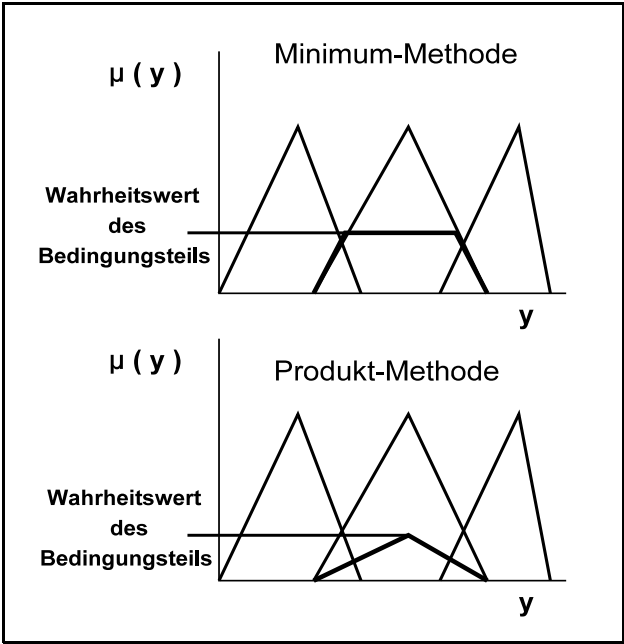
Der Schritt der Fuzzifizierung ordnet jedem Wert der “scharfen” Variablen einen Zugehörigkeitsvektor zu; eine Komponente dieses Vektors bewertet den Grad der Zugehörigkeit zu einer der definierten unscharfen Mengen (die den linguistischen Termen entsprechen). Im folgenden Bild ist dieser Prozess dargestellt:



Im nebenstehenden Bild sind außer der Fuzzifizierung auch die Verknüpfungen von Zugehörigkeitswerten nach den Regeln (4.8) dargestellt. So wird der "Wahrheitswert" der WENN-Teile der Regeln bestimmt.

● **Inferenz**

Der erste Schritt des Inferenzprozesses hat die Bestimmung der Zugehörigkeitsfunktion des Folgerungsteiles (DANN-Teils) einer jeden Regel zum Gegenstand. Die dafür einsetzbaren Methoden sind im Bild dargestellt.



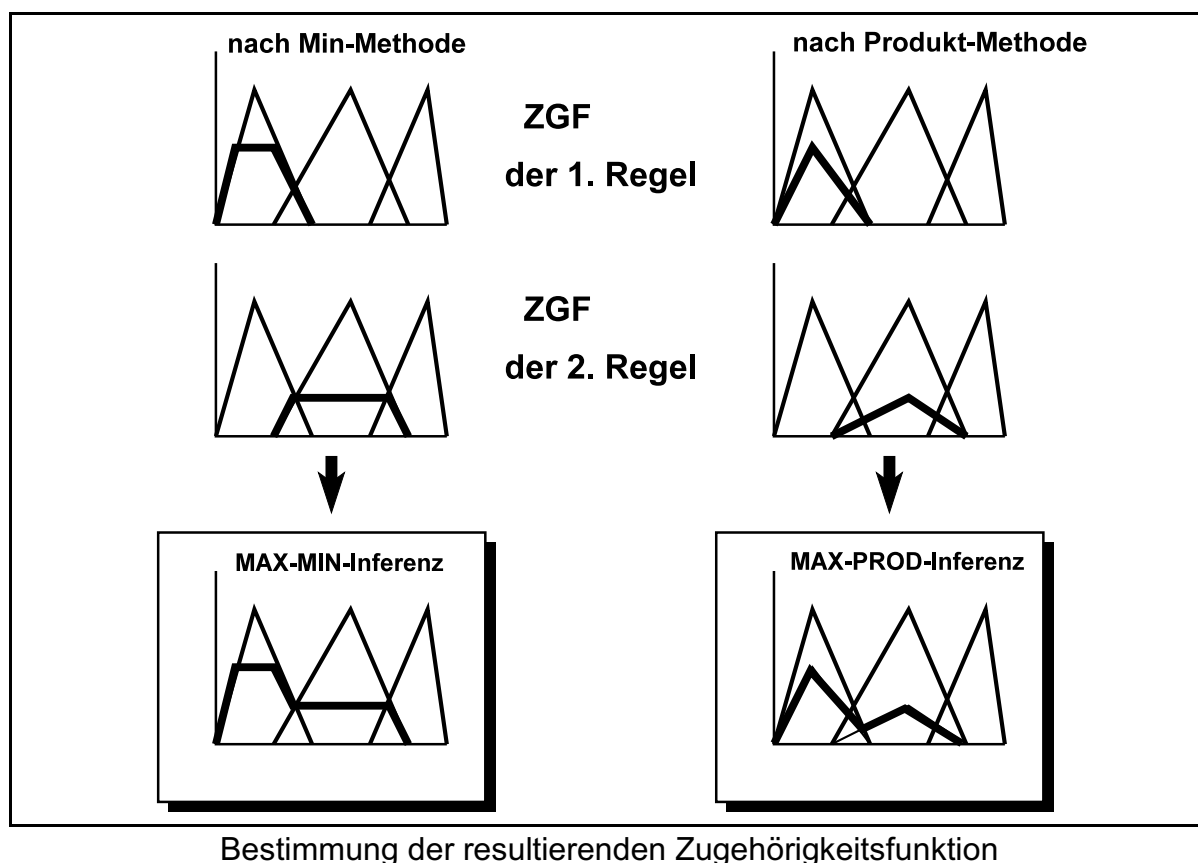
■ **Minimum-Methode**
Die Zugehörigkeitsfunktion des Folgerungsteils (und damit der Regel!) ergibt sich durch Begrenzung auf den aktuellen Wahrheitswert des Bedingungsteils.

■ **Produkt-Methode**
Die Zugehörigkeitsfunktion (ZGF) des Folgerungsteils (und damit der Regel!) ergibt sich durch Multiplikation der Zugehörigkeitsfunktion des Folgerungsteils mit dem aktuellen Wahrheitswert des Bedingungsteils.

