

Skript zur Vorlesung Elektrische und Magnetische Felder

Erweiterte Mitschrift des Sommersemesters 2003 V0.9.6

Dieses Skript erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Da es sich hierbei um eine Vorabversion handelt, können Druckfehler und ähnliches noch nicht hundertprozentig ausgeschlossen werden. Als Referenz bezüglich der Klausur 'Elektrische und Magnetische Felder' wird daher auf die von den Studenten eigenständig angefertigte Vorlesungsmitschrift verwiesen.

Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik,

Prof. Dr. Ralf Peter Brinkmann,

Universitätsstraße 150
44801 Bochum
Germany

<http://www.tet.ruhr-uni-bochum.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	10
1.1	Erste Schritte in der Feldtheorie	10
1.2	Mathematische Voraussetzungen	11
1.3	Kommentar zum Skriptum	11
2	Elektrostatik	12
2.1	Feld und Potential einer Punktladung	12
2.1.1	Die elektrische Kraft	12
2.1.2	Der Begriff des elektrischen Feldes	12
2.1.3	Das elektrostatische Potential und das Feld einer Punktladung	14
2.2	Elektrische Ladungsdichten	15
2.2.1	Die Ladungsdichte einer Punktladung	16
2.2.2	Die Ladungsdichte einer Linienladung	17
2.2.3	Die Ladungsdichte einer Flächenladung	18
2.2.4	Die Ladungsdichte eines Körpers	19
2.3	Charakterisierung des elektrischen Feldes	19
2.3.1	Rotation des elektrischen Feldes	20
2.3.2	Divergenz des elektrischen Feldes	20
2.3.3	Coulomb-Integrale	21
2.3.4	Zusammenhang und Zusammenfassung der Feldgleichungen und deren Lösung	22
2.3.5	Eigenschaften der Coulomb-Integrale	23
2.3.6	Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und des Potentials	24
2.3.7	Green'sche Funktion des freien Raumes	25
2.4	Beispiele für die Coulomb-Integrale	27
2.4.1	Berechnung des Potentials und des elektrischen Feldes einer Punktladung	27
2.4.2	Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential einer endlichen Linienladung	27
2.4.3	Potential und elektrisches Feld einer unendlich ausgedehnten Linie	34
2.4.4	Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Fläche	38

2.4.5	Zusammenfassung	41
2.5	Der elektrische Dipol	42
2.5.1	Grundidee	42
2.5.2	Raumladungsdichte eines Dipols	43
2.5.3	Potential und Feldstärke eines Punktdipols	44
2.6	Kräfte auf Ladungen und Dipole	47
2.6.1	Kraft auf eine Ladung	47
2.6.2	Kraft auf einen Dipol	49
2.6.3	Drehmoment auf einen Dipol im Feld (Herleitung über Kräftebilanz)	50
2.6.4	Kraft und Drehmoment auf Dipol im Feld (Herleitung mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung)	52
2.7	Ladungen und Dipole in Materie	54
2.7.1	Wirkung elektrischer Felder auf Materie	54
2.7.2	Anwendung des Dipols	56
2.7.3	Darstellung von Dipolen in den Maxwell-Gleichungen	59
2.7.4	Raumladungsdichte eines polarisierten Objektes	60
2.7.5	Darstellung verschiedener Polarisationsladungsanordnungen	61
2.7.6	Die Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen elektrischen Medien	62
2.7.7	Polarisationsoberflächenladungsdichten an der Grenze zweier Medien	64
2.7.8	Auswertung der Übergangsbedingungen, die Sprungbedingung des elektrischen Feldes	67
2.7.9	Lineare Materialgleichungen im Zusammenhang mit den elektrostatischen Maxwell-Gleichungen	67
2.8	Energiebetrachtung	69
2.8.1	Potentielle Energie von Körpern im Feld	69
2.8.2	Potentielle Energie einer Raumladungsverteilung	70
2.8.3	Bewegung eines Teilchens im Feld	73
2.8.4	Zusammenhang der potentielle Energie und der Kraft einer Punktladung im Feld	74
2.8.5	Berechnung der potentiellen Energie eines Dipols im Feld	74
2.8.6	Potentielle Energie eines Dipols im Feld eines zweiten Dipols	76
2.9	Lernziele Kapitel 2	76

3	Magnetostatik	79
3.1	Einführende Überlegungen, Definition des Ampere	79
3.2	Das Magnetfeld eines geraden Stromfadens und einer beliebigen Stromschleife (Gesetz von Biot-Savart)	80
3.3	Definition der Stromdichte	83
3.4	Das Magnetfeld einer beliebigen Stromdichteverteilung (Verallgemeinerung des Gesetzes von Biot-Savart)	85
3.5	Charakterisierung des magnetischen Feldes	88
3.5.1	Das Vektorpotential	88
3.5.2	Mathematische Überlegungen zu den magnetostatischen Grundgleichungen	90
3.5.3	Rotation und Divergenz des magnetischen Feldes	91
3.5.4	Zusammenhang der Feldgleichungen und deren Lösung	92
3.6	Beispiel der Berechnung des Magnetfeldes eines geraden Stromfadens	93
3.7	Der magnetische Elementardipol	94
3.7.1	Herleitung der Stromdichte und des Momentes des magnetischen Dipols	94
3.7.2	Das magnetische Feld eines Elementardipols	98
3.7.3	Das Magnetfeld eines magnetisierten Körpers	100
3.7.4	Dipolnäherung einer Stromdichteverteilung \vec{j}	101
3.7.5	Das Dipolmoment einer ebenen Drahtschleife	103
3.8	Kraft und Drehmoment	104
3.8.1	Kraft auf verschiedene Stromdichteverteilungen	104
3.8.2	Kraft und Drehmoment auf den magnetischen Dipol	104
3.8.3	Prinzip eines Elektromagneten	107
3.9	Dipole in Materie	108
3.9.1	Verteilung von Dipolen in Materie	108
3.9.2	Lineare Materialgleichungen im Zusammenhang mit den magnetostatischen Maxwell-Gleichungen	109
3.9.3	Die Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen magnetischen Medien	111
3.10	Energiebetrachtung	113
3.11	Lernziele Kapitel 3	113

4 Zusammenfassung statischer Feldprobleme	116
4.1 Zusammenfassung Elektrostatisches Feld	116
4.2 Zusammenfassung magnetostatisches Feld	118
4.3 Die Hilfsgrößen \vec{D} und \vec{H}	120
5 Lösungsmethoden für die Feldgleichungen	122
5.1 Allgemeine Lösungsmethoden	122
5.2 Das Potential einer geladenen Kugel	122
5.3 Methode der Spiegelladung	125
5.4 Poisson-Gleichung auf berandeten Gebieten	131
5.5 Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Dirichlet-Probleme	133
5.6 Das Neumann Problem	136
5.7 Äquipotentialflächen und Feldlinien einer Ladungsverteilung	136
5.8 Lösung des 2D-Potentialkastens	138
5.8.1 Lösung in den Ecken	139
5.8.2 Exakte Lösung	141
5.8.3 Methode des Separationsansatzes	143
5.8.4 Numerische Lösung des Potentialkastens	145
5.9 Numerische Lösungsverfahren	155
5.9.1 Allgemeines zu numerischen Lösungsverfahren	155
5.9.2 Grundidee einiger numerischer Verfahren	155
5.9.3 Anwendung des Jacobi-Verfahrens	156
5.9.4 Konvergenzbeweis	158
5.9.5 Zusammenhang des Differenzenquotienten mit der Laplace-Gleichung	161
5.9.6 Numerische Probleme	162
5.9.7 Komplizierte Gebiete	162
5.10 Magnetisierbare Kugel im Magnetfeld	163
5.11 Lernziele Kapitel 5	166
6 Elektrodynamik, Zusammenhang elektrischer und magnetischer Felder	169
6.1 Allgemeine Überlegungen	169
6.1.1 Bewegte Ladungen	169

6.1.2 Kräfte auf Ladungen und Ströme	170
6.1.3 Bewegung von Teilchen im elektrischen Feld	171
6.1.4 Bewegung von Teilchen im magnetischen Feld	172
6.2 Herleitung des Induktionsgesetzes	174
6.3 Herleitung der Verschiebungsstromdichte	179
6.4 Die Kontinuitätsgleichung	180
6.5 Energieprinzip bezüglich elektromagnetischer Felder	181
6.6 Leistung des Feldes	183
6.7 Der Energiestrom, der Poynting-Vektor	185
6.8 Die Maxwell-Gleichungen	186
6.9 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen	187
6.10 Lernziele Kapitel 6	189
7 Feldenergie elektrischer und magnetischer Anordnungen	190
7.1 Materialien	190
7.1.1 Vakuum	190
7.1.2 Isolator	190
7.1.3 Magnetisierbare Materialien	190
7.1.4 Dielektrika, polarisierbare Materialien	190
7.1.5 Leitfähige Materialien	191
7.1.6 Halbleiter	191
7.1.7 Plasma	192
7.2 Der Begriff der Kapazität	192
7.2.1 Das Potential und das elektrische Feld eines Kugelkondensators	193
7.2.2 Die Kapazität eines Kugelkondensators	197
7.2.3 Verallgemeinerung der Kapazität	198
7.3 Der Begriff der Induktivität	201
7.3.1 Herleitung der Induktivität	201
7.3.2 Induktivität eines Koaxialleiters	205
7.3.3 Verallgemeinerung der Induktivität	205
7.4 Die Energiestromdichte eines Koaxialleiters mit einem leitenden Innenmaterial	208

7.5	Lernziele Kapitel 7	211
8	Regime elektromagnetischer Probleme	212
8.1	Einteilung der Regime	213
8.1.1	Stationäre Regime	213
8.1.2	Langsam veränderliche Felder	213
8.1.3	Halbleitertechnik	214
8.1.4	Antennentheorie und Wellenausbreitung	214
8.1.5	Strömungsfeldprobleme	214
8.2	Phasoren-Rechnung	216
8.3	Anwendung Strömungsfeldprobleme	217
8.4	Anwendung Langsam veränderliche Felder	220
8.4.1	Die Maxwell-Gleichungen und deren Abschätzung	220
8.4.2	Quasistationäre Näherung	222
8.4.3	Energieinhalt der quasistationären Näherung	224
8.4.4	Elektrostatistische Näherung	227
8.4.5	Diffusion	228
8.4.6	Skineneffekt leitfähiger Materialien	229
8.5	Anwendung Wellenausbreitung	234
8.5.1	Herleitung der Wellengleichung	234
8.5.2	Allgemeine Behandlung von Wellenfeld-Problemen	235
8.5.3	Ausbreitung und Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	237
8.5.4	Energieausbreitung von elektromagnetischen Wellen	240
8.5.5	Lösung von Wellenausbreitungsproblemen mit dem Hertz'schen Vektor	240
8.5.6	Fernfeldbetrachtung des Hertz'schen Dipolstrahlers	242
8.6	Lernziele Kapitel 8	243
A	Mathematische Grundlagen	244
A.1	Der physikalische Raum	244
A.2	Der Vektorraum	244
A.2.1	Vektoralgebra	245

A.2.2	Komponentenzerlegung und Basistransformation	246
A.3	Der Raum	248
A.3.1	Raumpunkte	248
A.3.2	Ortsvektoren	248
A.3.3	Koordinaten	248
A.4	Objekte im Raum	250
A.4.1	Punkte	250
A.4.2	Linien	251
A.4.3	Flächen	252
A.4.4	Körper / Gebiete	253
A.5	Felder im Raum und auf Objekten	254
A.6	Differentialoperatoren	255
A.6.1	Einführende Beispiele	255
A.6.2	Definition des Nabla	256
A.6.3	Gradient	257
A.6.4	Rotation	258
A.6.5	Divergenz	260
A.7	Exakte Sequenz, Vergleich der Dimensionen, Reihenfolge der Operatoren	261
A.8	Integralsätze	264
A.8.1	Einführendes Beispiel	264
A.8.2	Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (HS)	264
A.8.3	Satz von Stokes	265
A.8.4	Satz von Gauß	266
A.8.5	Green'sche Theoreme	267
A.9	Delta-Funktion	268
A.9.1	Das mathematische Konzept der δ -Distribution	269
A.9.2	Darstellung der δ -Distribution im 1-Dimensionalen	271
A.9.3	Interpretation der bisherigen Erkenntnisse	273
A.9.4	Die $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen	274
A.9.5	Eigenschaften der $\delta^{(3)}$ -Funktion	274
A.9.6	Gradient der $\delta^{(3)}$ -Funktion	275

A.9.7 Darstellung der $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen 275

A.10 Lernziele Kapitel A 278

Literatur **280**

Abbildungsverzeichnis **280**

1 Einführung

1.1 Erste Schritte in der Feldtheorie

Zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene werden die Maxwell-Gleichungen verwendet. Im einfachsten Fall, z.B. für das Vakuum, können diese Gleichungen in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \end{aligned} \tag{1.1-1}$$

In der Vorlesung 'Elektrische und magnetische Felder' sollen diese Gleichungen im Einzelnen hergeleitet werden. Wie auch in der Geschichte der Physik werden hier aufgrund von Erfahrungswerten diese Gleichungen Schritt für Schritt erarbeitet. Die folgende Darstellung soll diese Vorgehensweise verdeutlichen:

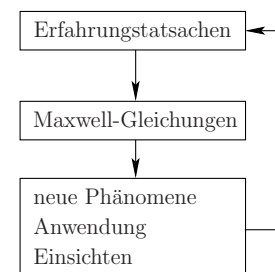


Abbildung 1.1: Flußdiagramm zur Vorgehensweise

Eine der ersten Beobachtungen ist die Kraft \vec{F} , die zwei Ladungen Q_1 und Q_2 aufeinander ausüben.

Die Erkenntnis, da diese Kraft \vec{F} proportional zum Produkt der beiden Ladungen $Q_1 Q_2$ ist und mit $1/r^2$ abfällt, wurde über viele Jahrzehnte mühsam erarbeitet: angefangen vom Reiben von Bernstein mit Katzenfell in der Antike, über die Formulierung des Coulomb-gesetzes bis zur Formulierung der Maxwell-Theorie im 19. Jahrhundert.

Das heute verwendete Maßsystem (SI-System) ist das magnetische Maßsystem. Aus historischen Gründen hat sich dieses vor dem elektrischen Maßsystem durchgesetzt. Die Definition des elektrischen Maßsystems führt über eine willkürliche Festlegung einer Proportionalitätskonstante bezüglich der Kraft zwischen zwei Ladungen. Durch ein entsprechendes Vorgehen gelangt man dann z.B. zum Gauß'schen Maßsystem.

Zur Definition des magnetischen Maßsystems wird die Kraft die zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben, betrachtet. Auch hier wurde in der Geschichte das entspre-

chende Phänomen beobachtet und beschrieben. Durch eine willkürliche Festlegung der Konstante (Konvention) μ_0 wurde diese Kraft im Sinne des heutigen SI-Systems definiert. Somit wurde auch die Konstante ϵ_0 über die Lichtgeschwindigkeit $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1}$ festgelegt.

Weiterhin wurde auch der Strom definiert. Die Einheit Ampere leitet man aufgrund des Zusammenhangs $\frac{d}{dt}Q = I$ aus der Ladung mit der Einheit $[C] = As$ ab.

Im Anschluß an dieses erste Kapitel folgen die elektromagnetischen Grundlagen, die die Basis für viele Spezialbereiche in der Elektrotechnik darstellen.

Grundsätzlich ist festzuhalten, daß die Erarbeitung einer guten Theorie eine harte und langwierige Arbeit ist, und bedarf viel Kreativität und Phantasie. Im Falle der Maxwell-Theorie hat es viele Jahrzehnte gedauert, bis diese geschlossen formuliert werden konnte. Und auch die Anwendung einer vorhandenen Theorie benötigt meist großen Aufwand und großes Verständnis.

1.2 Mathematische Voraussetzungen

Die Beschreibung elektromagnetischer Felder basiert zum Großteil auf mathematischen Beschreibungen. Aus diesem Grund gibt es eine Menge an mathematischen Konzepten, auf die in den folgenden Kapiteln immer wieder zurückgegriffen wird. Differential- und Integralrechnung, sowie vektoranalytische Zusammenhänge sind nur einige Beispiele, die ständig in Gebrauch sind. Zum Beispiel ist es oftmals für viele ungewohnt, gleichzeitig zwischen verschiedenen Koordinatensystemen zu wechseln und umzurechnen.

Um Probleme dieser Art zu vermeiden und um die mathematischen Voraussetzungen für die Vorlesung 'Elektrische und Magnetische Felder' grob zu skizzieren, finden Sie im Anhang A ein Kapitel mit den wichtigsten mathematischen Grundlagen. Für die Vorlesung werden diese als bekannt vorausgesetzt, da sie bereits in den Mathematik-Vorlesungen der ersten Semester des Grundstudiums gelehrt wurden. In den integrierten Übungen zur Vorlesung wird auszugsweise auf einige wichtige Grundlagen eingegangen. Jedoch kann in den Übungen nur auf einen kleinen Teil eingegangen werden.

1.3 Kommentar zum Skriptum

Dieses Skriptum stellt eine Unterstützung zur Grundlagenvorlesung 'Elektrische und Magnetische Felder' an der Ruhr-Universität Bochum dar. Es ist auf der Basis einer erweiterten Mitschrift entstanden und um viele Kommentare, Erläuterungen, Skizzen, Rechnungen und Erklärungen ergänzt worden. Dabei ist dieses Skriptum so gehalten, daß es die Philosophie der Vermittlung und die Darstellung der physikalischen Zusammenhänge auf ähnliche Weise wiedergibt, wie das in der Vorlesung selbst geschieht. Einige der Kapitel sind jedoch nicht explizit ein Teil der Vorlesung, jedoch eine hilfreiche Ergänzung. Teilweise sind hier Kapitel deutlich ausführlicher als in der Vorlesung dargestellt, wenn dies aus unserer Sicht eine Hilfestellung sein kann.

2 Elektrostatik

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen ruhenden Ladungen und dem statischen elektrischen Feld untersucht.

2.1 Feld und Potential einer Punktladung

2.1.1 Die elektrische Kraft

In der Geschichte der Elektrotechnik wurde mit Hilfe vieler mühsam erarbeiteter Erkenntnisse die Coulomb-Kraft definiert. Abbildung 2.1.1 stellt dabei die einfachste

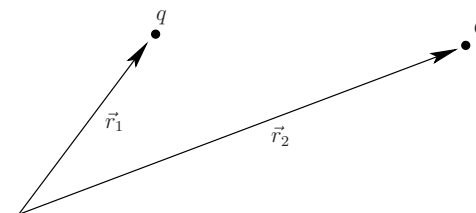


Abbildung 2.1: Zwei Punktladungen im Raum

Situation dar. Zwei Ladungen befinden sich in einem sonst leeren Raum. Die Coulomb-Kraft ergibt sich demnach zu:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \\ r &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

Gibt man der Kraft noch eine Richtung, so findet man die Kraft \vec{F} , die die Ladung q im Ort $vecr_1$ verspürt:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2.1-2)$$

2.1.2 Der Begriff des elektrischen Feldes

Aus den Beobachtungen, dargestellt in Abbildung 2.1.1, leitete man früher den Begriff der Fernkraft ab (Coulomb), da die beiden Ladungen q und Q eine Kraft aufeinander ausüben.