Bestimmung der Zugehörigkeiten / Folgerungsteil

Im zweiten Schritt des Inferenzprozesses wird die resultierende Zugehörigkeitsfunktion der Regelbasis bestimmt. Im nachfolgenden Bild ist dieser Schritt dargestellt. Die resultierende Zugehörigkeitsfunktion des Regelsystems ergibt sich durch die Maximum-Verknüpfung der Zugehörigkeitsfunktionen für die einzelnen Regeln. So gilt für die MAX-MIN-Methode:

$$\mu_{\text{res}}(y) = \max_{j=1 \dots r} \left[\min \left(\mu_{\text{WENN}_j}, \mu_{\text{DANN}_j}(y) \right) \right] \quad (4.9)$$



- **Defuzzifizierung**

Durch die Defuzzifizierung wird aus der resultierenden Zugehörigkeitsfunktion eine "scharfe" Stellgröße (oder auch Stellgrößenänderung) bestimmt. Dazu werden die möglichen Stellmaßnahmen mit den zugehörigen Werten der resultierenden Zugehörigkeitsfunktion gewichtet gemittelt; es wird also ein geeigneter gewichteter Mittelwert über alle möglichen Stellgrößenwerte berechnet. Zwei verbreitete Möglichkeiten sind im folgenden aufgeführt.

- Schwerpunktmethod

$$y_{\text{res}} = \frac{\int_{y_{\text{anf}}}^{y_{\text{ende}}} y \mu_{\text{res}}(y) dy}{\int_{y_{\text{anf}}}^{y_{\text{ende}}} \mu_{\text{res}}(y) dy} \quad (4.10)$$

Die Stellmaßnahme ist gleich der Abszisse des Flächenschwerpunktes der resultierenden Zugehörigkeitsfunktion.

- Singleton-Methode

Bei dieser Methode wird davon ausgegangen, dass für die Folgerungsteile der Regeln "scharfe" Werte (die Singletons) vorgegeben werden. Die Defuzzifizierung läuft dann auf die Berechnung des gewichteten Mittels über diese Singletons hinaus, wobei die Gewichtungsfaktoren die Werte der resultierenden Zugehörigkeitsfunktion sind, die in diesem Falle aber gerade mit den Zugehörigkeiten der entsprechenden Bedingungs-teile übereinstimmen. Es gilt dann:

$$y_{\text{res}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{\text{St}}} y_i \mu_{\text{res}}(y_i)}{\sum_{i=1}^{n_{\text{St}}} \mu_{\text{res}}(y_i)} \quad (4.11)$$

4.3.4 Ein Beispiel

Der Einsatz eines Fuzzy-Reglers soll am Beispiel der Temperatur-Stabilisierung in einem Reaktors, der mit einem Heiz-/Kühlsystem ausgerüstet ist, demonstriert werden. Für den Entwurf und die Untersuchung der Eigenschaften des unscharfen Regelsystems wird die „Fuzzy logic toolbox“ von MATLAB eingesetzt. Die Simulation des Führungsverhaltens erfolgt über Simulink.

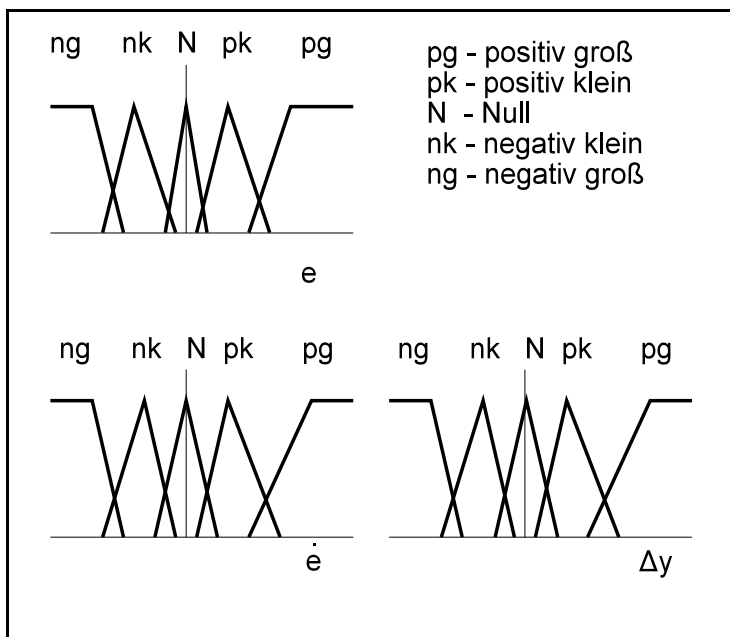
- **Das Regelsystem**

Das folgende **Regelsystem** wird durch den Experten formuliert

	Regeldifferenz $e = T_{\text{soll}} - T$				
$\dot{e} \approx \frac{\Delta e}{\Delta t}$	negativ groß	negativ klein	Null	positiv klein	positiv groß
negativ groß	negativ groß	negativ groß	negativ klein	negativ klein	positiv klein
negativ klein	negativ groß	negativ klein	negativ klein	Null	positiv groß
Null	negativ groß	negativ klein	Null	positiv klein	positiv groß
positiv klein	negativ klein	Null	positiv klein	positiv klein	positiv groß
positiv groß	negativ klein	positiv klein	positiv klein	positiv groß	positiv groß

Zum Verständnis der Regeln sind die folgenden **Zusammenhänge** zu beachten:

$$\begin{aligned}
 e < 0 &\Rightarrow T > T_{\text{soll}} \\
 e > 0 &\Rightarrow T < T_{\text{soll}} \\
 \Delta e < 0 &\Rightarrow \text{Temperatur steigt} \\
 \Delta e > 0 &\Rightarrow \text{Temperatur fällt}
 \end{aligned}$$

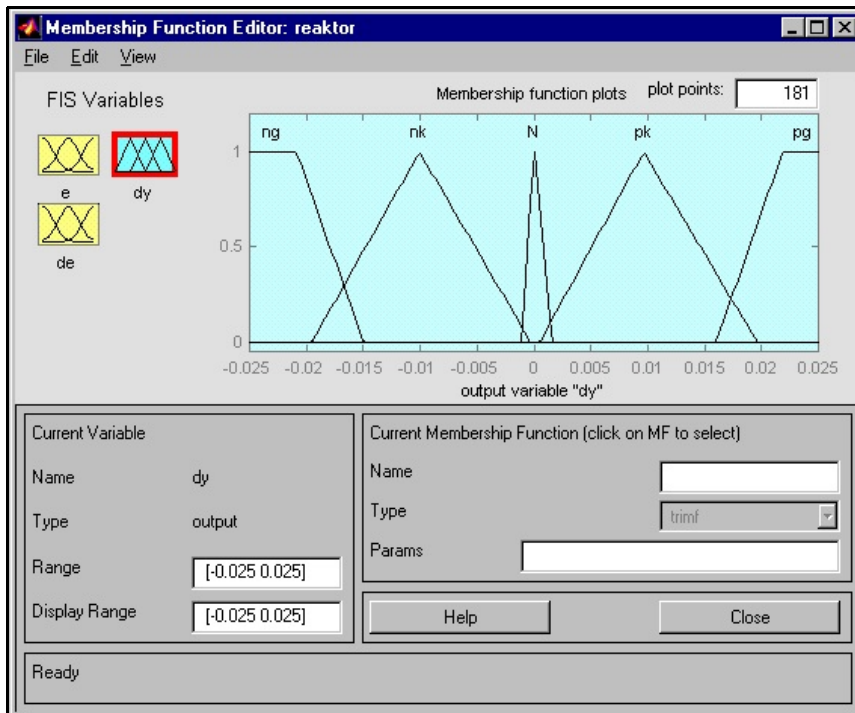


Im nebenstehenden Bild sind die Zugehörigkeitsfunktionen für die WENN-Teile und die DANN-Teile der Regeln in ihrer gewählten qualitativen Form angegeben.

- **Auswahl und Parametrierung der Zugehörigkeitsfunktionen**

Die Zugehörigkeitsfunktionen müssen im nächsten Schritt durch quantifizierbare

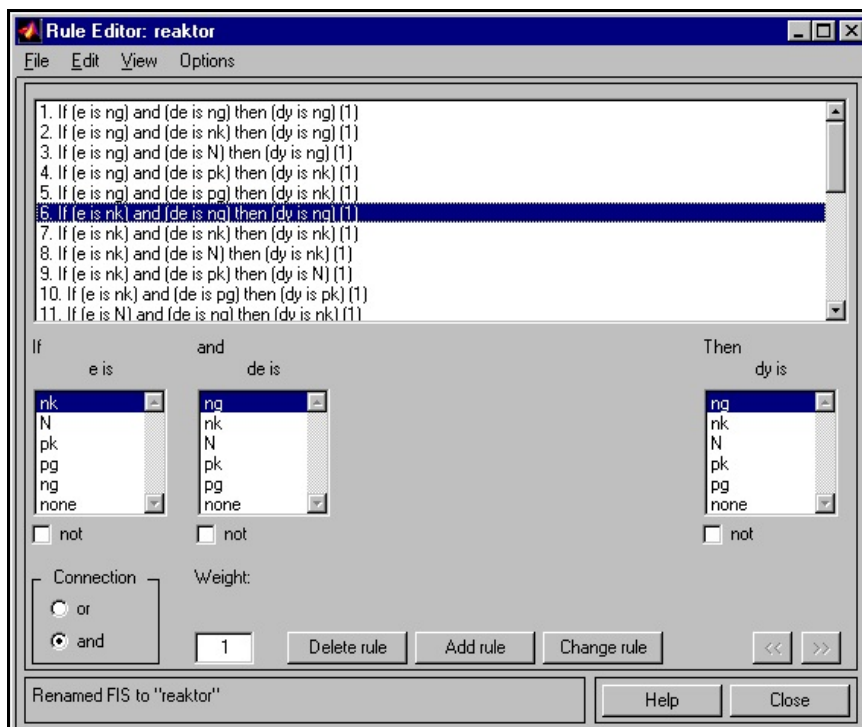
Funktionsausdrücke beschrieben werden. In der *Fuzzy logic toolbox* von MATALB können die Zugehörigkeitsfunktionen über einen interaktiven Editor definiert und parametrierung werden. Im nebenstehenden Bild ist die Ansicht des Editors für die Zugehörigkeitsfunktionen gezeigt, die die Bereiche der Stellgröße definieren.



- **Kodierung des Regelsystems**

Die in der Tabelle angegebenen Regeln können im nächsten Schritt in die für die

weitere Arbeit notwendige Form überführt werden. Dafür gibt es einen speziellen Regel-Editor, der die Eingabe der Regeln unterstützt.



In drei Auswahllisten sind die möglichen Werte der linguistischen Variablen angegeben. Der Nutzer muss nur die für eine Regel zutreffende Kombination auswählen und die Auswahl bestätigen.

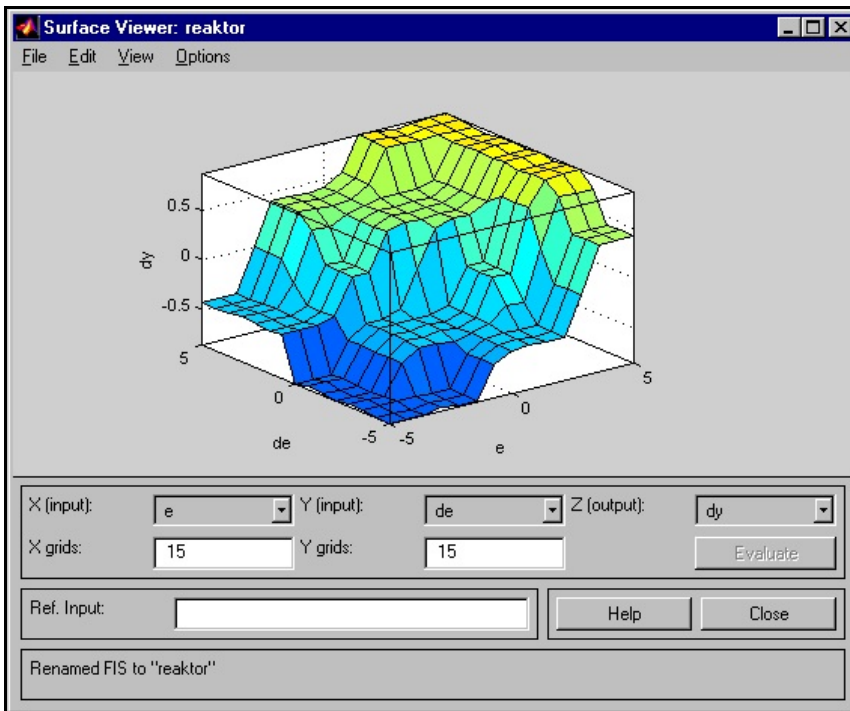
Im nebenstehenden Bild ist der Regel-Editor dargestellt.