Mit der Zeit hat sich die Anschauung etwas geändert und der Feldbegriff wurde eingeführt (Faraday). Man hat erkannt, daß das elektrische Feld eine Eigenschaft des Raumes ist.

Dazu definiert man

$$\vec{E} = \frac{\text{Kraft auf Probeladung}}{\text{Probeladung}} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.1-3)$$

Mit der Definition der Kraft \vec{F} ergibt sich damit das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer Punktladung zu:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} = q\vec{E}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_Q) \end{aligned} \quad (2.1-4)$$

In der Gleichung für die Kraft ist q als Probeladung im Feld der Punktladung Q zu verstehen.

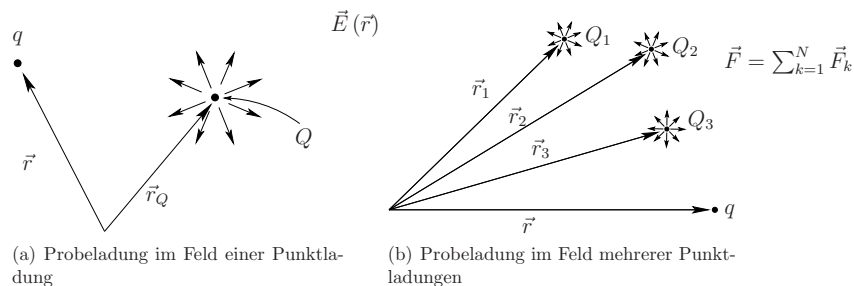


Abbildung 2.2: Zusammenhang Kraft und Elektrisches Feld

Für eine Ansammlung von mehreren Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 gilt Superposition:

Gesamtkraft = Summe der Teilkräfte

Die Gesamtkraft der Anordnung in Abbildung 2.2 ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{k=1}^N F_k = \sum_{k=1}^N q \vec{E}_k(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \\ &= q \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \\ &= q\vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

Die Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 erzeugen also das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r})$. Bringt man eine Probeladung q in dieses Feld, so erfährt diese Probeladung die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r})$

Die Feldstärke einer Punktladungswolke ist damit definiert:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.1-6)$$

2.1.3 Das elektrostatische Potential und das Feld einer Punktladung

In den vorherigen Kapiteln wurde bereits mehrfach eine Punktladung zur Beschreibung oder Herleitung verwendet. Im Folgenden sind die wichtigsten Ergebnisse bezüglich einer Punktladung aufgeführt.

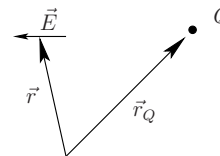


Abbildung 2.3: Punktladung und elektrisches Feld am Beobachtungspunkt

Der Abstand der Ladung vom Ort \vec{r} kann wie folgt berechnet werden:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q| \quad (2.1-7)$$

Aus Kapitel 2.1.2 ist bekannt, daß das elektrische Feld dieser Anordnung lautet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} \sim \frac{1}{R^2} \quad (2.1-8)$$

Wendet man die Rotation auf das elektrische Feld einer Punktladung an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \nabla \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \underbrace{\nabla \times (\vec{r} - \vec{r}_Q)}_{=0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \right) \times (\vec{r} - \vec{r}_Q) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-3 \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^5} \right) \times (\vec{r} - \vec{r}_Q) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.1-9)$$

Mit dieser Tatsache erinnert man sich an die Aussagen über exakte Sequenzen (siehe Kapitel A.7). Es gilt immer:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

Aus diesem Grund kann das elektrische Feld als Gradientenfeld identifiziert werden, speziell:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}$$

Der Zusammenhang des Vektorfeldes \vec{E} und des Skalarpotentials ϕ ist unter Beachtung der gängigen Konvention jedoch wie folgt definiert:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Der Skalar ϕ wird als elektrostatisches Potential bezeichnet.

Mit diesen Überlegungen zum Potential erhält man mit dem elektrischen Feld \vec{E} für die Punktladung und dem Zusammenhang $\vec{E} = -\nabla\phi$, daß das Potential einer Punktladung lauten muß:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} \quad \sim \quad \frac{1}{R} \quad (2.1-10)$$

Die Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.1-11)$$

ist eine der Feldgleichungen bezüglich der Punktladung.

Wendet man die Divergenz auf das elektrische Feld einer Punktladung an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_Q) \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} Q \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \end{aligned} \quad (2.1-12)$$

Diese Gleichung ist die zweite Feldgleichung bezüglich der Punktladung. Sie wird auch als Poisson-Gleichung des elektrischen Feldes einer Punktladung bezeichnet. Setzt man in diese Gleichung den Zusammenhang zwischen dem elektrostatischen Feld \vec{E} und dem elektrostatischen Potential ϕ ein, so erhält man die Gleichung, die üblicherweise als Poisson-Gleichung bezeichnet wird (hier speziell für die Punktladung):

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{\epsilon_0} Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (2.1-13)$$

Wichtig ist bei dieser Gleichung die Randbedingung, das Potential muß für $|\vec{r}| \rightarrow 0$ verschwinden.

2.2 Elektrische Ladungsdichten

Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential wurden bereits für eine Punktladung beschrieben (Kapitel 2.1.3). In Kapitel 2.1.2 wurde außerdem erläutert, daß für eine Ansammlung von mehreren Punktladungen das Superpositionsprinzip gilt und so zum Beispiel das elektrische Feld einer beliebigen punktförmigen Ladungsanordnung formuliert werden kann.

Da es nun verschiedene Ladungsanordnungen gibt, und man diese alle mit einem bestimmten Formalismus beschreiben möchte, führt man eine Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein. Diese beschreibt die Ladungsanordnung im Raum in geeigneter Weise.

Die Ladungsanordnung soll dabei die Einheit $[\rho] = \text{As m}^{-3}$ haben, also Ladung pro Volumen beschreiben.

Es macht Sinn, darüber nachzudenken, wie man die typischen Ladungsanordnungen als eine solche Raumladungsdichte beschreiben kann.

2.2.1 Die Ladungsdichte einer Punktladung

Vergleicht man die Einheiten der Ladung, $[Q] = \text{As}$, mit der der Raumladungsdichte, $[\rho] = \text{As m}^{-3}$, so ist klar, daß man etwas finden muß, was die Einheit m^{-3} trägt. Mit der Tatsache, daß eine Punktladung nur einen "Wert" in einem Punkt hat und sonst Null ist, fällt einem dazu die δ -Funktion ein. Betrachtet man Kapitel A.9.7 im Anhang, in welchem die $\delta^{(3)}$ -Funktion mit

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) \quad (2.2-14)$$

dargestellt wird, so liegt folgende Idee nahe: Der Ausdruck in Klammern auf der rechten Seite von Gleichung 2.2-14 ähnelt sehr dem elektrischen Feld einer Punktladung:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \quad (2.2-15)$$

Wendet man auf dieses elektrische Feld die Divergenz an (siehe auch Kapitel 2.1.3), so erkennt man, daß die δ -Funktion und die Ladung q in genau der oben gewünschten Form auftauchen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_Q) \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} Q \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \end{aligned} \quad (2.2-16)$$

Die Punktladung Q wird also mit der δ -Funktion multipliziert und das Produkt trägt die gewünschte Einheit As m^{-3} . Aus diesem Grund wird das Produkt $Q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)$ als Raumladungsdichte einer Punktladung aufgefaßt:

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (2.2-17)$$

Damit erhält man als Ergebnis die folgende Gleichung:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (2.2-18)$$

Dies ist bereits eine der Maxwell-Gleichungen. Aufgrund der Linearität des betrachteten Raumes und der Physik gilt Superposition und damit $\rho(\vec{r})$ für alle möglichen Raumladungsdichten und nicht nur für Punktladungsverteilungen.

Aus der Superposition ergibt sich zum Beispiel die Ladungsdichte einer Punktladungswolke zu:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.2-19)$$

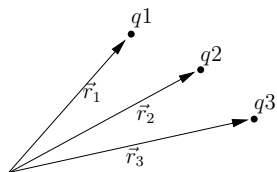


Abbildung 2.4: Punktladungswolke

Der allgemeine Zusammenhang der Ladung q und der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ergibt sich aus der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion. Mit der Tatsache, daß die Ausblendeigenschaft wie folgt formuliert werden kann

$$\int_V f(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = f(\vec{r}) \quad (2.2-20)$$

kann für eine Punktladung geschrieben werden:

$$\int_V Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = Q \quad (2.2-21)$$

Mit der Identifizierung der Raumladungsdichte $\rho(\vec{r}) = Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q)$ für eine Punktladung und mit der Gültigkeit des Superpositionsprinzips gilt allgemein für Ladungsanordnungen $\rho(\vec{r})$:

$$Q_{\text{ges}} = \int_V \rho(\vec{r}') d^3r' \quad (2.2-22)$$

Für den Fall einer Punktladungswolke gilt dies natürlich auch. Die Gesamtladung der Punktladungswolke in Gleichung 2.2-19 mit $N = 3$ ist gegeben durch:

$$Q_{\text{ges}} = \int_V \rho(\vec{r}') d^3r' = \int_V \sum_{i=1}^3 Q_i \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_i) d^3r' = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (2.2-23)$$

Für Ladungsanordnungen, welche linienförmig, flächig oder volumenartig gebaut sind, liefert eine Grenzwertbetrachtung unendlich vieler Punktladungen eine Einsicht. Zum Beispiel kann man sich eine Linienladung als unendlich viele Punktladungen infinitesimal nahe nebeneinander vorstellen.

Mit dieser Anschauung werden nun alle weiteren relevanten Ladungsanordnungen betrachtet.

2.2.2 Die Ladungsdichte einer Linienladung

Zur Darstellung einer linienhaft verteilten Ladungsdichte sei auf Abbildung 2.5 verwiesen. Dabei kann das Linienelement der Linie wie folgt berechnet werden:

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{Q|\Delta\alpha}{\Delta\alpha} = \tau_f(\alpha) \quad (2.2-24)$$

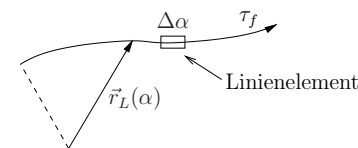


Abbildung 2.5: Linienladungsdichte

Die Variable τ_f bezeichnet dabei die Linienladungsdichte der Linie, der Index f weist darauf hin, daß es sich um freie Ladungen handelt:

$$\Rightarrow \tau_f = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\alpha}\right)}{\left(\frac{\Delta S}{\Delta\alpha}\right)} \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad (2.2-25)$$

Die Darstellung einer geladenen Linie als Raumladungsdichte lautet:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \int_{\text{Linie}} \tau_f(\alpha) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(\alpha)) \left| \frac{\partial \vec{r}_L(\alpha)}{\partial \alpha} \right| d\alpha \\ &= \int_{\text{Linie}} \tau_f(s) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \quad \text{auf Bogenlänge parametrisiert} \end{aligned} \quad (2.2-26)$$

Das differentielle ds ist also der Betrag der Richtungsableitung der parametrisierten Linie in Richtung des Linienparameters. Das Linienintegral berücksichtigt alle Anteile $\tau_f(s)$ entlang der Linie.

Will man die Einheiten der letzten Gleichung überprüfen, so ergibt sich:

$$\underbrace{\rho(\vec{r})}_{\frac{\text{As}}{\text{m}^3}} = \int_{\text{Linie}} \underbrace{\tau_f(s)}_{\frac{\text{As}}{\text{m}}} \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s))}_{\frac{1}{\text{m}^3}} \underbrace{ds}_m$$

2.2.3 Die Ladungsdichte einer Flächenladung

Die Darstellung einer geladenen Fläche als Raumladungsdichte lautet:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \int_{\text{Fläche}} \sigma_f(\alpha, \beta) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_F(\alpha, \beta)) \left| \frac{\partial^2 \vec{r}_F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \right| d\alpha d\beta \\ &= \int_{\text{Fläche}} \sigma_f(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^2r' \end{aligned} \quad (2.2-27)$$

Die Fläche ist dabei durch zwei Parameter α, β parametrisiert (siehe Abbildung 2.6). Die Variable σ_f wird als Flächenladungsdichte bezeichnet, sie hat die Einheit As m^{-2} . Der Index f weist darauf hin, daß es sich um freie Ladungen handelt:

$$\sigma_f = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \frac{dQ}{dF} \quad (2.2-28)$$

Zur Berechnung des Flächenelementes d^2r' wird außerdem die Jacobi-Determinante benötigt:

$$d^2r' = \left| \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta \quad (2.2-29)$$

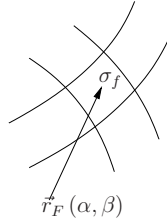


Abbildung 2.6: Ladungsdichte einer Fläche

2.2.4 Die Ladungsdichte eines Körpers

Analog zur Raumladungsdichte einer Linie und einer Fläche ist die Raumladungsdichte eines Körpers definiert:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{\text{Körper}} \rho_{f,K}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \quad (2.2-30)$$

Wertet man dieses Integral aus, so ergibt sich:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{\text{Körper}} \rho_{f,K}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = \begin{cases} \rho_{f,K}(\vec{r}) & \text{wenn } \vec{r} \text{ im Körper} \\ 0 & \text{wenn } \vec{r} \text{ nicht im Körper} \end{cases} \quad (2.2-31)$$

Das Raumelement d^3r' berechnet sich dabei mit

$$d^3r' = \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right| d\alpha d\beta d\gamma \quad (2.2-32)$$

wenn der Körper durch die drei Parameter α, β und γ parametrisiert ist. $\rho_{f,K}$ hat die Einheit $\frac{\text{As}}{\text{m}^3}$, wie die Raumladungsdichte ρ selbst auch, der Index f weist wiederum auf freie Ladungen hin und der Index K soll darauf hindeuten, daß die Raumladungsdichte eines speziellen Körpers betrachtet wird.

2.3 Charakterisierung des elektrischen Feldes

In Kapitel 2.1 wurden die Feldgleichungen, das elektrostatische Feld und das elektrostatische Potential einer Punktladung hergeleitet. In Kapitel 2.2 wurden dann weitere typische Ladungsanordnungen betrachtet, die jeweils mit Hilfe von Superposition aus einer geeigneten Anordnung von Punktladungen dargestellt wurden. Diese wurden dann allgemein als Raumladungsdichte ausgedrückt.

Die in Kapitel 2.1 hergeleiteten Feldgleichungen der Punktladung und deren Lösungen sollen nun für alle beliebigen Arten von Ladungsverteilungen formuliert werden. Auch in diesem Fall wird auf die Methode der Superposition zurückgegriffen. Dazu werden im Folgenden die Differentialoperatoren Divergenz ($\nabla \cdot$) und Rotation ($\nabla \times$) bezüglich des elektrostatischen Feldes betrachtet um das elektrostatische Feld zu charakterisieren. Anschließend wird noch einmal auf Coulomb-Integrale eingegangen. Auch der Begriff des elektrostatischen Potentials wird dabei entsprechend berücksichtigt.

2.3.1 Rotation des elektrischen Feldes

Zunächst wird das elektrische Feld auf Wirbel untersucht. Dazu wendet man die Rotation auf das Feld an. Zur Berechnung wird eine beliebige Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ verwendet. Die Rotation des elektrischen Feldes berechnet sich damit zu:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r' \end{aligned} \quad (2.3-33)$$

Mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \nabla \times (\varphi \vec{\psi}) &= \nabla \times (\varphi_c \vec{\psi}) + \nabla \times (\varphi \vec{\psi}_c) \\ &= \varphi_c \nabla \times \vec{\psi} + (\nabla \varphi) \times \vec{\psi}_c = 0 \end{aligned} \quad (2.3-34)$$

ergibt sich für die Rotation

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) &= \underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \nabla \times (\vec{r} - \vec{r}')}_0 + \left(\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right) \times (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -3 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3-35)$$

Daraus erhält man eine der zwei Maxwell-Gleichungen für das elektrostatische Feld:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.3-36)$$

Da das elektrische Feld somit wirbelfrei ist, kann das elektrostatische Feld allgemein durch den Gradienten eines Potentials dargestellt werden:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.3-37)$$

2.3.2 Divergenz des elektrischen Feldes

Zur Bestimmung der Quellen des elektrischen Feldes wird die Divergenz des Feldes bestimmt. Als Beispiel für die Berechnung der Divergenz des elektrischen Feldes wird das Feld einer Punktladung aus Kapitel 2.2.1 verwendet. Unter der Verwendung des Superpositionsprinzips konnte der Zusammenhang der Divergenz des elektrischen Feldes zu einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ gefunden werden. Demnach konnte bereits in Kapitel 2.2.1 eine der Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.3-38)$$

Durch Einsetzen der Gleichung $\vec{E} = -\nabla \phi$ ist außerdem mit der Poisson-Gleichung der Zusammenhang des elektrostatischen Potentials mit beliebigen Ladungsverteilungen gegeben.

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho \quad (2.3-39)$$

2.3.3 Coulomb-Integrale

Zur Bestimmung eines solchen Potentials ϕ wird von einer Raumladungsdichte ausgegangen:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N Q_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.3-40)$$

Mit dem Superpositionsprinzip und dem elektrischen Feld einer Punktladung erhält man das Feld einer Punktladungswolke mit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.3-41)$$

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\psi}(\vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3r' &= \int_V \vec{\psi}(\vec{r}') \sum_{k=1}^N Q_k \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_k) d^3r' \\ &= \sum_{k=1}^N Q_k \vec{\psi}(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (2.3-42)$$

wird die Ausblendeigenschaft bezüglich einer beliebigen Gewichtsfunktion $\psi(\vec{r})$ ausgenutzt. Nimmt man an, daß

$$\sum_{k=1}^N Q_k \vec{\psi}(\vec{r}_k) = \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.3-43)$$

ergeben muß, so muß die Gewichtsfunktion $\psi(\vec{r}_k)$ wie folgt gewählt werden:

$$\vec{\psi}(\vec{r}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.3-44)$$

Damit wurde eine Schreibweise gefunden, um das Feld einer beliebigen Punktladungswolke zu berechnen. Für beliebige Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ ergibt sich mit der Definition in Gleichung 2.3-40 und dem Superpositionsprinzip eine allgemeine Integralgleichung zur Berechnung des elektrischen Feldes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \quad (2.3-45)$$

Diese Gleichung wird als Coulomb-Integral des elektrischen Feldes bezeichnet und ist damit die Lösung der Maxwell-Gleichung $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$. Durch Einsetzen von Gleichung 2.3-45 in diese Maxwell-Gleichung kann dies verifiziert werden.

Das Coulomb-Integral des elektrostatischen Potentials soll nun durch folgende Aufgabe hergeleitet werden:

Gegeben ist:

- endliche Ladungsverteilung ρ

- Randbedingung: Potential verschwindet im Unendlichen: $\phi \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$
- Poisson-Gleichung: $-\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho$

Gesucht ist die Lösung von:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \dots \rho(\vec{r}') d^3r'$$

Der Wunsch, diese Form der Integralgleichung zu erhalten ergibt sich aus der ähnlichen Struktur des Coulomb-Integrals bezüglich des elektrischen Feldes. Damit besteht die Aufgabe darin, die mit Punkten frei gehaltene mathematische Funktion zu finden. In der Feldtheorie bezeichnet man die gesuchte Funktion als die Green'sche Funktion des freien Raumes $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Die Formulierung "für den freien Raum" ist deshalb sehr wichtig, weil die zugehörige Randbedingung erwartet, daß das Potential im Unendlichen verschwindet (siehe oben). In Kapitel 2.3.7 wird noch einmal explizit auf diese Green'sche Funktion eingegangen.