- **Untersuchung der Eigenschaften des Regelsystems**

Die Toolbox stellt zwei wichtige Werkzeuge für die Untersuchung der Eigenschaften des generierten unscharfen Regelsystems bereit. So kann das durch die Auswahl der

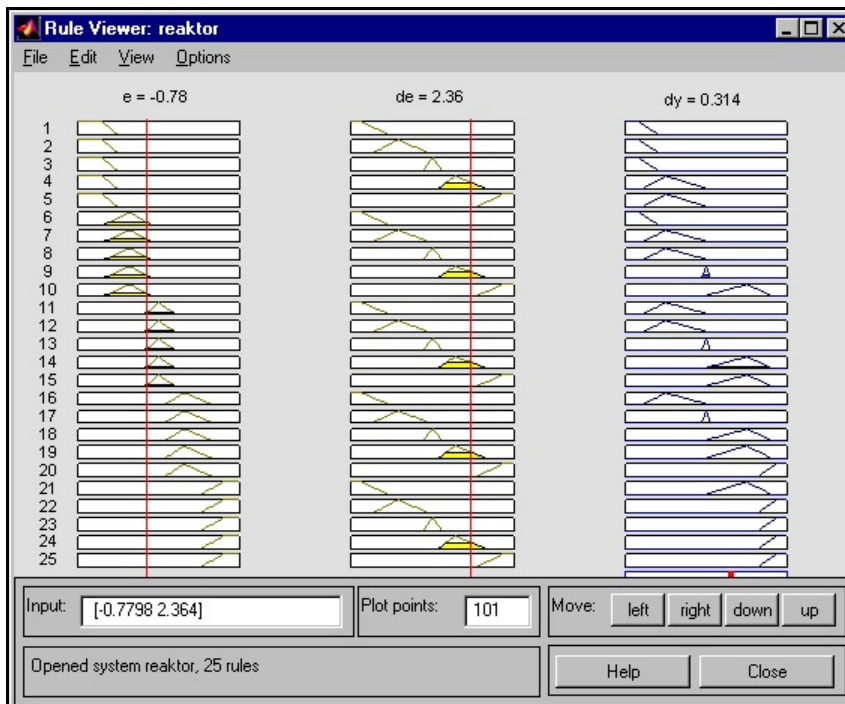
Zugehörigkeitsfunktionen und durch das konkrete Regelsystem aufgespannte Kennfeld des Reglers dargestellt werden.

Dieses Kennfeld beschreibt den Zusammenhang zwischen der Regeldifferenz sowie deren Änderungsgeschwindigkeit und der Änderungsgeschwindigkeit der Stellgröße.



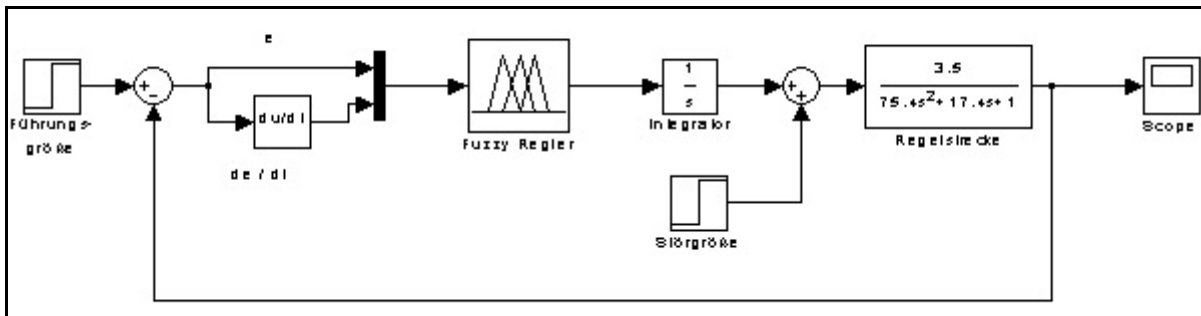
Das zweite Werkzeug zur Untersuchung der Eigenschaften des Regelsystems ist der „Rule Viewer“, der es gestattet, die Ergebnisse bei unterschiedlichen Vorgaben zu untersuchen. Der Anwender setzt die Eingangswerte des Regelsystems. Fuzzifizierung, Inferenz und Defuzzifizierung werden ausgeführt und die Ausgangsgröße des Systems wird angezeigt. In der grafischen Darstellung können die Beiträge der Regeln zum Ergebnis verfolgt werden.

Der Anwender setzt die Eingangswerte des Regelsystems. Fuzzifizierung, Inferenz und Defuzzifizierung werden ausgeführt und die Ausgangsgröße des Systems wird angezeigt. In der grafischen Darstellung können die Beiträge der Regeln zum Ergebnis verfolgt werden.



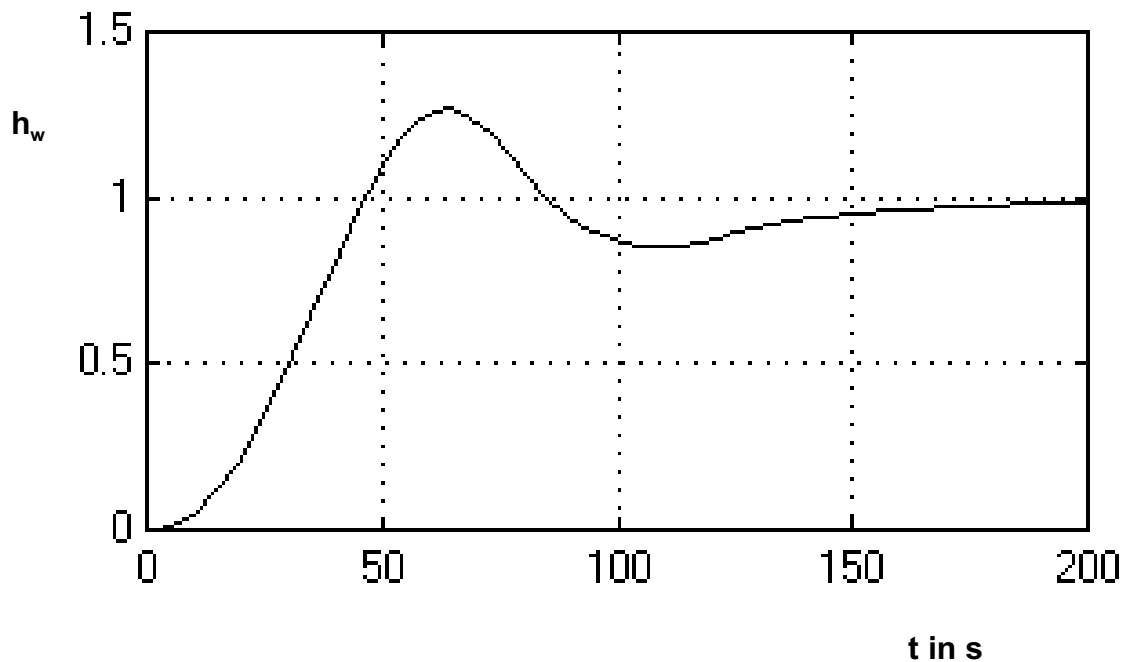
- **Simulation des Führungsverhaltens**

Die Simulation des Verhaltens des Regelkreises erfolgt über eine Simulink-Struktur, die im folgenden Bild dargestellt ist.



Das Differenzierglied am Eingang des Fuzzy-Reglers erzeugt die Änderungsgeschwindigkeit der Regeldifferenz; der Integrator nach dem Fuzzy-Regler erzeugt die Stellgröße aus der Änderungsgeschwindigkeit, die die Ausgangsgröße des Fuzzy-Reglers darstellt.