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') d^3r' \\ &= -\nabla \phi(\vec{r}) \\ &= -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \underbrace{\dots}_{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \rho(\vec{r}') d^3r' \right) \end{aligned} \quad (2.3-46)$$

Daraus erhält man das Coulomb-Integral, für das elektrostatische Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.3-47)$$

Diese Integralgleichung ist damit die Lösung der Poisson-Gleichung $\epsilon_0 \nabla^2 \phi = -\rho$. Durch Einsetzen kann dies verifiziert werden.

2.3.4 Zusammenhang und Zusammenfassung der Feldgleichungen und deren Lösung

Aus den Grundlagen der Elektrostatik weiß man, daß das elektrische Feld und das elektrostatische Potential über den Gradienten zusammenhängen. Die zur Berechnung zur Verfügung stehenden Gleichungen lauten damit:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.3-48)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3-49)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (2.3-50)$$

Zur Berechnung des Potentials stehen die folgenden Gleichungen zur Verfügung:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.3-51)$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.3-52)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.3-53)$$

Die Integraldarstellungen für das elektrische Feld (Gleichung 2.3-50) und für das Potential (Gleichung 2.3-53) lösen die elektrostatischen Gleichungen (2.3-48, 2.3-49 und 2.3-52) bei vorgegebener Raumladungsdichte im sonst leeren Raum. Die Gleichungen 2.3-50 und 2.3-53 werden meist als Coulomb-Integrale bezeichnet. Ist von „dem“ Coulomb-Integral die Rede, ist meist die Gleichung für das Potential gemeint.

2.3.5 Eigenschaften der Coulomb-Integrale

Die Gleichungen des elektrostatischen Feldes sind gegeben mit:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.3-54)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.3-55)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.3-56)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0 \nabla^2\phi = \rho \quad (2.3-57)$$

Für das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (2.3-58)$$

erhält man das elektrostatische Potential

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + C \quad (2.3-59)$$

als ein mögliches zugehöriges Potential.

Im Allgemeinen wird das Potential einer Punktladung so gewählt, daß es im Unendlichen verschwindet, d.h. die Konstante C wird zu Null gesetzt!

Oft kann das Potential einer Ladungsverteilung ρ mit dem Coulomb-Integral berechnet werden:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.3-60)$$

Dies gilt aber nur, wenn die Raumladung räumlich begrenzt ist, d.h. wenn das Potential im Unendlichen verschwindet. Das Coulomb-Integral kann also nur dann angewandt werden, wenn im Unendlichen keine Ladungen lokalisiert sind. Für den Sonderfall, daß der

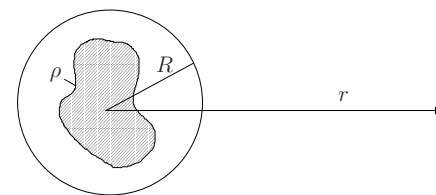


Abbildung 2.7: Ladungsverteilung im Endlichen lokalisiert

Abstand groß zur äußeren Hülle um $\rho(\vec{r})$ ist (siehe Abbildung 2.7) verschwindet das Potential im Unendlichen. Mit großem Abstand R sieht also diese Raumladungsverteilung wie eine Punktladung mit $Q = \int_V \rho(\vec{r}') d^3r'$ aus:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|} \end{aligned} \quad (2.3-61)$$

2.3.6 Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und des Potentials

Was bedeutet der Begriff Potential?

Antwort:

Arbeit ist wegunabhängig \leftrightarrow über einen geschlossenem Weg wird keine Arbeit geleistet

Beweis

Satz von Stokes:

$$q \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \int_F \underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{\varphi} = 0 \quad (2.3-62)$$

Abbildung 2.8 stellt vier verschiedene Wege durch das elektrische Feld \vec{E} dar. Aufgrund der Wirbelfreiheit existiert ein elektrisches Potential. Mit dem Potential ist der Begriff der

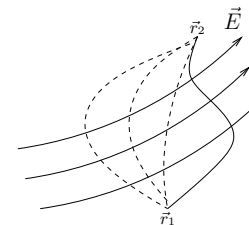


Abbildung 2.8: elektrisches Feld

Arbeit direkt verbunden. Die Arbeit ist aufgrund des Potentials wegunabhängig definiert

mit:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.3-63)$$

Die Arbeit W ist damit bezogen auf eine Probeladung q , die durch das elektrische Feld \vec{E} wegunabhängig bewegt werden kann.

Die Wegunabhängigkeit und der Satz von Stokes (Gleichung 2.3-62) beweisen damit, daß das Wegintegral auf einer geschlossenen Kurve Null sein muß:

$$W = q \oint_{\text{Kurve}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.3-64)$$

Diese Aussage ist gleichbedeutend mit: "Es gibt kein elektrisches Perpetuum Mobile" (siehe Abbildung 2.9).

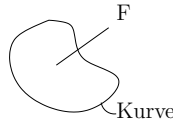


Abbildung 2.9: geschlossene Kurve im elektrostatischen Feld

Der Zusammenhang des elektrischen Potentials und des Feldes sei hier noch einmal in Integralform dargestellt:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.3-65)$$

$$\nabla \phi = - \nabla \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E}(r) \quad (2.3-66)$$

2.3.7 Green'sche Funktion des freien Raumes

Zur Bestimmung des elektrostatischen Feldes muß die folgende Maxwell-Gleichung

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

gelöst werden. Wie in 3.14 gezeigt wurde, kann das Feld durch ein Potential beschrieben werden. Damit ergibt sich die Gleichung zu

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi \quad (2.3-67)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich einfach angeben, wenn man die Greenfunktion kennt. Allgemein läßt sich eine partikuläre Lösung unter Verwendung der Greenfunktion mit

$$y_{sp} = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') H(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' \quad (2.3-68)$$

angeben. Die Lösung für das Potential ist bereits als das Coulomb-Integral

$$\phi = \int_V \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} d^3 r' \quad (2.3-69)$$

bekannt. Somit läßt sich die Greenfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ und $H(\vec{r}')$ identifizieren:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.3-70)$$

$$H(\vec{r}') = \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} \quad (2.3-71)$$

Wendet man nun den Differentialoperator auf die Greenfunktion an, erhält man

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla^2 \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.3-72)$$

$$= -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.3-73)$$

Gesucht war die Lösung der Differentialgleichung, in der nun die Lösung eingesetzt wird.

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \nabla^2 \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') H(\vec{r}') d^3 r' \quad (2.3-74)$$

$$= \int_V \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') H(\vec{r}') d^3 r' \quad (2.3-75)$$

Durch Einsetzen der zuvor bestimmten Funktion erhält man die Lösung für das Potential, welches durch eine Raumladungsverteilung hervorgerufen wird:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \int_V (-\delta(\vec{r} - \vec{r}')) \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} d^3 r' \quad (2.3-76)$$

$$= -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (2.3-77)$$

$$= \nabla \cdot \vec{E} \quad (2.3-78)$$

Hat man nun diese Lösung berechnet, kann man $G(\vec{r}, \vec{r}')$ zur allgemeinen Berechnung beliebiger elektrischer Potentiale ϕ bezüglich einer beliebigen Ladungsverteilung ρ berechnen. Durch Integration kann man aus dem bekannten Potential das elektrische Feld bestimmen. Mit der Definition

$$\phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} d^3 r' \quad (2.3-79)$$

erhält man das elektrische Potential bezüglich der Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. Die Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ wird auch als Green'sche Funktion des freien Raumes bezeichnet und lautet nach obiger Beschreibung:

$$G = G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.3-80)$$

Es empfiehlt sich, die Struktur der Lösung mit dem elektrischen Feld zu vergleichen (siehe Kapitel 2.4.1), um die Ähnlichkeit zu sehen.

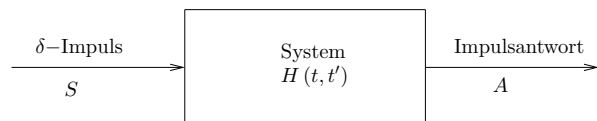


Abbildung 2.10: Nachrichtentechnisches Übertragungssystem

In der Nachrichtentechnik oder Signaltheorie wird dieses Vorgehen sehr häufig verwendet. Man findet den Zusammenhang als Analogie zur Impulsantwort (siehe Abbildung 2.10):

Die Antwort auf ein beliebiges Signal lautet dann

$$A(t) = \int \text{Impulsantwort} \cdot \text{Signal} dt'$$

sie kann demnach mit Hilfe einer Faltung berechnet werden. Für das in Abbildung 2.10 dargestellte Eingangssignal $S(t)$ berechnet sich das Ausgangssignal $A(t)$ zu:

$$A(t) = \int H(t, t') S(t') dt'$$

2.4 Beispiele für die Coulomb-Integrale

2.4.1 Berechnung des Potentials und des elektrischen Feldes einer Punktladung

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials einer Punktladung wird das zugehörige Coulomb-Integral gelöst:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \end{aligned} \quad (2.4-81)$$

Zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Punktladung wird das zugehörige Coulomb-Integral gelöst:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} \end{aligned} \quad (2.4-82)$$

Vergleichen Sie dazu die Ergebnisse aus dem Kapitel 2.1.3.

2.4.2 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential einer endlichen Linienladung

Zur Berechnung des elektrischen Feldes einer beliebigen Linienladung soll gelten, daß $\vec{r}_L(s_0)$ und $\vec{r}_L(s_1)$ mit s_0 und s_1 im Endlichen lokalisiert sind. Für $\vec{r}_L(s_0)$ und $\vec{r}_L(s_1)$

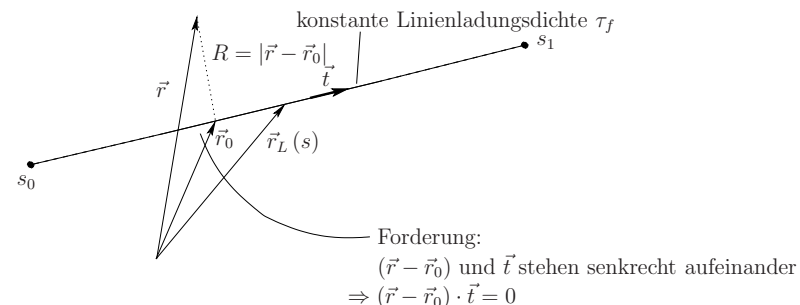


Abbildung 2.11: Darstellung einer Linienladung

im Unendlichen gibt es Probleme! Zunächst werden das Potential und das elektrische Feld koordinatenfrei berechnet. Anschließend wird zur besseren Veranschaulichung ein konkretes Beispiel ausführlich diskutiert.

Zuerst wird die Linie parametrisiert, eine mögliche koordinatenfreie Darstellung lautet:

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}_0 + s\vec{t} \quad (2.4-83)$$

Sofern die Linie auf Bogenlänge parametrisiert ist, gilt:

$$|\vec{t}| = 1 \quad (2.4-84)$$

Weil \vec{r}_0 als Lotpunkt gewählt werden kann, wird hier die folgende Eigenschaft gefordert:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{t} \quad (2.4-85)$$

Die Raumladungsdichte der Linie ergibt sich mit dieser Parametrisierung zu:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \int_{\text{Linie}} \tau_f(s) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \tau_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t}) ds \end{aligned} \quad (2.4-86)$$

Nun kann das elektrische Feld mit Hilfe des Coulomb-Integrals berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \int_{s_0}^{s_1} \tau_f \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 - s\vec{t}) ds d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \int_{s_0}^{s_1} \left[\int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 - s\vec{t}) d^3r' \right] ds \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \int_{s_0}^{s_1} \frac{\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t})}{|\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t})|^3} ds \end{aligned} \quad (2.4-87)$$

Da die Vektoren $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ und \vec{t} senkrecht aufeinander stehen, kann der Betrag im Nenner leicht berechnet werden:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0 + s\vec{t}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s^2\vec{t}^2} \quad (2.4-88)$$

Dazu wird eine neue Variable eingeführt:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| \quad (2.4-89)$$

Eingesetzt in die Gleichung vorher ergibt dies:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{s_0}^{s_1} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) - s\vec{t}}{(R^2 + s^2)^{3/2}} ds \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_0) \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{(R^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \vec{t} \int_{s_0}^{s_1} \frac{s ds}{(R^2 + s^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_0) \left[\frac{s}{R^2 \sqrt{R^2 + s^2}} \right]_{s_0}^{s_1} - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \vec{t} \left[\frac{-1}{\sqrt{R^2 + s^2}} \right]_{s_0}^{s_1} \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_0) \left[\frac{s_1}{R^2 \sqrt{R^2 + s_1^2}} - \frac{s_0}{R^2 \sqrt{R^2 + s_0^2}} \right] + \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \vec{t} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + s_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + s_0^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.4-90)$$

Auf die gleiche Weise kann das elektrostatische Potential berechnet werden:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{s_0}^{s_1} \tau_f \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 - s\vec{t}) ds d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \int_{s_0}^{s_1} \left[\int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0 - s\vec{t}) d^3r' \right] ds \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{|\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t})|} ds \end{aligned} \quad (2.4-91)$$

Mit 2.4-88 erhält man das elektrostatische Potential einer endlichen Linienladung:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{(R^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \left[\ln \left(s + \sqrt{R^2 + s^2} \right) \right]_{s_0}^{s_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \ln \frac{s_1 + \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s_1^2}}{s_0 + \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s_0^2}} \end{aligned} \quad (2.4-92)$$

Dieses Ergebnis wird als solches allgemein festgehalten. Eine Auswertung kann nun für spezielle Fälle durchgeführt werden.

Für die spezielle Linie

$$\vec{r}_L(s) = s\vec{e}_x; s \in \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right] \quad (2.4-93)$$

dargestellt in Abbildung 2.12, mit dem zugehörige Ortsvektor im 2-Dimensionalen:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \quad (2.4-94)$$

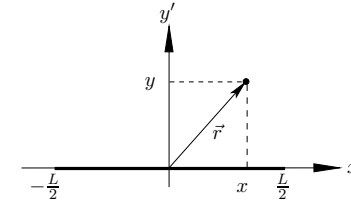


Abbildung 2.12: Linienladung

erhält man unter Verwendung des Teilergebnisses oben das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{\text{Linie}} \tau_f \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_L(s)) ds \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Linie}} \frac{\vec{r} - \vec{r}_L(s)}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds \end{aligned} \quad (2.4-95)$$

Setzt man die parametrisierte Linie ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{-(L/2)}^{L/2} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - s\vec{e}_x}{|x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - s\vec{e}_x|^3} ds \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(L/2)}^{L/2} \frac{x-s}{((x-s)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} ds \vec{e}_x + \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(L/2)}^{L/2} \frac{y}{((x-s)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} ds \vec{e}_y \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - L/2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + L/2)^2 + y^2}} \right) \vec{e}_x \\ &\quad + \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{L-2x}{2y\sqrt{(x - L/2)^2 + y^2}} + \frac{L+2x}{2y\sqrt{(x + L/2)^2 + y^2}} \right) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (2.4-96)$$

Für das elektrostatische Potential erhält man in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \ln \frac{s_1 + \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s_1^2}}{s_0 + \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s_0^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau_f \ln \frac{\frac{L}{2} + x + \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + x + \sqrt{(-\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (2.4-97)$$

Es ist nun interessant, einige Sonderfälle genauer zu betrachten.

Fall 1:

$x = 0$ Auswertung nur auf der y -Achse

Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\frac{L}{2y}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}} + \frac{\frac{L}{2y}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}} \right) \vec{e}_y \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \vec{e}_y\end{aligned}\quad (2.4-98)$$

Das zugehörige Potential lautet:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}} \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}}\end{aligned}\quad (2.4-99)$$

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.13(b) das Potential auf der y -Achse skizziert.

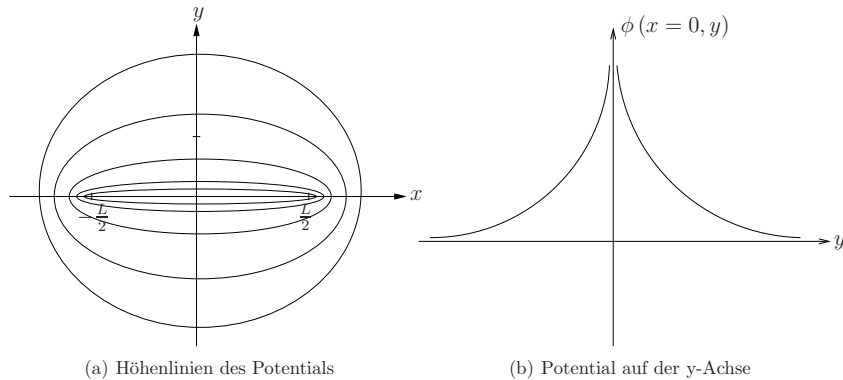


Abbildung 2.13: Potential einer endlich geladenen Linie

Fall 2:

$y \gg L$

Zur Betrachtung dieses Sonderfalls wird vom Ergebnis des ersten Falls ausgegangen. Durch geringfügige Umformulierungen erhält man:

$$\vec{E}(y) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \vec{e}_y \quad (2.4-100)$$

$$= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4y^2} + 1}} \vec{e}_y \quad (2.4-101)$$

Durch eine Taylor-Reihenzerlegung des Terms $\left(\frac{L^2}{4y^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ erhält man:

$$\vec{E}(y) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y^2} \left(1 - \frac{L^2}{8y^2} + \dots\right) \vec{e}_y \quad (2.4-102)$$

In großer Entfernung ist der erste Term dominant und alle anderen verschwindend klein, deshalb erhält man:

$$\vec{E}(y) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y^2} \vec{e}_y \quad (2.4-103)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} \vec{e}_y \quad (2.4-104)$$

Durch eine ähnliche Vorgehensweise erhält man das zugehörige Potential. Durch eine Umformulierung erhält man:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2y} + \sqrt{\frac{L^2}{4y^2} + 1}}{-\frac{L}{2y} + \sqrt{\frac{L^2}{4y^2} + 1}}\end{aligned}\quad (2.4-105)$$

Durch eine Taylor-Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks

$$\sqrt{\frac{L^2}{4y^2} + 1} = 1 + \frac{L^2}{8y^2} + \dots$$

erhält man:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L}{2y} + 1 + \frac{L^2}{8y^2} + \dots \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(-\frac{L}{2y} + 1 + \frac{L^2}{8y^2} + \dots \right) \quad (2.4-106)$$

Für $y \gg L$ verschwinden die höheren Terme:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{L}{2y} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 - \frac{L}{2y} \right) \quad (2.4-107)$$

Entwickelt man nun den ln in eine Taylor-Reihe

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \dots$$

$$\ln(1 - \epsilon) = -\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{3}\epsilon^3 + \dots$$

so erhält man:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \left(2\frac{L}{2y} + \frac{2}{3}\frac{L^3}{8y^3} + \dots \right) \quad (2.4-108)$$

Auch hier fallen die höheren Terme für $y \gg L$ weg und man erhält das Potential einer aus großer Entfernung betrachteten Linienladung: großer Entfernung:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\tau_f L}{4\pi\epsilon_0 y} \quad (2.4-109)$$

Mit der Tatsache, daß die Gesamtladung einer endlich ausgedehnten Linie der Länge L mit der konstanten Linienladung τ_f wie folgt berechnet werden kann

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \int_{\text{Linie}} \tau_f \delta^{(3)}(r - r_L(s)) ds d^3r \\ &= \int_{\text{Linie}} \tau_f \int_V \delta^{(3)}(r - r_L(s)) d^3r ds \\ &= \tau_f \int_{\text{Linie}} ds = \tau_f L \end{aligned} \quad (2.4-110)$$

erkennt man, daß aus weiter Entfernung die endliche Linie wie eine Punktladung wahrgenommen wird. In Skizze 2.13(b) ist dies für große Entfernungen zur Linienladung bezüglich des Potentials skizziert. Für große Abstände zur Linie entsprechen die Höhenlinien Kreisen, wie es für eine Punktladung im 2-Dimensionalen erwartet wird.