Die Führungs-Übergangsfunktion ist im folgenden Bild dargestellt.



Durch Variation der Parameter der Zugehörigkeitsfunktionen kann dieses Verhalten noch verbessert werden.

5. Einführung in die Prozessleittechnik

5.1 Einleitung

Für die technische Realisierung von Automatisierungsaufgaben werden heute überwiegend digitale Steuerungssysteme eingesetzt, die in der Regel programmierbar sind (SPS, PC, spezielle Mikrorechnersysteme). Diese Systeme müssen für integrierte Systemlösungen in ihrer Funktion koordiniert werden. Es entstehen dann hierarchisch strukturierte Systeme, die aus frei programmierbaren Digitalrechnern (die SPS-Systeme können hierbei als eine Teilklasse angesehen werden) bestehen, die hierarchisch bezüglich des Informationsflusses und dezentral bezüglich der auszuführenden Funktionen strukturiert sind. Derartige Systeme heißen Prozessleitsysteme (PLS). Die nachfolgenden Definitionen basieren im wesentlichen auf der DIN 19222 (Leittechnik/Begriffe).

- **Leiten eines Prozesses:**

Unter dem **Leiten eines Prozesses** versteht man die Gesamtheit aller Maßnahmen, die einen Prozessablauf bewirken, der gewissen festgelegten Zielen gerecht wird. Die Maßnahmen werden vorwiegend **unter Mitwirkung des Menschen** durch das **Prozessleitsystem** aufgrund der aus dem Prozess oder auch aus der Umgebung erhaltenen Daten getroffen.

- **Leiteinrichtung / Prozessleitsystem**

Die **Leiteinrichtung** umfasst alle für die Aufgabe des Leitens verwendeten Geräte und Programme, sowie im weiteren Sinne auch Anweisungen und Vorschriften.

Ein **Prozessleitsystem** ist ein dezentrales (verteiltes) System von Leiteinrichtungen. Die Systemkomponenten übernehmen Leitfunktionen unterschiedlicher Komplexität. Durch die hierarchische Struktur wird nicht nur die spezifische Funktionalität des Systems gewährleistet, sondern es werden auch die Verfügbarkeit des Automatisierungssystems und (als Folge davon) die Sicherheit des Produktionsprozesses erhöht.

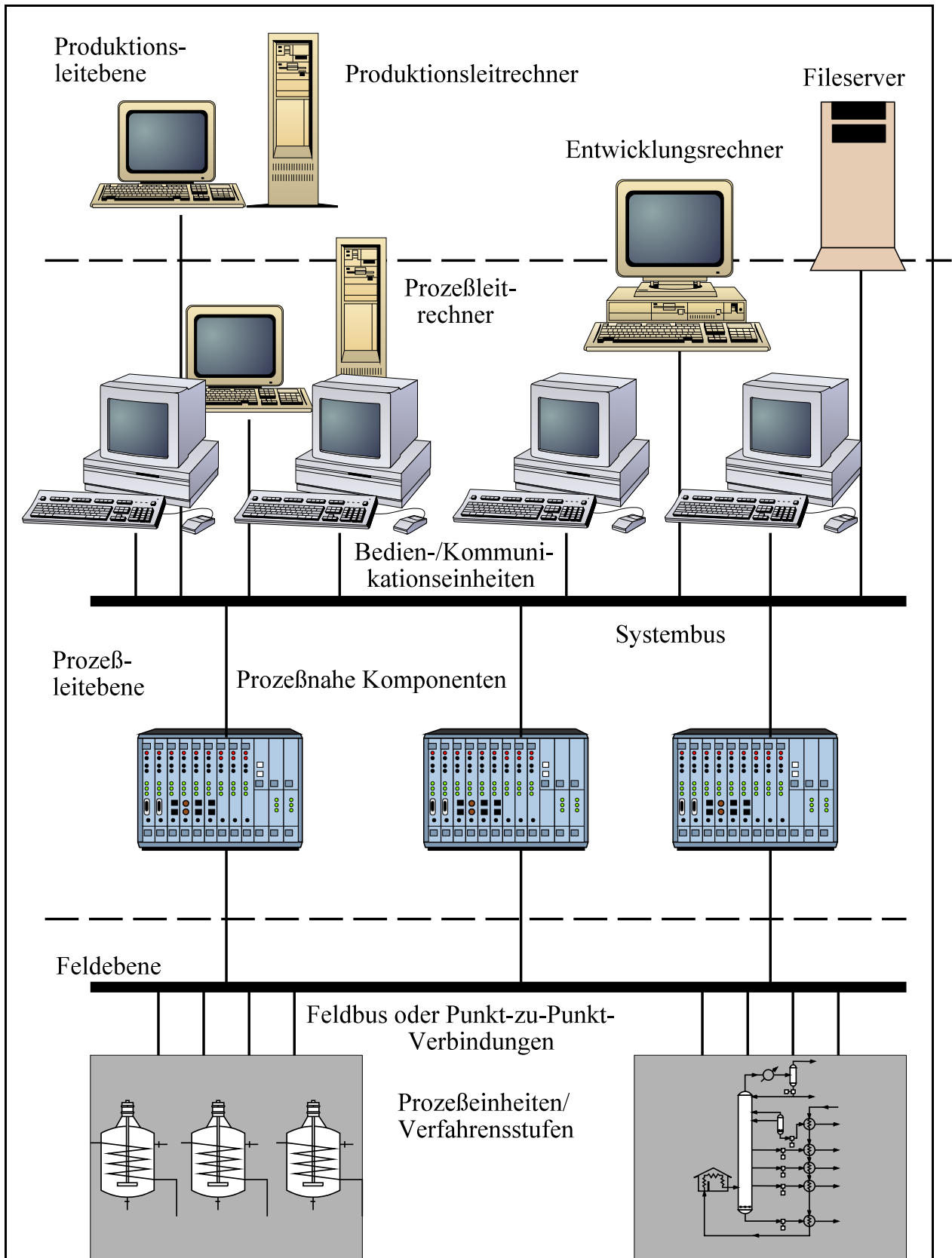
5.2 Die Ebenenstruktur eines Prozessleitsystems

Die Hierarchieebenen eines Prozessleitsystems sind durch typische Funktionen, die sie realisieren, gekennzeichnet.

Die wesentlichen Ebenen eines Prozessleitsystems sind:

- Feldebene
- Prozessleitebene
- Produktionsleitebene / Unternehmensleitebene.

Im folgenden Bild sind diese Ebenen dargestellt.



In den Ebenen werden folgende Funktionen realisiert:

- ◆ *Feldebene*
 - Messen (Zählen)
 - Stellen
 - Anzeigen
 - Erfassen von Daten

- ◆ *Prozessleitebene*
 - Steuern
 - Regeln
 - Eingreifen
 - Schützen
 - Anzeigen, Melden
 - Protokollieren
 - Auswerten (dynamische oder gleitende Auswertungen)
 - Eingabe von Daten (Sollwerte, Grenzwerte usw.)
 - Verarbeiten von Daten
 - Präsentieren von Daten

- ◆ *Produktionsleitebene / Unternehmensleitebene*
 - Aufzeichnen (Archivieren von Prozess- und Produktionsdaten)
 - Optimieren
 - Auswerten (Langzeitanalysen der Prozessverläufe, Verdichtung der Prozessdaten zu Produktionsdaten usw.)
 - Eingabe von Daten (Auftragsdaten, Grundrezepturen usw.)
 - Verarbeiten von Daten
 - Präsentieren von Daten

In der Produktionsleitebene werden auch sehr *komplexe Leitfunktionen* realisiert, wie die Planung und Koordinierung von Reparatur- und Instandhaltungsprozessen, die Verwaltung von Aufträgen bei flexibler Produktion (z.B. bei Chargenproduktion) usw. In der Unternehmensleitebene dominieren die betriebswirtschaftlichen Aspekte. Die Produktionsdaten werden zu betriebswirtschaftlichen Kenngrößen verdichtet. Durch die Unternehmensleitebene wird auch der Vergleich zwischen unterschiedlichen Teilbetrieben in einem Unternehmen geführt. Die für das Unternehmen zentralen Dienste (Bestellwesen, Transport, Auslieferungsdienste usw.) werden über diese Ebene gesteuert. Beide Ebenen sind in ihrer Funktionalität eng verwandt.

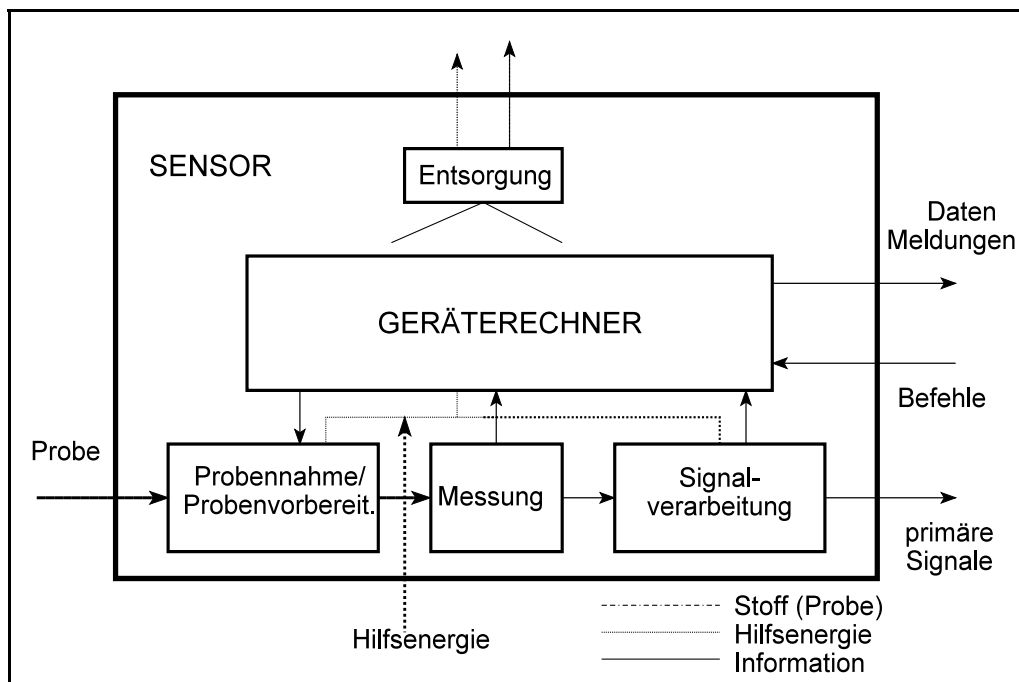
5.3 Die Elemente eines Prozessleitsystems

5.3.1 Die Elemente der Feldebene

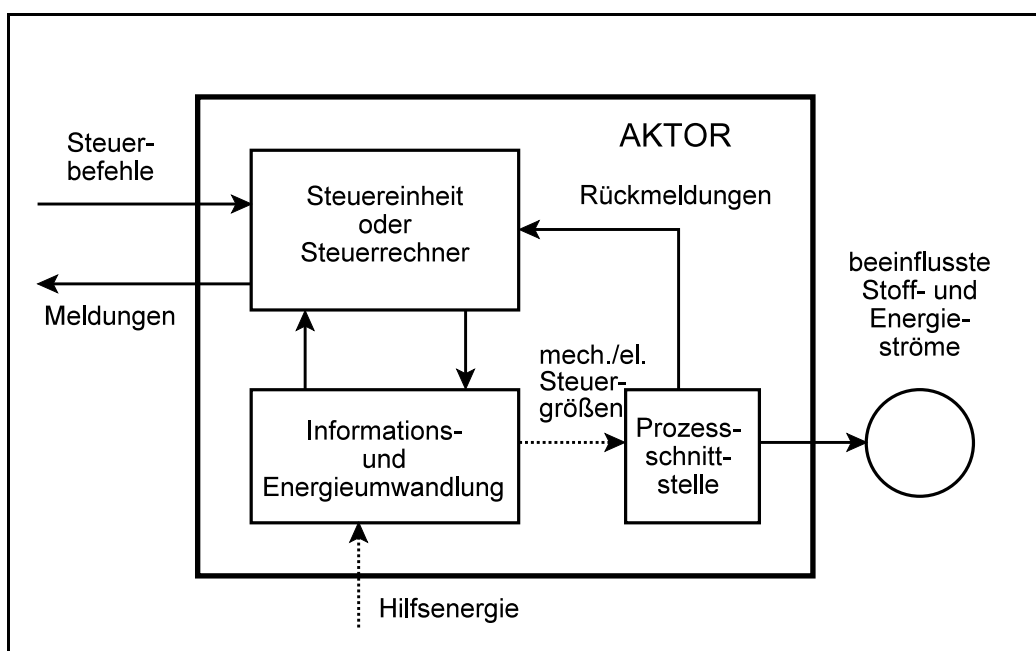
Die Elemente der Feldebene sind

- die Sensoren
- die Aktoren
- der Feldbus oder die Punkt-zu-Punkt-Verbindungen zu den Prozessnahen Komponenten

Feldbussysteme sind digitale Kommunikationssysteme in der Feldebene. Sie verbinden zum einen die Sensoren und Aktoren miteinander und diese Elemente mit den Prozessnahen Komponenten. Die digitale Informationsübertragung erhöht die Datensicherheit und reduziert den Aufwand für die Verkabelung. Außerdem unterstützt sie die Tendenz zum Einsatz von Sensoren und Aktoren, die mit "Bordrechnern" ausgerüstet sind und die einen Großteil ihrer internen Funktionen selbst steuern. Beim Einsatz von Feldbussystemen müssen die Elemente der Feldebene über entsprechende Buschnittstellen verfügen. In den folgenden Bildern sind Blockschemata derartiger Sensor- und Aktorsysteme dargestellt.