Fall 3:

$$L \rightarrow \infty$$

Dieser Spezialfall betrachtet das Feld und das Potential einer unendlich ausgedehnten Linie (siehe auch Kapitel 2.4.3). Auch hier wird von dem Ergebnis des ersten Falles ausgegangen. Das Feld erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \vec{e}_y \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{y} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{L^2}}} \vec{e}_y \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{y} \vec{e}_y \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau_f}{y} \vec{e}_y \end{aligned} \quad (2.4-111)$$

Versucht man nun auf ähnliche Weise das zugehörige Potential auszurechnen, so erhält

man ein divergentes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sqrt{1 + \frac{4y^2}{L^2}}}{-\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sqrt{1 + \frac{4y^2}{L^2}}} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + 1 + \frac{2y^2}{L^2} + \dots}{-1 + 1 + \frac{2y^2}{L^2} + \dots} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \frac{y^2}{L^2} + \dots}{\frac{y^2}{L^2} + \dots} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L^2}{y^2} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{y} \rightarrow \text{divergiert} \end{aligned} \quad (2.4-112)$$

Das einzige was man aus diesem Ergebnis ablesen kann, ist die Struktur des zu erwartenden Potentials. Da dieses Ergebnis aber so einfach auf keinen brauchbaren Ausdruck führt, muß man eine andere Berechnungsmethode wählen.

2.4.3 Potential und elektrisches Feld einer unendlich ausgedehnten Linie

Wiederum wird hier das Beispiel einer Linienladung auf der x -Achse im 2-Dimensionalen betrachtet (Abbildung 2.12). Lediglich die Länge der Linienladung ist nun unendlich, das heißt es wird der Grenzfall betrachtet:

$$L \rightarrow \infty$$

Bevor man anfängt, das Potential oder das elektrische Feld zu berechnen, kann man Symmetrieüberlegungen anstellen. Da es sich um eine gerade Linie handelt, ist die Anordnung rotations-symmetrisch um die Linie selbst, und da die Linie unendlich lang ist, kann man sich entlang der Linie bewegen und stellt keine Veränderungen fest, wenn man den gleichen Abstand beibehält. Das bedeutet, die Anordnung ist also auch symmetrisch bezüglich der Bewegung entlang der Linie. Aus diesem Grund wird auch hier der 2-dimensionale Spezialfall betrachtet, für das Potential wird dabei erwartet, daß es nur noch vom Abstand zur Linie abhängt.

Versucht man das Potential dieser Anordnung mit dem Coulomb-Integral direkt zu berechnen, so stellt man fest, daß das Integral divergiert:

$$\phi = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(x-s)^2 + y^2}} = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \rightarrow \text{divergiert} \quad (2.4-113)$$

Die Einführung der Variable ξ beruht auf der Substitution $\xi = x - s$. Die Integralgrenzen $+\infty$ und $-\infty$ bleiben dabei erhalten.

Aufgrund der Struktur des elektrischen Feldes $E \sim \frac{1}{y}$ besteht das Problem, daß das Potential divergiert:

$$\phi|_{\infty} \sim \int_{-\infty}^{\infty} E \, ds \quad (2.4-114)$$

Die Idee, das Potential der endlichen Linie zu verwenden und den Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ durchzuführen führt nicht zu einem geeigneten Ergebnis. Dieses Ergebnis ist divergent (siehe Kapitel 2.4.2).

Eine neue Idee ist es nun, das Potential zu renormieren. Dies wird durch eine Addition oder Subtraktion einer Konstanten zum Potential der endlich langen Linie realisiert. Anschließend wird der Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ gebildet. Dazu wird das Potential der endlich langen geladenen Linie verwendet (Gleichung 2.4-97):

$$\phi(x, y) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{L}{2} + x + \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + x + \sqrt{(-\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}} \right)$$

Legt man eine Konstante an einem beliebig gewählten Ort fest, zum Beispiel $(0, a)$, so ist der Wert dieses Potentials:

$$\phi(0, a) = \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \right) \quad (2.4-115)$$

Subtrahiert man nun die Konstante und bildet ein neues Potential $\tilde{\phi}$, so hat man den Nullpunkt des neuen Potentials in den Punkt $(0, a)$ geschoben. Durch Ausnutzen der Logarithmuseigenschaften wird das Potential geringfügig umgestellt:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y) &= \phi(x, y) - \phi(x=0, y=a) \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{L}{2} + x + \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + x + \sqrt{(-\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \right) \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{L}{2} + x + \sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}}{\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{-\frac{L}{2} + x + \sqrt{(-\frac{L}{2} + x)^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \right) \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{L} + \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{x}{L})^2 + \frac{y^2}{L^2}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2}}} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{L} + \sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{x}{L})^2 + \frac{y^2}{L^2}}}{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.4-116)$$

Nun kann die Grenzwertbetrachtung $L \rightarrow \infty$ durchgeführt werden. Dabei wird erwartet, daß der Grenzwert keine Abhängigkeit mehr von der Variable x , sondern nur noch eine von y zeigt. Diesen Grenzwert jetzt ohne intensive Überlegungen durchzuführen führt nicht zum gewünschten Ziel. Der zweite Term würde mathematisch gesehen zu einer Divergenz des Ergebnisses führen. Betrachtet man die Argumente der beiden Logarithmen, so stellt

man fest, daß die Grenzwertbildung bezüglich x einfach ist und nur die bezüglich y mehr Überlegung bedarf, da y nur in Wurzelausdrücken erscheint. Führt man also den Grenzwert zuerst nur bezüglich der Variable x aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \phi_{\infty}^*(x, y) &= \lim_{\frac{x}{L} \rightarrow 0} \tilde{\phi}(x, y) \\ &= \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{L^2}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2}}} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{L^2}}}{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.4-117)$$

Dieses Ergebnis drückt die erwartete Symmetrie bezüglich einer Bewegung entlang der x -Achse aus, es ist nämlich unabhängig von x . Entwickelt man die Wurzelausdrücke $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{L^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2}}$ in eine Taylor-Reihe

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s^2}{L^2}} = \frac{1}{2} + \frac{s^2}{L^2} + \dots \quad (2.4-118)$$

und setzt diese Reihenentwicklung in den Ausdruck für das Potential $\phi_{\infty}^*(x, y)$ ein, so erhält man:

$$\phi_{\infty}(x, y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{y^2}{L^2} + \dots}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{L^2} + \dots} \right) - \frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{y^2}{L^2} + \dots}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{L^2} + \dots} \right) \right] \quad (2.4-119)$$

Der erste Term verschwindet denn es gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln(1 + \epsilon)] \rightarrow 0 \quad (2.4-120)$$

Somit erhält man mit der Tatsache, daß die höheren Ordnungen der Taylor-Reihen für große L verschwinden:

$$\begin{aligned} \phi_{\infty}(x, y) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[-\frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\frac{y^2}{L^2}}{\frac{a^2}{L^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[-\frac{\tau_f}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{y^2}{a^2} \right) \right] \\ &= -\frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y}{a} \end{aligned} \quad (2.4-121)$$

Jetzt ist der Grenzwert $L \rightarrow \infty$ definiert:

$$\begin{aligned} \phi_{\infty}(x, y) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x, y) \\ &= -\frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y}{a} \end{aligned} \quad (2.4-122)$$

Diese zweidimensionale Betrachtung kann ohne weiteres auf das 3-dimensionale Problem übertragen werden. Eine Möglichkeit dies zu tun liegt in der Betrachtung von Symmetrien. Man dreht einfach die y -Achse um die x -Achse und erkennt, daß das Resultat in jeder Position das gleiche bleibt. Es handelt sich also um eine rotationssymmetrische Anordnung, die in jeder Lage das gleiche Feld und das gleiche Potential haben muß. Ersetzt

man nun die y -Richtung durch ein geeignetes R , welches dann die Radialkomponente der zuvor im 2-Dimensionalen verwendeten y -Achse und der neu hinzu gekommenen z -Achse ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}\phi_\infty(x, y, z) &= -\frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{a} \\ &= -\frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{a}\end{aligned}\quad (2.4-123)$$

Dies ist in Probe korrekt, ein Potential, das im Unendlichen nicht konvergiert. Das elektrische Feld ist dann

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \vec{e}_y \quad \left[\frac{\text{AsVm}}{\text{mAsm}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (2.4-124)$$

für den 2-dimensionalen Fall, oder

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{e}_R \quad (2.4-125)$$

für den 3-dimensionalen Fall.

Eine alternative Berechnung des Potentials führt über die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.4-126)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.4-127)$$

Nutzt man die zuvor erwähnten Symmetrien aus, so erkennt man, daß die Äquipotentialflächen Zylindermantelflächen sind. Für das elektrische Feld gilt deshalb:

$$\vec{E} = E(R) \vec{e}_R \quad (2.4-128)$$

Das Feld besitzt also nur eine radiale Komponente und ist nur vom Abstand zur Linie abhängig. Betrachtet man eine zylinderförmiges Volumen um die Linienladung, so erhält man für die zweite der beiden Maxwell-Gleichungen:

$$\int_V \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \, d^3r = \int_V \rho \, d^3r \quad (2.4-129)$$

Nutzt man den Satz von Gauss aus und betrachtet zunächst einen endlichen Zylinder der Länge L ,

$$\int_{\partial V} \epsilon_0 \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = \tau_f L \quad (2.4-130)$$

Setzt man die Symmetrieüberlegungen von vorher ein, so erhält man für den Zylindermantel:

$$\begin{aligned}\int_{\text{Zylindermantel}} \epsilon_0 E(R) \vec{e}_R \cdot \vec{e}_R \, d^2r &= \tau_f L \\ \Rightarrow \epsilon_0 E(R) \int_{\text{Zylindermantel}} d^2r &= \tau_f L \\ \Rightarrow \epsilon_0 E(R) 2\pi LR &= \tau_f L\end{aligned}\quad (2.4-131)$$

Damit erhält man das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{e}_R \quad (2.4-132)$$

Wie man sieht, ist das Ergebnis unabhängig von der Länge des betrachteten Zylinders und stellt deshalb das korrekte Feld eines unendlich langen geladenen Leiters dar.

Will man dazu das Potential ausrechnen, so erhält man nach einmaliger Integration:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi \\ \Rightarrow \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} &= -\frac{\partial}{\partial R}\phi \\ \Rightarrow \int \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} dR &= -\int \frac{\partial}{\partial R}\phi dR + C \\ \Rightarrow \phi &= \frac{\tau_f}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{R}\end{aligned}\quad (2.4-133)$$

Die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmethoden sind also gleich.

2.4.4 Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Fläche

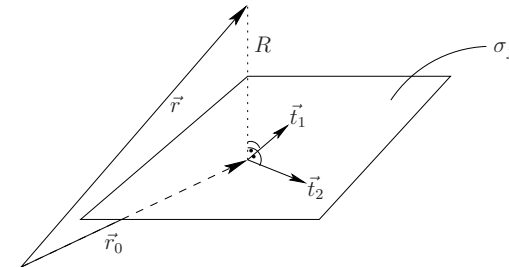


Abbildung 2.14: Flächenladungsdichte

Die Vektoren \vec{t}_1 und \vec{t}_2 parametrisieren die Fläche und es soll gelten:

$$\vec{t}_1 \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{t}_2 \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Damit kann die Raumladungsdichte aufgeschrieben werden. Wenn \vec{t}_1 und \vec{t}_2 Einheitsvektoren sind, dann gilt:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - \alpha\vec{t}_1 - \beta\vec{t}_2) \, d\alpha d\beta \quad (2.4-134)$$

Das elektrische Feld erhält man mit Hilfe des Coulomb-Integrals:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Raum}} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Raum}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - \alpha \vec{t}_1 - \beta \vec{t}_2) d\alpha d\beta \right] \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (2.4-135) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0 - \alpha \vec{t}_1 - \beta \vec{t}_2}{((\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} d\alpha d\beta\end{aligned}$$

Da die Terme

$$\frac{-\alpha \vec{t}_1}{((\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{-\beta \vec{t}_2}{((\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ungerade Funktionen sind, erhält man bezüglich der Integration:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f (\vec{r} - \vec{r}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha d\beta}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4-136)$$

Das Integral über die unendlich ausgedehnte Fläche muß nicht unbedingt direkt in den Koordinaten α und β berechnet werden. Man kann auch entsprechende Polarkoordinaten definieren, welche den Ursprung im Lotpunkt der Fläche haben. Die zugehörige Radialkomponente lautet dann $\xi^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Damit gilt für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f (\vec{r} - \vec{r}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha d\beta}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f (\vec{r} - \vec{r}_0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi d\varphi}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f (\vec{r} - \vec{r}_0) 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4-137) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_f (\vec{r} - \vec{r}_0) 2\pi \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma_f \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\end{aligned}$$

In Abbildung 2.15 ist das Ergebnis als Schnitt durch die Ebene und auf der Achse entlang der Flächennormalen \vec{n} gezeigt. Das elektrische Feld macht demnach an der geladenen Ebene einen Sprung.

Eine andere Möglichkeit, das Feld zu berechnen führt über die Poisson-Gleichung. Dazu wird zunächst die Raumladungsdichte der Anordnung in ihre kartesischen Koordinaten zerlegt. Zur Vereinfachung wird weiterhin die Ebene $z = 0$ zur Berechnung gewählt. Die Raumladungsdichte der Anordnung lautet dann:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_f \delta^{(3)}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z - \alpha\vec{e}_x - \beta\vec{e}_y) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_f \delta(x - \alpha) \delta(y - \beta) \delta(z) d\alpha d\beta \quad (2.4-138) \\ &= \sigma_f \delta(z)\end{aligned}$$

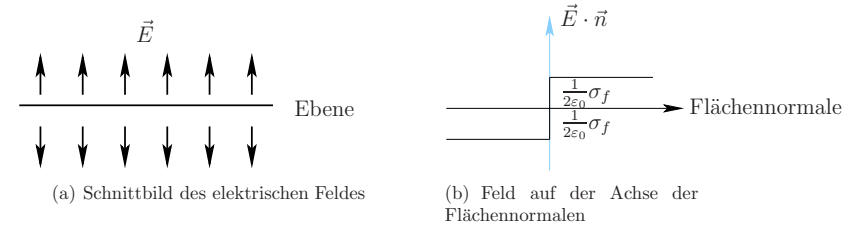


Abbildung 2.15: unendlich ausgedehnte Flächenladung

Setzt man dies in die Poisson-Gleichung ein, so erhält man:

$$-\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right) = \sigma_f \delta(z) \quad (2.4-139)$$

Da die Fläche unendlich ausgedehnt ist, hängt das Potential nicht von den Variablen x und y ab, es ist translationsinvariant:

$$\phi = \phi(z) \quad (2.4-140)$$

Entsprechend erhält man:

$$-\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi = \sigma_f \delta(z) \quad (2.4-141)$$

Aus Symmetriegründen gilt außerdem $\phi(z) = \phi(-z)$, denn von beiden Seiten aus gesehen wirkt die Flächenladung gleich. Integriert man nun beliebig von a bis z , so erhält man:

$$\int_a^z -\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \phi(z') dz' = \int_a^z \sigma_f \delta(z') dz' \quad (2.4-142)$$

Wählt man nun $a < 0$ (siehe auch Abbildung 2.16(a)), so erhält man:

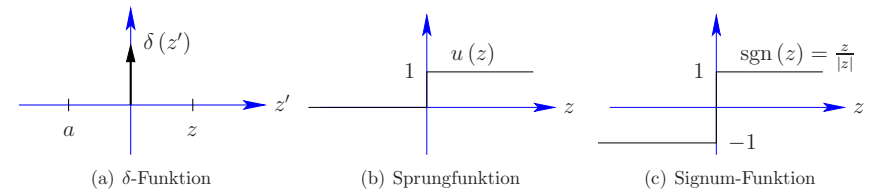


Abbildung 2.16: Darstellungen zur unendlich ausgedehnten Fläche

$$-\epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_z - \frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_a \right) = \sigma_f \begin{cases} 1 & \text{wenn } z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.4-143)$$

Mit Hilfe der Sprungfunktion $u(z)$ (siehe Abbildung 2.16(b)) kann das Ergebnis vereinfacht dargestellt werden:

$$-\varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_z - \frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_a \right) = \sigma_f u(z) \tag{2.4-144}$$

Mit dem Zusammenhang

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial}{\partial z} \phi(z) \vec{e}_z \tag{2.4-145}$$

ergibt sich für das elektrische Feld:

$$(E_z|_z - E_z|_a) = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} u(z) \tag{2.4-146}$$

Abbildung 2.15(b) entnimmt man, daß der Nullpunkt des Feldes auf der Fläche liegt. Damit erhält man bei entsprechender Wahl von $E_z|_a$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \vec{e}_z \begin{cases} \frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} & \text{für } z > 0 \\ -\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} & \text{für } z < 0 \end{cases} \\ &= \frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} \text{sgn}(z) \vec{e}_z \end{aligned} \tag{2.4-147}$$

Die Signum-Funktion $\text{sgn}(z)$ ist in Abbildung 2.16(c) dargestellt. Durch Integration kann daraus das Potential berechnet werden:

$$\phi = -\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} |z| \tag{2.4-148}$$

2.4.5 Zusammenfassung

Damit wurden im Skriptum folgende Themen angesprochen:

- Ladung gegeben, wie sieht das Feld aus?
- Feld ist gegeben, wie sieht die Kraft auf eine Punktladung aus?
 $\vec{F} = q \vec{E}$
- Was gibt es für Ladungen?
Punktladung, Linienladung, Flächenladung, Raumladung
- Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik eingeführt
- Poisson-Gleichung eingeführt
- Coulomb-Integrale eingeführt
- Potentiale und Felder einiger Ladungsverteilungen berechnet

Tabelle 1 faßt die Abhängigkeit typischer Ladungsverteilungen von Feldstärke und Potential zusammen.

Ladungsverteilung	Feldstärke	Potential	Coulomb-Integral für ϕ konvergiert
Punktladung	$\frac{1}{R^2}$	$\frac{1}{R}$	ja
Linienladung (unendlich)	$\frac{1}{R}$	$\ln \frac{1}{R}$	nein
Flächenladung (unendlich)	$\text{sgn}(R) \sim \text{const.}$	$ R $	nein

Tabelle 1: Ladungsverteilungen, elektrisches Feld, Potential

2.5 Der elektrische Dipol

Zur Darstellung realer Materialeigenschaften bietet der elektrische Dipol eine entsprechende Möglichkeiten. Mit den Materialeigenschaften ist gemeint, daß nichtleitende Medien zum Beispiel eine statische Ladung besitzen können. Diese statischen, also fest an einen Ort gebundenen Ladungserscheinungen können mit einem Dipol gut beschrieben werden.

2.5.1 Grundidee

Zum Beispiel der reale Fall der Ladungsverteilung eines Wasser-Moleküles (siehe Abbildung 2.17) und viele weitere Beispiele in der Natur führen zur Idee des elektrischen

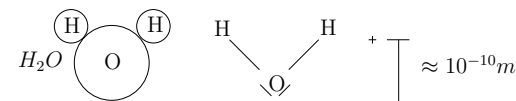


Abbildung 2.17: Darstellung eines Wasser-Moleküls

Dipols. Im Falle des gezeigten Wasser-Moleküles zieht das O-Atom die Elektronen der H-Atome sehr stark an und nach außen erscheint das H_2O -Molekül mit einer kleinen positiven Ladung auf der H-Atom-Seite und mit einer gleich großen negativen Ladung auf der O-Atom-Seite.

Um eine Anordnung dieser Art grundsätzlich besser zu verstehen, beschäftigen wir uns zuerst mit dem Grenzfall zweier Punktladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand d zueinander, wobei folgende Annahme gelten soll:

- Abstand $d \rightarrow 0$
- Ladung $Q \rightarrow \infty$
- Produkt 'Dipolmoment = Ladung · Abstand' bleibt endlich
- unendlich klein, aber dennoch vorhanden

$$dQ = p \tag{2.5-149}$$

Im Folgenden wird dann der Grenzfall mathematisch geeignet beschrieben.

2.5.2 Raumladungsdichte eines Dipols

Ausgangspunkt ist Abbildung 2.18, worin die Aufpunktvektoren 2.5-150 und 2.5-151 ab-

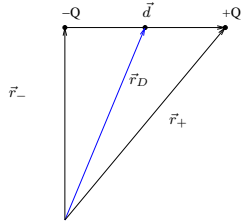


Abbildung 2.18: Zwei Punktladungen +Q und -Q mit endlichem Abstand

gelesen werden können:

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2} \quad (2.5-150)$$

$$\vec{r}_- = \vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2} \quad (2.5-151)$$

Damit ergibt sich die Raumladungsdichte der Konfiguration eines endlichen Dipols:

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \left(\vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2}\right)\right) - Q\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \left(\vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2}\right)\right) \quad (2.5-152)$$

Für die Definition eines Punktdipols betrachtet man die Grenzfälle

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &\rightarrow 0 \\ Q &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

und führt dazu das Dipolmoment \vec{p} ein

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

welches einen endlichen Wert haben soll, so erhält man für die Raumladungsdichte des Elementardipols:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ |\vec{d}| \rightarrow 0 \\ Q\vec{d} \rightarrow \text{endlich}}} Q \left(\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2}\right) - \delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2}\right) \right) \\ &= \lim_{Q \rightarrow \infty} Q\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D - \frac{1}{2}\frac{1}{Q}\vec{p}\right) - Q\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D + \frac{1}{2}\frac{1}{Q}\vec{p}\right) \end{aligned}$$

Benennt man nun die Ladung Q mit $Q = \frac{1}{\epsilon}$ um, so erhält man:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D - \frac{1}{2}\epsilon\vec{p}\right) - \delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_D + \frac{1}{2}\epsilon\vec{p}\right)}{\epsilon} \quad (2.5-153)$$

Aus der Mathematik ist bekannt, daß gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{F}\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\epsilon\vec{d}\right) - \vec{F}\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\epsilon\vec{d}\right)}{\epsilon} = \left(\vec{d} \cdot \nabla\right) \vec{F}(\vec{r}) \quad (2.5-154)$$

Hierbei handelt es sich um eine Richtungsableitung des Vektors \vec{F} . Faßt man also alles zusammen, so erhält man die Raumladungsdichte eines Dipols mit:

$$\rho_D(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (2.5-155)$$

Der Index D soll dabei darauf hinweisen, daß es sich um die Raumladungsdichte eines Dipols handelt. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 2.19 ein paar Darstellungen skizziert, welche die verwendeten Begriffe verdeutlichen sollen. Berechnet man zum Beispiel das Potential einer Punktladung, so erhält man als Ergebnis die Höhenlinien wie sie im Bild links oben gezeigt sind. Da der Gradient einer Funktion immer in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt, ergibt sich die Darstellung des Gradienten der δ -Funktion im Bild rechts oben. Betrachtet man zusätzlich noch die Richtungsableitung bezüglich des Dipolmomentes \vec{p} , so ergibt sich die Zeichnung im Bild links unten. Betrachtet man dies genauer, so stellt man fest, daß man auf der einen Seite der Achse negative Anteile und auf der anderen Seite der Achse positive Anteile erhält. Dies entspricht dann der Vorstellung, wie ein Dipol 'gebaut' ist. Eine vereinfachte Betrachtungsmöglichkeit ist im Bild rechts unten gezeigt.

2.5.3 Potential und Feldstärke eines Punktdipols

Aus der Raumladungsdichte ρ_D eines Dipols mit dem Dipolmoment \vec{p} am Ort \vec{r}_D

$$\rho_D(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)$$

wird mit Hilfe des Coulomb-Integrals

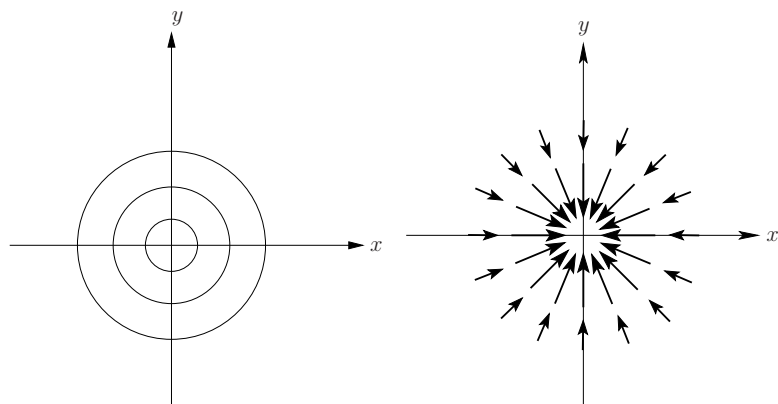
$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.5-156)$$

das Potential ϕ_D berechnet und anschließend das elektrische Feld \vec{E}

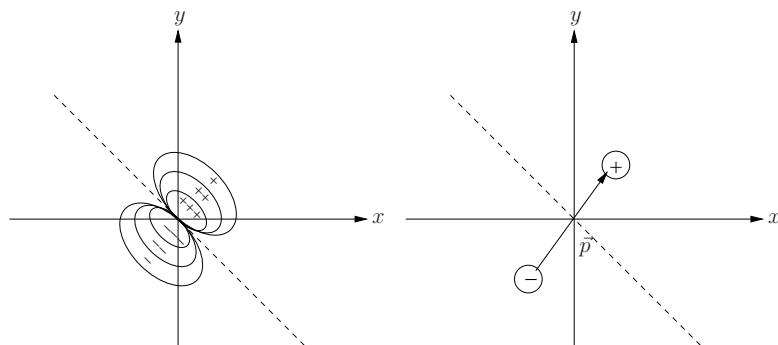
$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = -\nabla\phi_D(\vec{r}) \quad (2.5-157)$$

Zuerst wird nur das Potential berechnet. Dazu wird die Raumladungsdichte des Dipols in das Coulomb-Integral eingesetzt:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\vec{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.5-158)$$



(a) Potential der δ -Funktion (Skalar, Höhenlinien) (b) Ableitung: $\nabla\delta$ -Funktion (Vektor)



(c) Richtungsableitung: $-(\vec{p} \cdot \nabla) \delta$ (d) Dipolmoment

Abbildung 2.19: Darstellungen zur Vorstellung eines Punktdipols

Dabei muß beachtet werden, daß beim Einsetzen der Raumladungsdichte gestrichene Größen eingeführt werden. Dies gilt auch für den Gradienten, der damit auf die gestrichenen Größen angewendet werden muß ($\nabla' \rightarrow \vec{r}'$). Da die Auswertung dieses Integrals nicht so einfach erscheint, muß eine geeignete Strategie gefunden werden:

- Idee 1: Green'sches Theorem, oder Vektor-Analyse
- Idee 2: Ausnutzen der Ausblendeigenschaft

Zur Umformung des Integranden verwendet man den vektoranalytischen Zusammenhang

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{\Psi}) = \varphi \nabla \cdot \vec{\Psi} + \nabla \varphi \cdot \vec{\Psi} \tag{2.5-159}$$

in der folgenden Form

$$-\varphi \nabla \cdot \vec{\Psi} = -\nabla \cdot (\varphi \vec{\Psi}) + \nabla \varphi \cdot \vec{\Psi}$$

Für den Integranden ergibt sich so:

$$-\frac{\vec{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{-\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{\text{verschwindet als Oberflächenintegral}} + \underbrace{\vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D) \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{gibt einen Beitrag}} \tag{2.5-160}$$

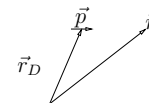


Abbildung 2.20: Veranschaulichung Dipol im Ort \vec{r}_D

Setzt man nun die Umformung 2.5-160 in Gleichung 2.5-158 ein, so erhält man:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D) \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \tag{2.5-161}$$

Dabei verschwindet der erste Term als Oberflächenintegral. Der Gradient der skalaren Funktion im Integranden kann einfach ausgerechnet werden. Durch anschließende Berechnung des Volumenintegrals ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_D}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^3} \end{aligned} \tag{2.5-162}$$

Aus dem Ergebnis erkennt man, daß das Potential des Punktdipols mit r^{-2} abfällt, im Gegensatz zu dem einer Punkt-Ladung, die mit r^{-1} abfällt. Das elektrische Feld erhält

man durch den Zusammenhang $\vec{E} = -\nabla\phi$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_D = -\nabla\phi_D &= -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_D}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^3} \nabla (\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_D)) + (\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_D)) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^3} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^3} - 3 (\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_D)) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^4} \frac{\vec{r} - \vec{r}_D}{|\vec{r} - \vec{r}_D|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_D)(\vec{r} - \vec{r}_D) - \vec{p}|\vec{r} - \vec{r}_D|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_D|^5}\end{aligned}\quad (2.5-163)$$

Das elektrische Feld des Dipols fällt also mit r^{-3} ab. In Abbildung 2.21 ist das Potential und das elektrische Feld des Punktdipols dargestellt, wie es zum Beispiel aus der Chemie für die p-Orbitale bekannt ist.

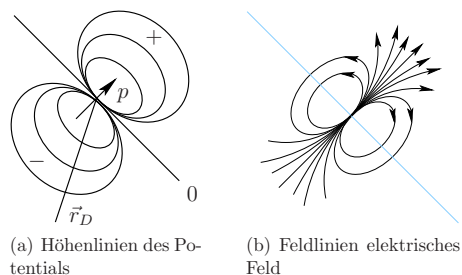


Abbildung 2.21: Potential und elektrisches Feld des Dipols

Eine mit Mathematica berechnete Darstellung ist in Abbildung 2.22 zu sehen. Dabei stellen die schattierten Bereiche das Potential und die Linien das Feld dar (Abbildung (a)). Die gleiche Abbildung mit Höhenlinien ist in Abbildung (b) zu sehen.

2.6 Kräfte auf Ladungen und Dipole

2.6.1 Kraft auf eine Ladung

Aus den grundlegenden Beobachtungen (Kapitel 2.1.1) ist die Definition der Kraft bekannt, die auf eine Punktladung q im elektrischen Feld wirkt.

Mit Hilfe der Beschreibung der Punktladungen als eine Raumladungsdichte ρ und der Verwendung der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion, erhält man eine Integralgleichung zur Berechnung der Kraft:

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}_q) = \int_V \underbrace{q \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_q)}_{\rho(\vec{r}')} \vec{E}(\vec{r}') d^3 r' \quad (2.6-164)$$

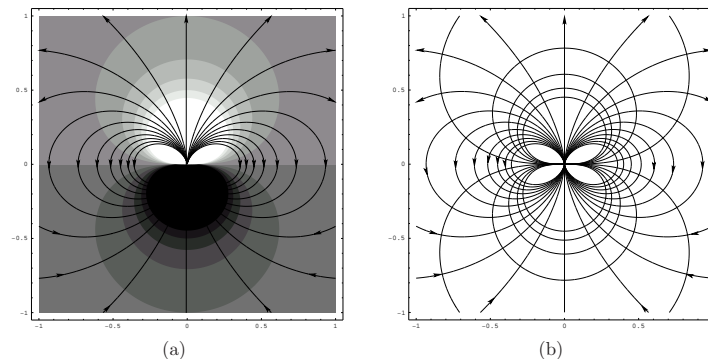


Abbildung 2.22: Potential und elektrisches Feld des Dipols

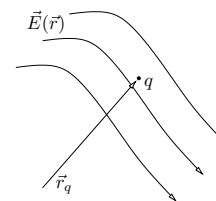


Abbildung 2.23: Ladung q im elektrischen Feld

Diese Gleichung gilt aufgrund von Superposition für beliebige Raumladungsdichten. Man erhält also für die Kraft eines vorgegebenen Feldes auf eine verteilte Raumladung:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d^3 r' \\ &= \int_V \vec{f}(\vec{r}') d^3 r'\end{aligned}\quad (2.6-165)$$

Die Variable $\vec{f}(\vec{r}')$ mit $\vec{f}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')$ wird als Kraftdichte bezeichnet und hat die Einheit N m^{-3} .

2.6.2 Kraft auf einen Dipol

Mit der Definition der Kraft aus dem Kapitel vorher und der Raumladungsdichte des Dipols ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V \rho_D(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d^3 r' \\ &= \int_V -\vec{p} \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D) \vec{E}(\vec{r}') d^3 r' \\ &= (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D}\end{aligned}\quad (2.6-166)$$

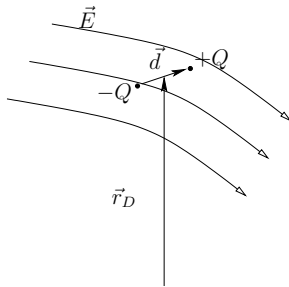


Abbildung 2.24: endlicher Dipol im elektrischen Feld

Zum besseren Verständnis sei auf die Herleitung der Kraft \vec{F} mit Hilfe der Darstellung des Dipols als 2 getrennte Ladungen $+Q$ und $-Q$ eingegangen (endlicher Dipol). Für die beiden getrennten Ladungen ergibt sich die Gesamtkraft $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (Nettokraft):

$$\vec{F}_{\text{netto}} = Q\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \quad (2.6-167)$$

Bildet man den Grenzwert bezüglich des Elementardipols, so erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{F}_D &= \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ |\vec{d}| \rightarrow 0 \\ Q\vec{d} \rightarrow \text{endlich}}} \left(Q\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \right) \\ &= \lim_{\frac{1}{Q} \rightarrow 0} \frac{\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\frac{\vec{E}}{Q}) - \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\frac{\vec{E}}{Q})}{\frac{1}{Q}} \\ \vec{F}_D &= (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D}\end{aligned}\quad (2.6-168)$$

Vergleichen Sie dazu die Gleichung 2.5-154, der letzte Schritt in Gleichung 2.6-168 ist die mathematische Definition einer Richtungsableitung.

Aus einer Betrachtung zweier endlicher Ladungen $+Q$ und $-Q$ konnte die Definition der Kraft in Gleichung 2.6-166 bewiesen werden. Die Kraft auf einen Dipol hängt demnach ab von der Inhomogenität des Feldes, für homogene Felder ist die Kraft Null.

2.6.3 Drehmoment auf einen Dipol im Feld (Herleitung über Kräftebilanz)

Zunächst sei allgemein auf die Definition des Drehmomentes eingegangen. Das Drehmoment kann verstanden werden als die Drehkraft der Drehung eines Körpers um eine Achse. Aus Abb. 2.25 erhält man für das Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum_{\text{Kräfte}} \text{Kraftarm} \times \text{Kraft} \\ &= \sum_{\text{Kräfte}} \vec{r}_k \times \vec{F}_k\end{aligned}$$

Dabei ist der Vektor \vec{r}_k so zu wählen, daß der Ursprung das Drehzentrum der Anordnung ist. Durch den folgenden Ansatz kann das Drehmoment bezüglich Abb. 2.25 hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\text{netto}} &= \sum_{\text{Kräfte}} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= \frac{1}{2}\vec{d} \times Q\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - \frac{1}{2}\vec{d} \times (-Q)\vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \\ &= Q\frac{1}{2}\vec{d} \times \vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) + Q\frac{1}{2}\vec{d} \times \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \\ &= \frac{1}{2}Q\vec{d} \times \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2}) + \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2}) \right]\end{aligned}\quad (2.6-169)$$

Betrachtet man die Einheiten, so erkennt man:

$$[\vec{M}] = [\vec{p} \times \vec{E}] = [Q \cdot \vec{d} \times \vec{E}] = \text{Asm} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \text{VAs}$$

Durch Bildung des Grenzwertes bezüglich der Gleichung 2.6-169 erhält man das Dreh-

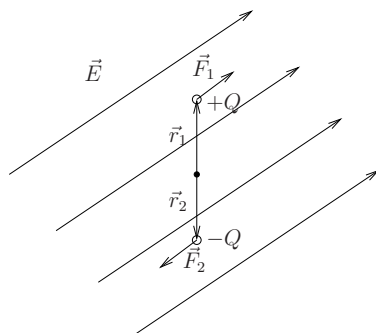


Abbildung 2.25: 2 Ladungen +Q und -Q im elektrischen Feld

moment des Dipols um seinen eigenen Mittelpunkt:

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ |\vec{d}| \rightarrow 0 \\ Q\vec{d} \rightarrow \text{endlich}}} \frac{1}{2} \vec{p} \times \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2}) + \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \vec{p} \times \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{\vec{d}}{2}) + \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{\vec{d}}{2}) \right] \\
 &= \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_D)
 \end{aligned} \tag{2.6-170}$$

Interpretiert man dieses Ergebnis, so bedeutet das: Elektrische Dipole tendieren dazu, sich im Feld auszurichten.