Sensorsystem mit integriertem Geräterechner



Aktor mit integriertem Steuerungssystem

Alle Gerätesysteme der Prozessanalytik folgen der oben beschriebenen Struktur eines Sensors mit integriertem Geräterechner. Als ein Beispiel für "intelligente Aktoren" seien die Ventilstellungsregler genannt, durch deren Einsatz die Anpassung zwischen Ventil und Stellantrieb erheblich vereinfacht wird.

5.3.2 Die Prozessnahen Komponenten (PNK)

Die PNK's werden durch Digitalrechner realisiert. Dabei sind folgende gerätetechnische Realisierungen anzutreffen:

- Herstellerspezifische Prozessrechnersysteme (im "klassischen PLS")
- Speicherprogrammierbare Steuerungen (SPS)
- Digitale Einfach- und Mehrfachregler
- Standard-PC / Industrie-PC

Das für eine SPS in den Arbeitsblättern zum Fach „Grundlagen der Mess- und Automatisierungstechnik“ angegebene Blockschema kann als Beispiel für die Struktur einer Prozessnahen Komponente angesehen werden.

Die Prozessnahen Komponenten übernehmen unter anderem auch die Regelungsfunktionen, die das Prozessleitsystem erfüllen muss. Da die PNK digitale Steuerungssysteme sind, arbeiten sie als digitale Regler. Der Regler wird dabei durch ein Programm realisiert. In Analogie zu den kontinuierlichen Reglern lassen sich auch für zeitdiskrete Systeme P-, PI, PD- und PID-Regler definieren. Damit ist aber der Vorrat an möglichen Regelalgorithmen nicht erschöpft; es lassen sich hier auch Algorithmen definieren, für die es im zeitkontinuierlichen Bereich keine Entsprechung gibt.

Am Beispiel des digitalen PI-Reglers soll das Wesen digitaler Regler erläutert werden.

• Der digitale PI-Regler

Ausgangspunkt ist der zeitkontinuierliche Zusammenhang des PI-Reglers zwischen Regeldifferenz und Stellgröße in differenzierter Form:

$$\frac{dy}{dt} = K_R \left(\frac{de(t)}{dt} + \frac{e(t)}{T_n} \right)$$

Die Differentialquotienten werden diskretisiert und durch Differenzenquotienten ersetzt. Wenn man den hinteren Differenzenquotienten einführt und eine konstante Abtastzeit T annimmt, so folgt:

$$y[k] = y[k-1] + K_R \left(\left(1 + \frac{T}{T_n} \right) e[k] - e[k-1] \right) \quad (5.1)$$

Das ist die (rekursiv von k = 1anzuwendende) Grundgleichung für den PI-Regler. In einer Pascal-ähnlichen Notation hätte das zugehörige Programm, das diesen Algorithmus realisiert, die folgende Grobstruktur

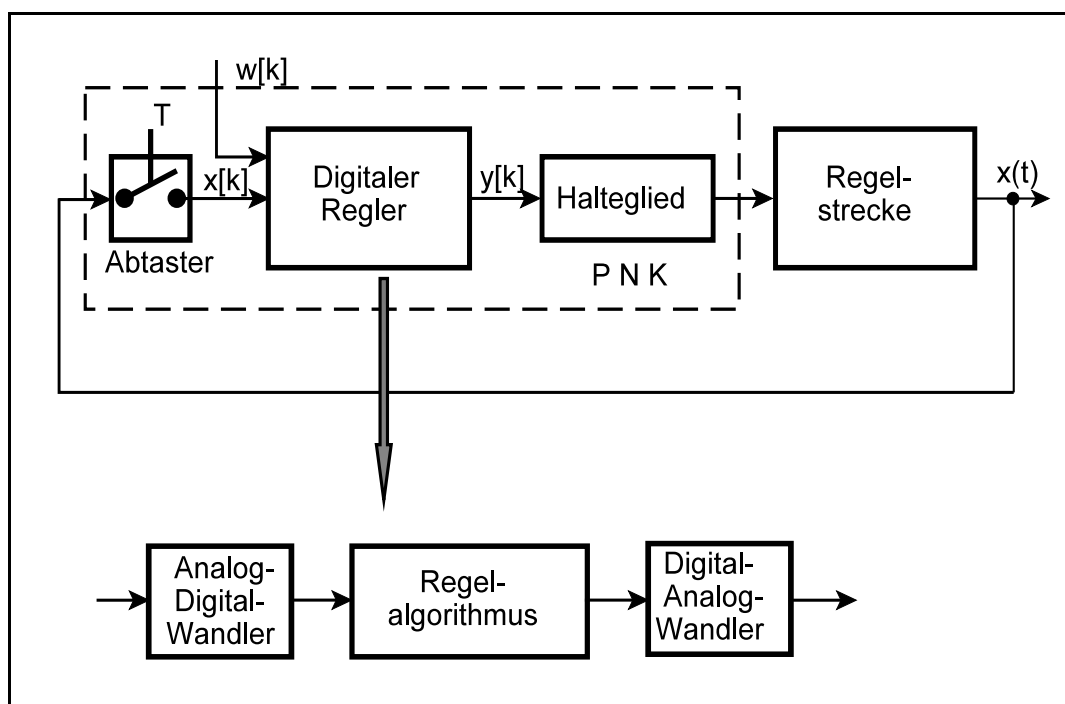
.....

```

READLN( T,TN,KR);
c1:=-KR; c2:= KR*(1+T/TN);
.....
PROZESS_INPUT(Eingabe_Kanal_Adresse, xneu); { Dateneingabe }
eneu:=w-xneu;
yneu:=yalt+c2*eneu+c1*ealt;    { Berechnung des Stellgrößenwertes }
PROZESS_OUTPUT(Ausgabe_Kanal_Adresse,yneu); { Datenausgabe }
ealt:=eneu;
yalt:=yneu;

```

Der Algorithmus ist in eine Zeitschleife eingebettet, die mit der Zykluszeit T abgearbeitet wird. Im folgenden Bild ist der Signalfussplan dargestellt.