Befindet man sich mit dem Ursprung nicht im Ort des Dipols sondern am Ort \vec{r}_D , so kann durch folgenden Ansatz eine Darstellung gefunden werden (siehe auch Abbildung 2.26). Mit dem Ansatz für das Nettomoment vorher, wird zusätzlich die Verschiebung um \vec{r}_D

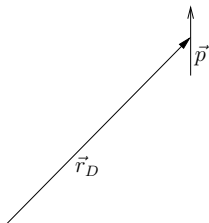


Abbildung 2.26: Drehmoment bezüglich des Ursprungs

aus dem Ursprung betrachtet:

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{\text{netto}} &= (\vec{r}_D + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_D + \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 \\
 &= (\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) \times Q\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - (\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \times Q\vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \\
 &= Q\vec{r}_D \times \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \right] + Q\frac{1}{2}\vec{d} \times \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) + \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.6-171}$$

Das Ergebnis der Grenzwertbildung des 2. Terms ist bereits bekannt, für den ersten Term erhält man:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ |\vec{d}| \rightarrow 0 \\ Q\vec{d} \rightarrow \text{endlich}}} \left(Q\vec{r}_D \times \left[\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \right] \right) \\
 &= \vec{r}_D \times \underbrace{\lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ |\vec{d}| \rightarrow 0}} Q \left(\vec{E}(\vec{r}_D + \frac{1}{2}\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r}_D - \frac{1}{2}\vec{d}) \right)}_{(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}} \\
 &= \vec{r}_D \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D}
 \end{aligned} \tag{2.6-172}$$

Damit ergibt sich für das Drehmoment eines Dipols am Ort \vec{r}_D :

$$\vec{M} = \vec{r}_D \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D} + \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_D) \tag{2.6-173}$$

2.6.4 Kraft und Drehmoment auf Dipol im Feld (Herleitung mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung)

Zur Herleitung der Kraft und des Drehmomentes, welche auf einen Dipol im Feld wirken, wird nun eine Energiebetrachtung herangezogen. Die entsprechende Situation ist in Abbildung 2.27 dargestellt. Speziell wird hier das Prinzip der virtuellen Verrückung

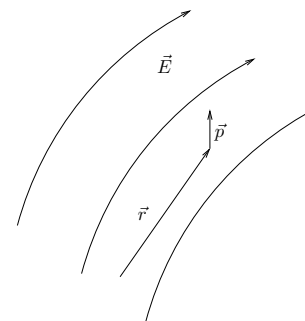


Abbildung 2.27: Dipol im Feld

verwendet:

- virtuelle Translation:

$$\left. \begin{matrix} \vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r} \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Kraft}$$

- virtuelle Drehung:

$$\left. \begin{matrix} \vec{r} \rightarrow \vec{r} \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} + \delta\vec{p} \\ \quad = \vec{p} + d\varphi \times \vec{p} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Drehmoment}$$

Die Annahme für die virtuelle Drehung ist sinnvoll, weil:

$$|\vec{p} + \delta\vec{p}| = |\vec{p} + d\varphi \times \vec{p}| = \sqrt{\underbrace{\vec{p} \cdot \vec{p}}_0 + \underbrace{2\vec{p} \cdot (d\varphi \times \vec{p})}_0 + \underbrace{(d\varphi \times \vec{p}) \cdot \vec{p}}_0 + \underbrace{(d\varphi \times \vec{p})^2}_{\text{quadratische Ordnung} \rightarrow 0}}$$

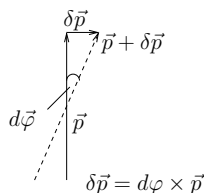


Abbildung 2.28: Darstellung zur virtuellen Drehung

Damit kann festgehalten werden:

$$|\vec{p} + \delta\vec{p}| \approx |\vec{p}| \rightarrow \text{Drehmoment}$$

Mit diesen Angaben kann die Energieänderung wie folgt berechnet werden:

$$\text{Energieänderung} = \text{Energieänderung durch Translation} + \text{Energieänderung durch Rotation} \quad (2.6-174)$$

Für die Energie des Dipols im Feld ergibt sich aus der Darstellung zweier Punktladungen $+q$ und $-q$ im Abstand d :

$$\begin{aligned} W(\text{Dipol im Feld}) &= \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ |d| \rightarrow 0 \\ p = q \cdot |d| = \text{endlich}}} q\phi(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}) - q\phi(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}) \\ &= \vec{p} \cdot \nabla\phi = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_D) \end{aligned} \quad (2.6-175)$$

Aus der Überlegung zur Energieänderung (Gleichung 2.6-174) erhält man für das betrachtete System:

$$-dW = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} + \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} \quad (2.6-176)$$

Für den konkreten Fall ergibt sich für die beiden Gleichungen 2.6-175 und 2.6-176:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_D) \quad (2.6-177)$$

$$\begin{aligned} dW &= -\left[(\vec{p} + \delta\vec{p}) \cdot (\vec{E} + \delta\vec{E}) - \vec{p} \cdot \vec{E} \right] \\ &= -\delta\vec{p} \cdot \vec{E} - \vec{p} \cdot \delta\vec{E} + \underbrace{\text{quadrat. Terme}}_{\text{fallen weg}} \end{aligned} \quad (2.6-178)$$

Daraus erhält man für die Änderung der Energie:

$$-dW = \delta\vec{p} \cdot \vec{E} + \vec{p} \cdot \delta\vec{E} \quad (2.6-179)$$

Setzt man nun die Gleichungen 2.6-176 und 2.6-179 gleich, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \delta\vec{r} + \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} &= \delta\vec{p} \cdot \vec{E} + \vec{p} \cdot \delta\vec{E} \\ &= (\delta\vec{\varphi} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} + \vec{p} \cdot (\delta\vec{r} \cdot \nabla\vec{E}) \\ &= (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \delta\vec{\varphi} + (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} \cdot \delta\vec{r} \end{aligned} \quad (2.6-180)$$

Somit ergibt sich für die Kraft und das Drehmoment(das den Dipol dreht)

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} \quad (2.6-181)$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.6-182)$$

Wichtig ist dabei die Tatsache, daß sich der betrachtete Dipol im Ursprung befindet, und nicht an einem beliebigem Ort \vec{r}_D .

Als Fazit kann festgehalten werden

- Felder richten Dipole aus: $\vec{p} \sim \vec{E}$

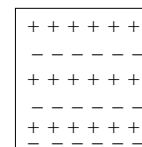
2.7 Ladungen und Dipole in Materie

2.7.1 Wirkung elektrischer Felder auf Materie

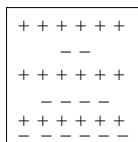
Wenn elektrische Felder auf Materie wirken, werden Ladungen verschoben also wird ein Ladungsdichte generiert. Weiterhin Dipole ausgerichtet, was ebenfalls zu einer Generation von Ladungsdichte führt.

Ein Leiter ist ein Stück Materie mit frei beweglichen Ladungen, meist den Elektronen. Bezüglich der Reaktion eines Leiters im Feld kann festgehalten werden:

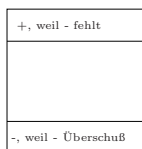
- $\vec{E} = 0$: im Mittel ist der Leiter neutral



- $\vec{E} \neq 0$ (aber klein): Elektronen bewegen sich auf eine Seite



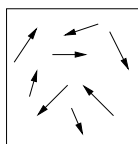
- $\vec{E} \neq 0$ (aber groß): Ladungstrennung



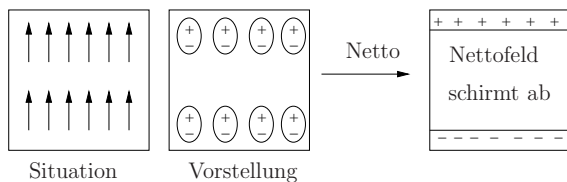
Der Leiter im elektrischen Feld reagiert mit Oberflächenladungen, das Innere bleibt feldfrei → Abschirmwirkung von Leitern (Faraday'scher Käfig)

Weiterhin gibt es Materialien mit drehbaren Dipolen, die Dielektrika. Dazu zählen zum Beispiel Glas, Wasser aber auch Zitronensäure und weitere Stoffe. Bezüglich der Reaktion eines Dielektrikums auf ein Feld kann festgehalten werden:

- $\vec{E} = 0$



- $\vec{E} \neq 0$, stark:



Das Dielektrikum im elektrischen Feld reagiert mit der Ausrichtung von Dipolen. Da der Ausrichtung aber Grenzen gesetzt sind, führt die Abschirmung nicht für jedes Feld zu einem feldfreien Inneren.

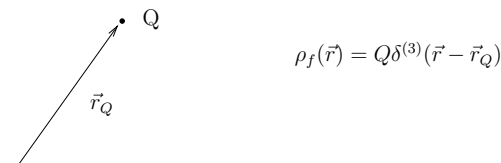


Abbildung 2.29: Punktladung im Ort \vec{r}_Q und zugehörige Raumladungsdichte

2.7.2 Anwendung des Dipols

Aus den Kapiteln vorher ist die Raumladungsdichte einer Punktladung bekannt (siehe Abbildung 2.29).

Analog kann eine Raumladungsdichte ρ_p für den Dipol notiert werden (siehe Abbildung 2.30). Hier wird der Index p verwendet, um auf die Tatsache hinzuweisen, daß das Ausrichten von Dipolen mit dem Begriff Polarisation beschrieben werden kann. Die Raumladungsdichte eines Dipols (oder die Raumladungsdichten mehrerer Dipole) wird mit Hilfe der Vektor-Analyse modifiziert:

$$\begin{aligned} \rho_p(\vec{r}) &= -\vec{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \\ &= -\nabla \cdot (\vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)) \end{aligned} \tag{2.7-183}$$

Analog gilt dies für beliebig viele Dipole:

$$\begin{aligned} \rho_p(\vec{r}) &= -\sum_k \vec{p}_k \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \\ &= -\nabla \cdot \left(\sum_k \vec{p}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \right) \end{aligned} \tag{2.7-184}$$

Definiert man eine neue Größe, genannt "Dipoldichte" $\vec{P}(\vec{r})$, so erhält man zum Beispiel folgende Dichten bezüglich Anordnungen von Elementardipolen:

- eines Punktdipols: $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)$
- einer Punktdipolverteilung: $\vec{P}(\vec{r}) = \sum_k \vec{p}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k)$

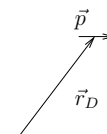


Abbildung 2.30: Dipol im Ort \vec{r}_D

Mit dieser Dipoldichte kann die Raumladungsdichte wie folgt geschrieben werden:

$$\rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{2.7-185}$$

Aus der Einheit des Dipols $[\vec{p}] = \text{Asm}$ ergibt sich die Einheit der Dipoldichte zu $[\vec{P}] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$.

Analog zu Punktladungen, Linienladungen etc. gibt es für Dipole demnach Dipoldichten der Form:

- Punktdipole

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (2.7-186)$$

- linienverteilte Dipole

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int_{\text{Linie}} \frac{d\vec{p}}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \quad (2.7-187)$$

- flächenhaft verteilte Dipole

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int_{\text{Fläche}} \frac{d\vec{p}}{df} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_F(\alpha, \beta)) df \quad (2.7-188)$$

- Raumdichte von Dipolen

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int_{\text{Raum}} \frac{d\vec{p}}{dV} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}(\alpha, \beta, \gamma)) d^3r \equiv \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (2.7-189)$$

Für alle Strukturen im Raum läßt sich der Begriff der Dipoldichte \vec{P} definieren:

$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \frac{\text{Summe aller Dipolstärken im Volumen } \Delta V}{\text{Volumen } \Delta V} \quad (2.7-190)$$

In Abbildung 2.31 soll beispielhaft an linienverteilten Dipolen die Dipoldichte bestimmt werden.

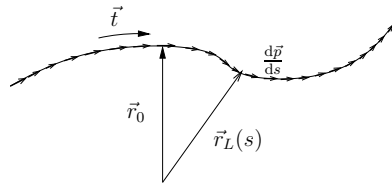


Abbildung 2.31: linienverteilte Dipole einer unendlich langen Linie

Aus der Abbildung 2.31 und dem Vorwissen bei der Herleitung der Raumladungsdichte beliebiger Ladungsverteilungen ergibt sich die Dipoldichte zu

$$\vec{P}(\vec{r}) = \int_{\text{Linie}} \frac{d\vec{p}}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \quad (2.7-191)$$

dabei stellt $\frac{d\vec{p}}{ds}$ (= Dipole pro Linienlänge = $\frac{\Delta Q}{\Delta s} \vec{t} = \hat{p} \vec{t}$) das Linien-Dipolmoment dar. Die Linie ist dabei wie folgt parametrisiert:

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}_0 + s\vec{t} \quad (2.7-192)$$

Betrachtet man den endlichen Fall der Linie in Abb. 2.32, so erhält man als Darstellung der Gesamtladungsdichte der Linie zwei Punktladungen am Anfang und am Ende der Linie (siehe Abbildung 2.32), da sich die Dipole dazwischen gegenseitig aufheben:

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta^{(3)}(\vec{r} - (\vec{r}_0 + L\vec{t})) - Q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.7-193)$$

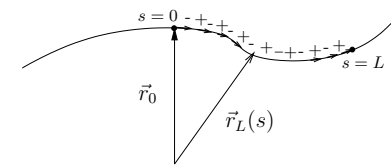


Abbildung 2.32: linienverteilte Dipole auf einer endlichen Linie

Beweis:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P} \\ &= -\nabla \cdot \int_0^L \hat{p} \vec{t} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t}) ds \\ &= -\hat{p} \int_0^L \nabla \cdot (\vec{t} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t})) ds \\ &= -\hat{p} \int_0^L \vec{t} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t}) ds \end{aligned} \quad (2.7-194)$$

Die Konstante \hat{p} soll im Moment noch frei wählbar sein. Da mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{ds} f(\vec{g}(s)) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(\vec{r}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \Big|_{\vec{r}=\vec{g}(s)} \quad (2.7-195)$$

gilt:

$$\frac{d}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t}) = \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t}) \cdot (-\vec{t}) \quad (2.7-196)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \hat{p} \int_0^L \frac{d}{ds} (\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t})) ds \\ &= [\hat{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - s\vec{t})]_0^L \\ &= \hat{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - L\vec{t}) - \hat{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned} \quad (2.7-197)$$

Mit dem erwarteten Ergebnis in Gleichung (2.7-193) kann man erkennen, daß die Konstante $\hat{p} = Q$ sein muß.

2.7.3 Darstellung von Dipolen in den Maxwell-Gleichungen

Als Fazit kann man nun festhalten, daß in nichtleitenden Medien keine freien Ladungen auftreten, jedoch können sich Dipole ausrichten, siehe Abbildung 2.33:

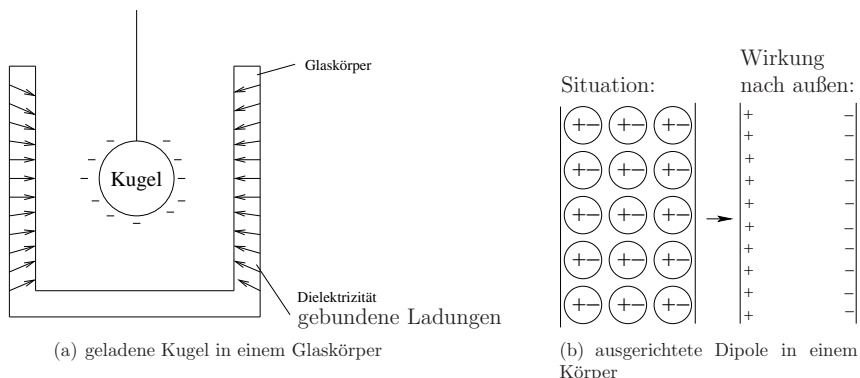


Abbildung 2.33: Darstellung von Dipolen in nicht-leitenden Materialien

Um nun alle möglichen elektrischen Grundelemente bei der Berechnung elektrischer Felder verwenden zu können, werden neben den freien Ladungen auch die Dipole in den Maxwell-Gleichungen geeignet dargestellt. Man erweitert die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ zu

$$\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}) \quad (2.7-198)$$

wobei $\rho_f(\vec{r})$ die Raumladungsdichte der freien Ladungen und $\rho_p(\vec{r})$ die Raumladungsdichte der Dipole (gebundene Ladungen) beschreibt. Daher ergibt sich für die Gleichungen der Elektrostatik:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ &= \rho_f + \rho_p \\ &= \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \end{aligned} \quad (2.7-199)$$

Schreibt man die Gleichung etwas um, so erhält man:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad (2.7-200)$$

Als Hilfsgröße wird hier \vec{D} mit

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.7-201)$$

definiert. \vec{D} wird als dielektrische Verschiebungsdichte bezeichnet und dient hauptsächlich dazu, Feldprobleme mathematisch kompakter darzustellen. Die Gleichungen der Elektrostatik können deshalb auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{aligned} \quad (2.7-202)$$

Dieser Satz von Gleichungen wird auch als die "Maxwell-Gleichungen in Materie" bezeichnet.

Bei der Interpretation der Verschiebungsdichte \vec{D} ist jedoch Vorsicht geboten, denn es werden in dieser Größe zwei Dinge aufaddiert, welche zwar die gleiche Einheit besitzen, aber physikalisch gesehen vollkommen verschiedene Phänomene sind. Mathematisch gesehen ist sie aber in vielen Berechnungen eine deutliche Vereinfachung.

2.7.4 Raumladungsdichte eines polarisierten Objektes

Am Beispiel eines Quaders soll noch einmal die Raumladungsdichte eines polarisierten Mediums betrachtet werden (siehe Abbildung 2.34). Die Dipoldichte eines solchen Körpers

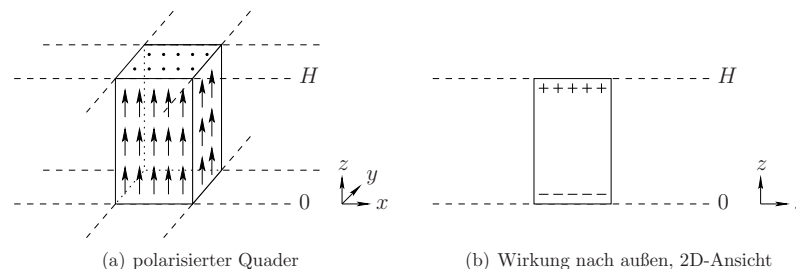


Abbildung 2.34: polarisierte Körper

lautet:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{P} & \text{für alle Gebiete im Quader} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7-203)$$

Vereinfacht man die Situation und betrachtet eine polarisierte Schicht im Raum, dazu stellt man sich den Quader in Abbildung 2.34 in x - und y -Richtung unendlich ausgedehnt vor, so lautet die zugehörige Dipoldichte:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} P_z \vec{e}_z & \text{für } 0 \leq z \leq H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7-204)$$

Aus Abbildung 2.34(b) entnimmt man, daß bei $z = H$ die Raumladungsdichte positiv ist und daß bei $z = 0$ die Raumladungsdichte negativ ist (Die Sprungfunktion $u(z)$ wurde bereits in Abbildung 2.16 dargestellt.):

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} P_z (u(z) - u(z - H)) \end{aligned} \quad (2.7-205)$$

Da die Ableitung der Sprungfunktion die δ -Funktion ist, erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= -P_z \frac{\partial}{\partial z} u(z) + P_z \frac{\partial}{\partial z} u(z - H) \\ &= \underbrace{-P_z \delta(z)}_{\text{neg. Flächenladung bei } z=0} + \underbrace{P_z \delta(z - H)}_{\text{pos. Flächenladung bei } z=H} \end{aligned} \quad (2.7-206)$$

2.7.5 Darstellung verschiedener Polarisationsladungsanordnungen

Eine alternative Überlegung zur Polarisation kann auch wie folgt dargestellt werden. Sie zielt darauf ab, wie die verschiedenen Polarisierungen als Raumladungsdichte dargestellt werden. Die Raumladungsdichte des polarisierten Mediums lautet allgemein für ein nicht-begrenztes Gebiet:

$$\begin{aligned}\rho_p(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \\ &= -\nabla \cdot \int_V \vec{P}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\ &= -\int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'\end{aligned}\quad (2.7-207)$$

Nutzt man die folgende Äquivalenz aus

$$\nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = -\nabla' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.7-208)$$

so erhält man für die Raumladungsdichte des polarisierten Mediums:

$$\rho_p(\vec{r}) = \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \quad (2.7-209)$$

Diese Darstellungsform beschreibt alle existierenden Polarisationsladungsdichten in einem unendlich ausgedehnten Raum. Mit dem Ziel, eine Darstellung zu finden, welche die Polarisation für begrenzte Räume und am Rand dieser Räume beschreibt, kann die vektoranalytische Gleichung

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A} \quad (2.7-210)$$

zu Hilfe genommen werden. Wendet man diese Gleichung auf den Integranden an, so erhält man:

$$\rho_p(\vec{r}) = \int_V \nabla' \cdot (\vec{P}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')) dV' - \int_V (\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \quad (2.7-211)$$

Um diese Darstellung nun als einen Randanteil und einen Volumenanteil interpretieren zu können, muß zuerst formal ein Raumgebiet betrachtet werden, welches einen Rand besitzt. Mit Hilfe des Satzes von Gauß kann nun der Oberflächenanteil formuliert werden:

$$\begin{aligned}\rho_p(\vec{r}) &= \int_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{f}' - \int_V (\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\ &= \int_{\partial V} (\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d f' + \int_V (-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\ &= \rho_{p\partial V} - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})|_{\vec{r} \in V}\end{aligned}\quad (2.7-212)$$

Hier erkennt man, daß bei der Formulierung der Raumladungsdichte, hervorgerufen durch die Polarisation, immer alle möglichen Arten der Polarisation betrachtet werden müssen, sowohl volumenhaft, als auch flächenhaft verteilte Polarisationsanordnungen.

Betrachtet man eine spezielle Anordnung, mit konstanter Polarisation \vec{P} , dann gilt $\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})|_{\vec{r} \in V} = 0$ und die Raumladungsdichte besteht nur noch aus der Polarisationsoberflächenladungsdichte:

$$\begin{aligned}\rho_p(\vec{r}) &= \rho_{p\partial V} = \int_{\text{Fläche}} \sigma_p \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d f' \\ \sigma_p &= \vec{P} \cdot \vec{n}\end{aligned}\quad (2.7-213)$$

2.7.6 Die Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen elektrischen Medien

Aus der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{E} = 0$ für elektrostatische Probleme folgt die Tangentialbedingung des elektrischen Feldes. Es wird das Linienintegral über ∂F und das

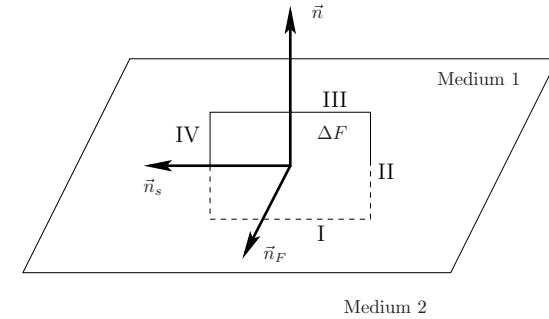


Abbildung 2.35: Zur Randbedingung für die magnetische Feldstärke

Flächenintegral über ΔF betrachtet (siehe Abbildung 2.35).

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\text{Fläche}} \nabla \times \vec{E} \cdot d^2 \vec{f} \\ &= \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_I \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{II} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{III} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{IV} \vec{E} \cdot d\vec{s}\end{aligned}\quad (2.7-214)$$

Die Integrale über die Wege II und IV verschwinden, da sie infinitesimal klein sein sollen ($\Delta h \rightarrow 0$, siehe Abbildung 2.36). Es bleiben also nur noch die beiden Wege I und III

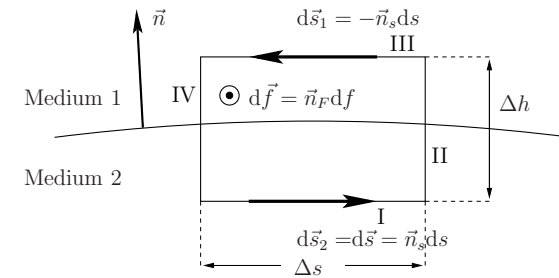


Abbildung 2.36: Grenzfläche zweier Medien

übrig, welche jeweils in Medium 2 und 1 verlaufen. Zur Vereinfachung wird das Feld in Medium 1 mit \vec{E}_1 bezeichnet und das Feld in Medium 2 mit \vec{E}_2 . Berücksichtigt man

weiterhin die Vorzeichen bezüglich der Integrationsrichtung, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{III} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\text{Pfad}} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (2.7-215)$$

Damit diese Gleichung für alle beliebigen Pfade gilt, muß die Tangentialkomponente lokal verschwinden:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0 \quad (2.7-216)$$

Mit dem Normalenvektor \vec{n} der Fläche formuliert bedeutet das:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2.7-217)$$

Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist also an der Grenzfläche zweier Medien stetig.

Zur Herleitung der Randbedingungen der Normalenkomponente des elektrischen Feldes wird ein zylinderförmiges Volumenelement ΔV mit Höhe Δh und Stirnflächen Δf betrachtet (siehe Abbildung 2.37), das die Grenzfläche zwischen den Medien durchsetzt. Als Feldgleichung wird in diesem Fall

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (2.7-218)$$

betrachtet.

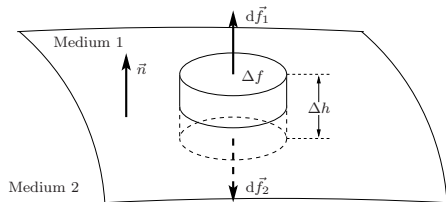


Abbildung 2.37: Ableitung der Randbedingungen für \vec{D}

Läßt man wieder Δh so gegen Null gehen, daß das Integrationsgebiet auf die Grenzfläche zusammengezogen wird, dann erhält man auf der linken Seite von Gleichung 2.7-218:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\partial \Delta V} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int_{\Delta f} (\vec{D} \cdot d\vec{f}_1 + \vec{D} \cdot d\vec{f}_2) = \int_{\Delta f} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} df$$

Auch hier werden die Feldgrößen \vec{D}_1 und \vec{D}_2 entsprechend der Medien 1 und 2 bezeichnet. Dabei wird $d\vec{f}_1 = -d\vec{f}_2 = \vec{n}df$ gesetzt. Die Mantelfläche liefert keinen Beitrag wegen $\Delta h \rightarrow 0$, es bleiben also nur die Deckelfläche und die Bodenfläche zu integrieren. Die rechte Seite von Gleichung 2.7-218 strebt für endliches ρ_f gegen Null:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \rho d^3r = 0$$

Einen endlichen Wert erhält man nur dann, wenn die Grenzfläche eine Oberflächenladungsdichte σ_f trägt:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \rho d^3r = \int_{\Delta f} \sigma_f df$$

Man erhält also das Ergebnis, daß die Normalenkomponente von \vec{D} stetig durch die Grenzfläche zweier Medien geht, wenn die Grenzfläche keine Oberflächenladungsdichte trägt

$$D_{1n} - D_{2n} = 0 \quad (2.7-219)$$

bzw. vektoriell formuliert:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \quad (2.7-220)$$

Ist an der Grenzfläche eine Oberflächenladungsdichte vorhanden, so springt die Normalenkomponente der Verschiebungsdichte um σ_f

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f \quad (2.7-221)$$

bzw. vektoriell:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad (2.7-222)$$

Damit die Indizes 1 und 2 zum Beispiel der Variablen \vec{E}_1 und \vec{E}_2 korrekt im Zusammenhang mit dem zugehörigen Normalenvektor gewählt werden, ist Abbildung 2.38 hilfreich. Dieser Zusammenhang kann jedoch auch Abbildung 2.37 entnommen werden.

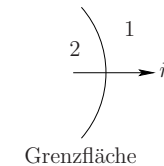


Abbildung 2.38: Zusammenhänge an der Grenzfläche zweier Medien

2.7.7 Polarisationsoberflächenladungsdichten an der Grenze zweier Medien

Zwischen \vec{E} , \vec{D} und \vec{P} besteht der Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.7-223)$$

Die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} besitzt Quellen nur in den freien Ladungen, die elektrische Feldstärke \vec{E} hat aber ihre Quellen nicht nur in den freien Ladungen, sondern auch dort, wo $\nabla \cdot \vec{P}$ von Null verschieden ist:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.7-224)$$

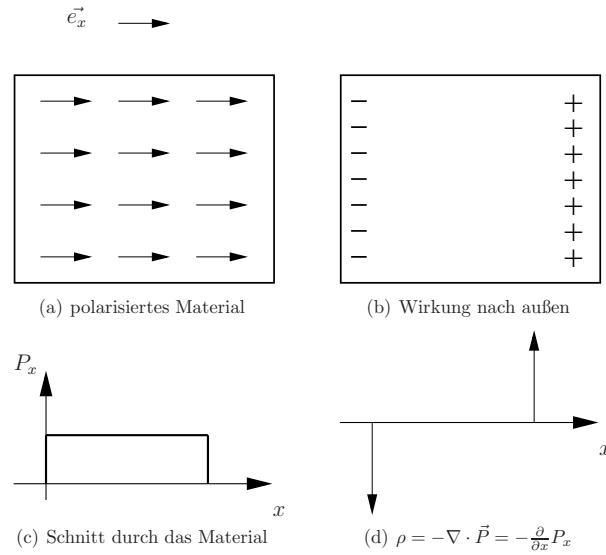


Abbildung 2.39: polarisierbares Medium

Betrachtet man dazu Abbildung 2.39, die beiden Pfeile in Abbildung 2.39(d) stellen die Polarisationsoberflächenladungsdichte, gewichtet mit der δ -Funktion, für das polarisierte Material in Abbildung 2.39(a) dar, so kann folgender Zusammenhang festgestellt werden:

An der Grenzfläche zweier Medien, welche nur polarisiert sind, aber keine freien Ladungen

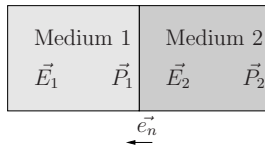


Abbildung 2.40: Grenzfläche zweier Medien

besitzen, gilt:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (2.7-225)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.7-226)$$

Die Darstellung von Gleichung 2.7-225 mit \vec{D} anstelle von \vec{E} und \vec{P} lautet, wenn $\rho_f = 0$ ist:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.7-227)$$

Für die Situation in Abbildung 2.40 ergibt sich Gleichung 2.7-227 z. B. für $\vec{e}_n = \vec{e}_x$ zu:

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x = 0 \quad (2.7-228)$$

An der Grenze wird nun ein kleines Volumen betrachtet (siehe Abbildung 2.37). Das Integral über das Volumen lautet:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{D} \, d^3r &= \int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{\text{Deckfläche 1}} \vec{D} \cdot d\vec{f} - \int_{\text{Deckfläche 2}} \vec{D} \cdot d\vec{f} + \int_{\text{Randfläche}} \vec{D} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (2.7-229)$$

Da das Volumen infinitesimal in die beiden Medien ragen soll, kann das Integral über die Randfläche vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{D} \, d^3r &= \int_{\text{Deckfläche 1}} \vec{D} \cdot d\vec{f} - \int_{\text{Deckfläche 2}} \vec{D} \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{\text{Projektionsfläche}} (\vec{D}_1 \cdot \vec{e}_n + \vec{D}_2 \cdot (-\vec{e}_n)) \, d^2f \\ &= \int_{\text{Projektionsfläche}} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{e}_n \, d^2f = 0 \end{aligned} \quad (2.7-230)$$

Da diese Gleichung für alle beliebigen Volumina gelten muß, muß allgemein lokal gelten:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{e}_n = 0$$

In Kapitel 2.7.6 wurde gezeigt, daß die Oberflächenladungsdichte σ_f an der Grenzfläche zweier Medien mit der Normalenkomponente der Verschiebungsdichte über

$$\sigma_f = D_{1n} - D_{2n} = \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \quad (2.7-231)$$

verknüpft ist. In Analogie dazu leitet man aus Gleichung 2.7-224 die Randbedingung

$$\sigma_p = -(P_{1n} - P_{2n}) = -\vec{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \quad (2.7-232)$$

für die Polarisationsoberflächenladungsdichte σ_p an der Grenzfläche zweier Medien ab (siehe auch Abbildung 2.41). Betrachtet man eine Anordnung für die gilt $\vec{P}_1 = 0$, dann erhält man die beschreibungsform mit $\rho_{p\partial V} = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}$, die in Gleichung 2.7-212 verwendet wurde.

Für die Normalenkomponente der elektrischen Feldstärke erhält man aus dem Zusammenhang $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ unter Beachtung der Gleichungen 2.7-231 und 2.7-232 die Randbedingung

$$\begin{aligned} E_{1n} - E_{2n} &= \frac{1}{\epsilon_0} [(D_{1n} - D_{2n}) - (P_{1n} - P_{2n})] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f + \sigma_p) \end{aligned} \quad (2.7-233)$$

oder anders dargestellt:

$$\vec{n} \cdot [(\epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1) - (\epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2)] = \sigma_f \quad (2.7-234)$$

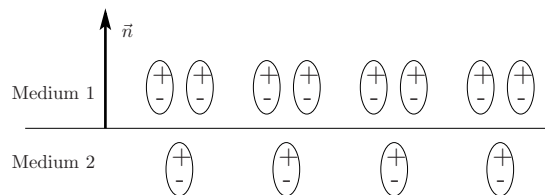


Abbildung 2.41: Zur Entstehung der Polarisationsoberflächenladungsdichte ($\rho_p < 0$)

2.7.8 Auswertung der Übergangsbedingungen, die Sprungbedingung des elektrischen Feldes

Am folgenden Beispiel soll die Sprungbedingung dargestellt werden: Es sei $P \neq 0$. Die

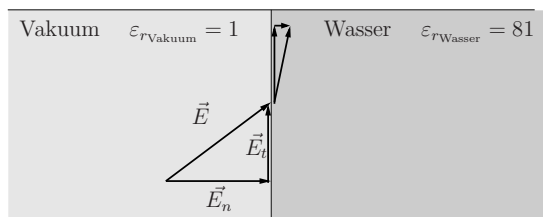


Abbildung 2.42: Sprungbedingung des elektrischen Feldes

Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist beim Übergang von einem Medium zum anderen stetig:

$$E_{t,Wasser} = E_{t,Vakuum} \tag{2.7-235}$$

Für die Normalenkomponente gilt:

$$\begin{aligned} E_{n,Wasser} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r, Wasser} D_{n,Wasser} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_{n,Vakuum}}{\epsilon_0 \epsilon_r, Wasser} \\ &= \frac{1}{81} E_{n,Vakuum} \end{aligned} \tag{2.7-236}$$

2.7.9 Lineare Materialgleichungen im Zusammenhang mit den elektrostatischen Maxwell-Gleichungen

In Abbildung 2.43 ist dargestellt, wie sich ein polarisierbares Medium beim Anlegen eines elektrischen Feldes verhält. In Abbildung 2.7.9 ist der mathematische Zusammenhang zwischen \vec{E} und \vec{P} eines möglichen realen Mediums dargestellt.

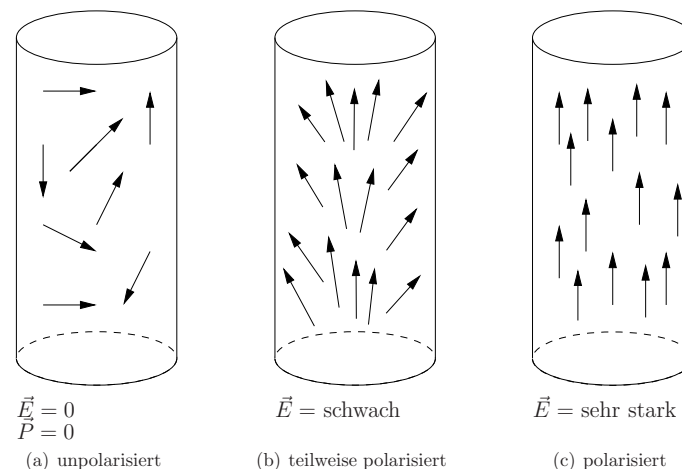


Abbildung 2.43: polarisiertes Medium

Der typische Arbeitsbereich polarisierbarer Medien ist häufig durch eine lineare Approximation darstellbar (gestrichelte Linie Abbildung 2.7.9, Bereich A), so daß gilt:

$$\vec{P} = \chi_{el} \vec{E} \quad \chi_{el} \geq 0 \tag{2.7-237}$$

wobei χ_{el} Elektrische Suszeptibilität genannt wird. In linearen Medien gilt dann:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \chi_{el} \vec{E} \\ &= (\epsilon_0 + \chi_{el}) \vec{E} \\ &= \underbrace{\epsilon_0 (1 + \frac{\chi_{el}}{\epsilon_0})}_{\epsilon_r} \vec{E} \\ &= \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{\epsilon} \vec{E} \end{aligned} \tag{2.7-238}$$

Die Zahl ϵ_r ist die relative Dielektrizitätskonstante mit $\epsilon_r \geq 1$. Zum Beispiel hat Wasser ein ϵ_r von 80, 1. Weitere oft verwendete Materialien haben sehr unterschiedliche Dielektrizitätskonstanten: Polytetrafluorethylen (auch Teflon) hat ein $\epsilon_r = 2$ oder Bariumtitanat mit $\epsilon_r = 10^3 \dots 10^4$. Diese Materialkonstanten ist allerdings von weiteren Größen abhängig, die gemachten Angaben beziehen sich auf ein Temperatur von 18°C und eine Frequenz von 50 Hz. Für lineare Medien ist somit

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \tag{2.7-239}$$

die Feldgleichung im Material.

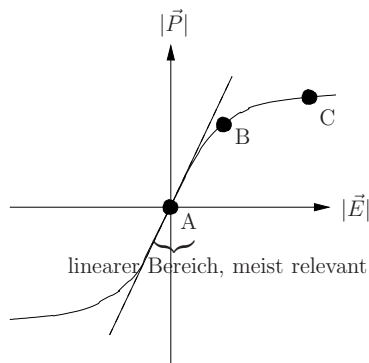


Abbildung 2.44: Zusammenhang Elektrisches Feld und Polarisierung für ein Medium

2.8 Energiebetrachtung

2.8.1 Potentielle Energie von Körpern im Feld

Auf die Herleitung wird hier nicht weiter eingegangen. Die Definition des Energiebegriffs lautet:

Energie ist definiert als geleistete Arbeit, dem Wegintegral der Kraft:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{2.8-240}$$

Für das elektrostatische Feld kann ein Potential und eine Kraft auf eine Punktladung definiert werden:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{2.8-241}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.8-242}$$

Die geleistete Arbeit lautet dann:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q(-\nabla\phi) \cdot d\vec{r}_q = q(\phi_1 - \phi_2) \tag{2.8-243}$$

Dies führt auf den Begriff der potentiellen Energie, wenn ein Teilchen mit der Ladung q durch ein Potentialfeld ϕ bewegt wird.