Signalfussplan eines digitalen Regelkreises

5.3.3 Kommunikationseinheiten und Leitreechner

Der Bediener kann über die **Kommunikationseinheiten** die gewünschten Informationen strukturiert zur Anzeige bringen. Ebenso kann er über diese Einheiten Soll- und Grenzwerte vorgeben sowie gezielt Steuerabläufe einleiten (z.B. Start/Unterbrechung/Abbruch von Ablaufsteuerungen). Die Zustandsinformationen (z.B. die Alarmliste) des Systems werden hier ebenfalls angezeigt.

Der **Prozessleitreechner** dient der Verwaltung von zentralen Datenbeständen zur Führung, Stabilisierung und Überwachung der Produktionsprozesse. Die für einen bestimmten Zeitabschnitt wesentlichen Protokolle und Reports werden durch diesen Rechner erzeugt. Die Datenbestände für Rezepturen und Fahrweisen von Chargenprozessen werden durch den Leitreechner verwaltet. Als Prozessleitreechner kommen

heute UNIX-Workstations und Standard-PC zum Einsatz.

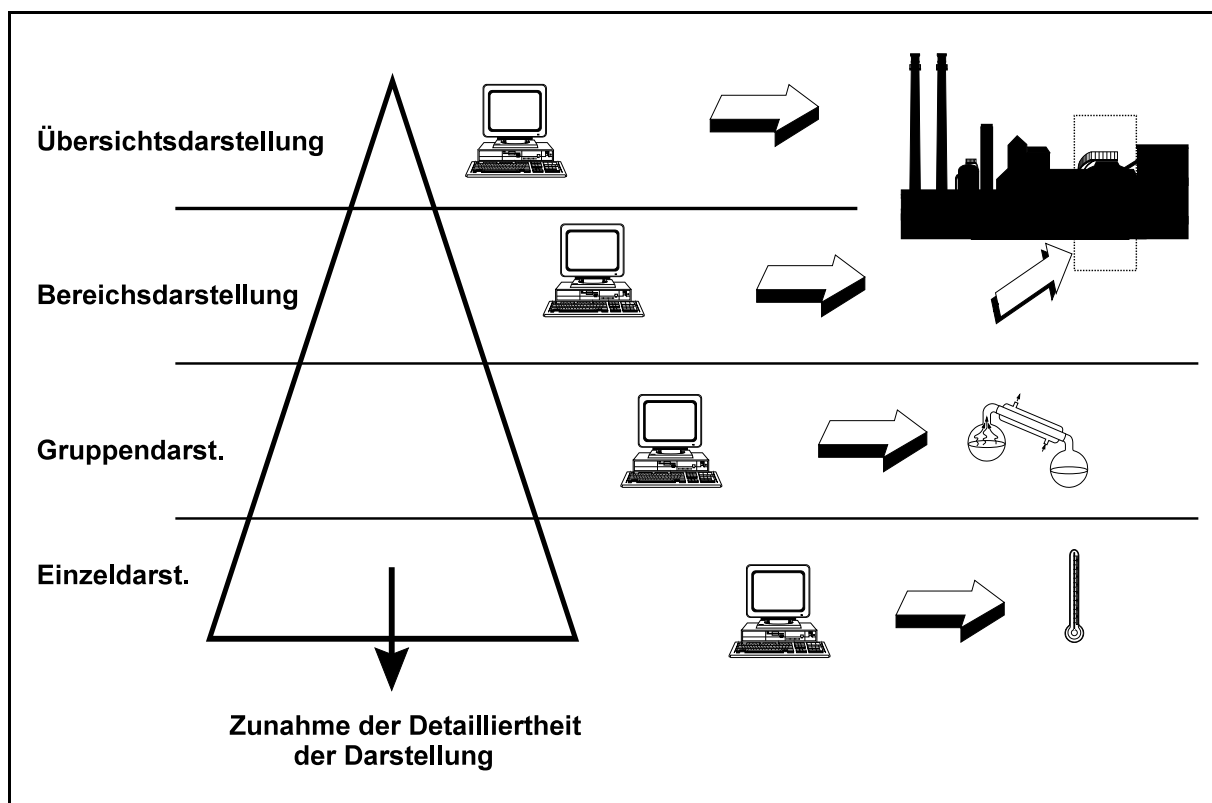
In der Prozessleitebene wird i. a. für Pflege und Weiterentwicklung der Software ein spezieller **Entwicklungsrechner** (CAE-Workstation) vorgesehen. Dafür kommen heute ebenfalls UNIX-Workstations und Standard-PC zum Einsatz.

5.4 Kommunikation zwischen Bediener und Prozessleitsystem

Durch das PLS wird der Betreiber eines Verfahrens von den elementaren Informationserfassungs- und -verarbeitungsfunktionen, wie sie bei Handfahrweise oder beim "Teilautomatikbetrieb" von ihm wahrzunehmen sind, befreit. Es ergeben sich damit neue Funktionen, die der Betreiber übernehmen kann. Beispielhaft seien genannt:

- Überwachen des Prozesses (Komplexe Zustandsanalyse).
- Einleitung von Maßnahmen zur Einstellung neuer Prozesszustände (Umstellen einer bestimmten "Fahrweise" auf eine andere, Einstellen des optimalen Arbeitspunktes usw.)
- Einleitung von Maßnahmen zur Beseitigung von Störungen.
- Verfolgung eines Auftrages.
- Ableitung von Regeln zur Verbesserung der Prozessführung.

Dem Betreiber müssen die notwendigen Informationen in allen Situationen in geeigneter Weise bereitgestellt werden, damit er die genannten Funktionen erfüllen kann. Dafür hat sich die folgende hierarchische Gliederung der Darstellung der Prozessinformationen als "Quasistandard" bewährt.



Hierarchische Gliederung der Informationsdarstellung

5.5 Kommunikation zwischen den Elementen eines Prozessleitsystems

Die Kommunikation im System muss durch Verbindungselemente, die den Informationsfluss zwischen den Elementen der einzelnen Ebenen unterstützen, realisiert werden. Neben Punkt-zu-Punkt-Verbindungen zwischen den Elementen spielen die Standard-Netzprotokolle eine immer größere Rolle. Die Elemente des Prozessleitsystems müssen dann über entsprechende Koppereinheiten verfügen, die das jeweilige Netz-Protokoll "verstehen". In allen Ebenen kommen zunehmend Standard-Protokolle zum Einsatz (z.B. PROFIBUS in der Feldebene, TCP/IP in der Prozessleitebene und in der Produktionsleitebene).