Vorzeichenkonvention: Die Arbeit, die ein Teilchen aufnimmt, wird als positive Energie bezeichnet.

Beispiel:

Wenn jemand ein geladenes Teilchen entgegen dem elektrischen Feld bewegt, wird Arbeit geleistet und das Teilchen nimmt Energie auf

Die Energieänderung ist damit:

$$\Delta W = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q(\phi_2 - \phi_1) = Q\Delta\phi \tag{2.8-244}$$

Als Ergebnis kann festgehalten werden:

Die Potentielle Energie ist ausdrückbar durch eine Potentialdifferenz

Verallgemeinerung:

Die Energie einer Punktladung in einem äußeren Potentialfeld $\phi(\vec{r})$ kann mit Hilfe der Ausblendeigenschaft der δ -Funktion etwas umformuliert werden

$$W = Q\phi(\vec{r}_Q) \equiv \int_V \underbrace{Q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q)}_{\rho(\vec{r})} \phi(\vec{r}) d^3r \tag{2.8-245}$$

Damit kann auf die potentielle Energie einer Ladungsverteilung im Feld geschlossen werden, denn die Linearität des Systems erlaubt Superposition:

$$W = \int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) d^3r \tag{2.8-246}$$

Diese Gleichung gilt aber nur für ein von außen vorgegebenes Feld!

2.8.2 Potentielle Energie einer Raumladungsverteilung

Was passiert nun, wenn man die potentielle Energie einer Raumladungsverteilung sucht und das Potential $\phi(\vec{r})$ von der Raumladung $\rho(\vec{r})$ selbst erzeugt wurde. Zur Beantwortung der Frage wird angenommen, daß $\rho(\vec{r})$ aus Punktladungen zusammengebaut werden kann. Die Punktladungen werden aus dem Unendlichen geholt, und die dafür nötige Energie wird aufsummiert.

Eine Ladung nach der anderen wird nun aus dem Unendlichen geholt:

- 0: keine Ladung $\phi = 0, W = 0$
- 1: Eine Ladung Q_1 , aus dem Unendlichen, wird auf Punkt \vec{r}_1 gebracht

$$W_1 = 0$$

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

- 2: Eine weitere Ladung Q_2 , aus dem Unendlichen, wird auf Punkt \vec{r}_2 gebracht, durch Q_1 existiert jetzt ein Feld und deshalb kostet das Energie

$$W_2 = Q_2 \phi_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

- 3: $Q_3 \rightarrow \vec{r}_3$

$$W_3 = Q_3 \phi_2(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|}$$

- ...

Für N Teilschritte ist die Gesamtenergie gegeben mit:

$$W = \sum_{k=1}^N W_k \quad (2.8-247)$$

Dabei beschreibt W_k die Energie die aufgewendet werden muß, um Q_k an den Ort r_k zu bringen:

$$W_k = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k Q_l}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (2.8-248)$$

$$\phi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^k \frac{Q_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} \quad (2.8-249)$$

Dementsprechend erhält man die Energie eines Systems aus N Punktladungen, die aus dem Unendlichen geholt werden mit:

$$W_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k Q_l}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (2.8-250)$$

Eine Auswertung dieses Ausdrucks ist relativ kompliziert aufgrund der Summe bis $k-1$. Man kann aber diesen Ausdruck dadurch ersetzen, daß man die Summe bis N laufen läßt und anschließend durch 2 teilt. Mit der Erweiterung der Summe bis N erfaßt man jeden Term doppelt, aus diesem Grund wird durch zwei geteilt. Bei dieser Summendarstellung muß man allerdings die Fälle $k=l$ ausschließen, da es die Ladung keine Energie mit sich selbst kostet, diese an einen beliebigen Punkt zu bringen:

$$W_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k Q_l}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k Q_l}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|} \quad (2.8-251)$$

Erinnerung: Eine Punktladung ist eine besondere Ladungsdichte ρ . Die Ladungsdichte der oben verwendeten Punktladungsverteilung lautet:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N Q_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (2.8-252)$$

Das Potential einer Verteilung von Punktladungen ist:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (2.8-253)$$

Betrachtet man nun den Ausdruck $\int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$, welcher die Potentielle Energie beschreibt, so erhält man:

$$\int_V \sum_{k=1}^N Q_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} d^3 r = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \sum_{l=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_l Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} \quad (2.8-254)$$

Vergleicht man dies mit 2.8-251, so erkennt man, daß für die Gesamtenergie W_{ges} gilt:

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\sum_{k=1}^N Q_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k)}_{\rho(\vec{r})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} d^3 r$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_l Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} \quad (2.8-255)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3 r$$

Für eine elektrostatische Ladungsverteilung ist damit die Gesamtenergie durch

$$W = \int_V \frac{1}{2} \rho \phi d^3 r \quad (2.8-256)$$

gegeben. Vergleichen Sie dazu das Ergebnis aus Kapitel 3.14, die Ergebnisse unterscheiden sich um den Faktor $\frac{1}{2}$. Wir wissen aus der Elektrostatik, daß die Maxwell-Gleichung

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (2.8-257)$$

mit einem Potential

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.8-258)$$

beschrieben werden kann. Somit erhält man die Poisson-Gleichung:

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi \quad (2.8-259)$$

Setzt man dies in die Gleichung für die Gesamtenergie ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_V \frac{1}{2} (-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi) \phi \, d^3r \\
 &= \underbrace{- \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\nabla \phi) \phi \right) \, d^3r}_{\text{Oberflächenintegral}} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V (\nabla \phi)^2 \, d^3r \equiv \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \, d^3r \quad (2.8-260)
 \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral über die Fernkugel verschwindet. Damit ergibt sich die Energie des Elektrischen Feldes zu:

$$W = \int_{\text{Raum}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \, d^3r \quad (2.8-261)$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist also mit

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (2.8-262)$$

gegeben.

2.8.3 Bewegung eines Teilchens im Feld

Aus der Newton'schen Bewegungsgleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ erhält man:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} = -q\nabla\phi \quad (2.8-263)$$

Durch Multiplikation mit $\frac{d\vec{r}}{dt}$ erhält man:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + q\nabla\phi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad (2.8-264)$$

Dies kann umformuliert werden und es gilt:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} [q\phi(\vec{r}(t))] = 0 \quad (2.8-265)$$

Damit diese Gleichung für alle beliebigen Situationen gilt, muß die totale Energie eines Teilchens im elektrischen Feld konstant sein:

$$W = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + q\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} m v^2 + q\phi(\vec{r}) = 0 \quad (2.8-266)$$

Das hat zur Folge, wenn ein System eine bestimmte Energie beinhaltet, muß bei kleiner kinetische Energie die potentielle Energie groß sein, genauso wie für den gleichen Energieinhalt gilt, bei einer großen kinetische Energie die potentielle Energie klein sein muß. Man sagt, die elektrostatische Kraft ist konservativ und es gilt der Energieerhaltungssatz.

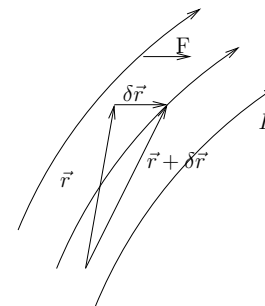


Abbildung 2.45: Positionsänderung einer Punktladung im Feld

2.8.4 Zusammenhang der potentielle Energie und der Kraft einer Punktladung im Feld

Zunächst wird die potentielle Energie der Punktladung im Feld betrachtet:

$$W = Q \phi(\vec{r}) + \text{beliebige Nullpunktenergie} \quad (2.8-267)$$

Anschließend wird die Änderung der potentiellen Energie aufgrund einer Positionsänderung $\delta\vec{r}$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
 q\delta\phi &= q[\phi(\vec{r}_Q + \delta r) - \phi(\vec{r}_Q)] = \delta\omega = q\nabla\phi \cdot \delta\vec{r} \\
 &= -\vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad (2.8-268)
 \end{aligned}$$

Wobei \vec{F} als die Kraft auf eine Ladung q bekannt ist:

$$\vec{F} = -q\nabla\phi = q\vec{E} \quad (2.8-269)$$

Damit kann das Kraftgesetz auch aus der potentiellen Energie hergeleitet werden. Diese Herleitung beruht auf dem

- Energieprinzip

und dem

- Prinzip der virtuellen Verrückung (siehe Abbildung 2.45).

2.8.5 Berechnung der potentiellen Energie eines Dipols im Feld

Die entsprechende Situation ist in Abbildung 2.46 dargestellt. Gesucht ist die potentielle Energie, dazu wird zuerst die Raumladungsdichte eines Dipols notiert:

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{p}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \\
 &= -\vec{p} \cdot \nabla\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (2.8-270)
 \end{aligned}$$

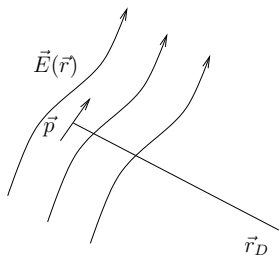


Abbildung 2.46: Dipol im Feld

Durch Einsetzen in Gleichung 2.8-246 kann die potentielle Energie berechnet werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_V -\vec{p} \cdot [\nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)] \phi(\vec{r}') d^3r' & (2.8-271) \\ &= - \int_V [\vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)] \cdot \nabla' \phi(\vec{r}') d^3r' \\ &= -\vec{p} \cdot \nabla \phi(\vec{r}_D) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_D) \end{aligned}$$

Bei der Auswertung des Integrals werden unter anderem die bereits in Kapitel A.9.6 gewonnenen Erkenntnisse genutzt.

Dabei sollte beachtet werden:

- Potentialänderung bei Translation führt auf die Kraft auf den Dipol
- Potentialänderung bei Rotation führt auf das Drehmoment auf den Dipol

Kraft:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \delta(-\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_d)) \\ &= -(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \delta\vec{r}_d \\ &= -\vec{F} \cdot \delta\vec{r}_d \end{aligned}$$

Dies führt also wieder auf die Kraft auf einen Dipol im Feld:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \tag{2.8-272}$$

Drehung des Dipols: Die Drehung bewirkt

$$\delta\vec{p}' = \delta\vec{\varphi} \times \vec{p}$$

siehe Kapitel 2.6.4, wobei $\delta\vec{\varphi}$ den Drehwinkel darstellt. Damit erhält man für das Drehmoment

$$\delta\omega = -\delta\vec{p}' \cdot \vec{E} = -(\delta\vec{\varphi} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} = -(\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \delta\vec{\varphi} = \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi}$$

Dies führt also wieder auf das Drehmoment eines Dipols um seinen Mittelpunkt im Feld:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{2.8-273}$$

2.8.6 Potentielle Energie eines Dipols im Feld eines zweiten Dipols

Die potentielle Energie eines Dipols \vec{p}_2 im elektrischen Feld \vec{E}_1 am Ort \vec{r}_2 ist gegeben mit:

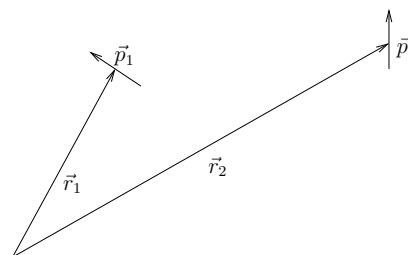


Abbildung 2.47: 2 Dipole im Raum

$$W = \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

Nun setzt man für das elektrische Feld \vec{E}_1 das Feld eines Dipols \vec{p}_1 ein:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{p}_1(\vec{r} - \vec{r}_1) - \vec{p}_1(\vec{r} - \vec{r}_1)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^5}$$

Damit erhält man die potentielle Energie eines Dipols im Dipolfeld

$$\Rightarrow W = \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{p}_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{p}_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^5}$$

Die Anordnung ist symmetrisch, deshalb kann auch die Berechnung mit \vec{E}_2 und \vec{p}_1 erfolgen. Desweiteren sollte erkannt werden, daß sich die Dipole gegenseitig ausrichten.

2.9 Lernziele Kapitel 2

1. Wissen, welche praktischen Versuche die Grundphänomene der Elektrostatik zeigen
2. Wissen, wie die elektrische Kraft definiert ist und was sie bewirkt

3. Wissen, wie das elektrische Feld definiert ist und wie dieses mit der elektrischen Kraft zusammenhängt
4. Wissen, was ein elektrostatisches Potential ist
5. Wissen, wie Ladungsdichten definiert sind
6. Wissen, was es für Ladungen und Ladungsverteilungen elektrischer Natur gibt
7. Wissen, wie die verschiedenen Ladungsverteilungen als Ladungsdichten beschrieben werden
8. Wissen, wie die Coulomb-Integrale definiert sind
9. Wissen, was diese Integrale lösen
10. Wissen, welche Eigenschaften die Coulomb-Integrale besitzen
11. Wissen, wann man die Coulomb-Integrale anwenden kann und wann nicht
12. Wissen, wie man Potentiale und Felder von Ladungsverteilungen mit Hilfe der Coulomb-Integrale berechnet
13. Wissen, wie die Maxwell-Gleichungen für die Elektrostatik lauten
14. Wissen, wie die Poisson- und Laplace-Gleichung lauten und wie man sie herleitet
15. Wissen, was die Idee hinter der Berechnung der Green'schen Funktion des freien Raumes steckt
16. Wissen, was sich hinter der Sprungbedingung des elektrischen Feldes verbirgt
17. Wozu kann man die Sprungbedingung benutzen?
18. Wie berechnet man Oberflächenladungsdichten?
19. Einfache elektrische Felder skizzieren können
20. Wissen, was ein elektrischer Dipol ist
21. Was versucht man durch elektrische Dipole darzustellen?
22. Wie ist der elektrische Dipol definiert?
23. Wissen, was ein elektrischer Monopol ist
24. Wie werden die Raumladungsdichte, das Potential und die Feldstärke eines Dipols berechnet?
25. Wie werden Kraft und Drehmoment auf einen Dipol verursacht?
26. Wie reagiert ein Dipol, wenn auf ihn Kräfte und/oder Drehmomente wirken?
27. Wie werden elektrische Dipole in den Maxwell Gleichungen dargestellt?
28. Das elektrische Feld eines Dipols skizzieren können

29. Wissen, wie die dielektrische Verschiebungsdichte definiert ist
30. Wissen, was ein lineares Medium ist
31. Wissen, was eine Polarisationsoberflächenladungsdichte ist!
32. Wissen, wie allgemein die Übergangsbedingungen an der Grenze verschiedener elektrischer Medien lauten
33. Wie ist die Energie eines Teilchens definiert, welches sich in einem äußeren Feld befindet?
34. Wie ist die Energie einer Raumladungsverteilung definiert, welche sich in einem äußeren Feld befindet?
35. Wie ist die Energie eines Teilchens oder einer Raumladungsverteilung im selbst erzeugten Feld definiert?
36. Wie bewegt sich ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld?
37. Wie ist die Energie des elektrischen Feldes definiert?
38. Wissen, wie man Potentiale und Felder von Ladungsverteilungen ohne den Coulomb-Integralen berechnet

3 Magnetostatik

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen zeitlich konstanten Strömen und den dadurch erzeugten magnetischen Feldern untersucht. Da vieles in Analogie zur Elektrostatik behandelt wird, ist dieses Kapitel nicht so ausführlich, es wird aber an geeigneter Stelle auf die Analogie hingewiesen.

3.1 Einführende Überlegungen, Definition des Ampere

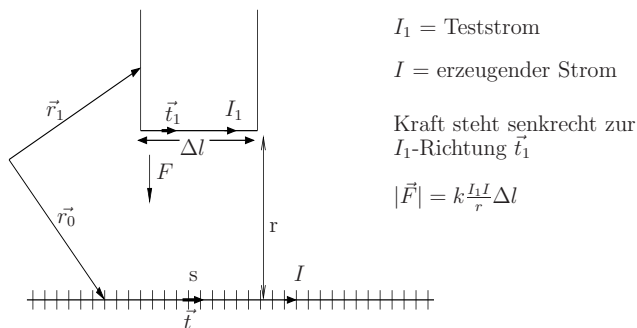


Abbildung 3.1: Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

Wie in der Geschichte der Elektrostatik, sind über viele Jahre der Beobachtung der damit zusammenhängenden Phänomene einige Definitionen entstanden. Bei einer Anordnung in Abbildung 3.1 wurde eine Kraft gefunden, die auf zwei stromdurchflossene Leiter wirkt:

$$\frac{F}{\Delta l} = k \frac{I I_1}{r} \quad (3.1-1)$$

Hierbei sei zum Vergleich auf die Definition der Kraft zwischen zwei Ladungen (2.1-1) verwiesen. In Analogie wird einer der Ströme als felderzeugender Strom I und einer Probestrom I_1 betrachtet. Bei den Beobachtungen wurde festgestellt, dass sich in gleiche Richtung fließende Ströme anziehen, entgegen gesetzte fließende Ströme abstoßen. Auf die Struktur dieser Gleichung wird im nächsten Kapitel noch eingegangen.

Über dieses Kraftgesetz wurde 1948, international einheitlich, die bis heute gültige Definition der Basiseinheit Ampere abgeleitet:

Die Basiseinheit 1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordneten, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinen, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Durch diese Definition wird die in der Gleichung 3.1-1 enthaltene Konstante k festgelegt:

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ N} = k \frac{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A}}{1 \text{ m}} 1 \text{ m}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}} = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Da zu der Zeit der Einführung nur Kreisströme bekannt waren, wurde diese Konstante zu $\frac{\mu_0}{2\pi}$ gewählt und somit die Permeabilität des Vakuums $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ festgelegt. Über die Lichtgeschwindigkeit $c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ ist somit auch die Permittivität des Vakuums ϵ_0 festgelegt.

3.2 Das Magnetfeld eines geraden Stromfadens und einer beliebigen Stromschleife (Gesetz von Biot-Savart)

Aus Abbildung 3.1 kann nun der Zusammenhang zwischen Kraft, Feld und Strom genauer abgeleitet werden: die Kraft \vec{F} ist senkrecht zum Strom gerichtet, deshalb wird der Zusammenhang mit einem Kreuzprodukt formuliert.

$$\text{Kraft} = (\text{Stromstärke} \times \text{Feld}) \cdot \text{Länge} \quad (3.2-2)$$

Die Kraft ist also sowohl proportional zum Stromstärke I als auch zur Leiterlänge Δl .

Betrachtet man den Strom entlang der Linie $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + s\vec{t}_1$, so ergibt sich für den gerichtete Strom

$$I_1 \vec{t}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{ds} I_1 \quad (3.2-3)$$

Somit lässt sich für die Kraft auf einen Leiter entlang der Linie \vec{t}_1 schreiben:

$$\vec{F} = I_1 \left(\vec{t}_1 \times \vec{B} \right) \Delta l \quad (3.2-4)$$

Nimmt man nun eine beliebige Schleife $\vec{r}_L(s)$ an, so ergibt sich die folgende Kraftgleichung:

$$\vec{F} = \int_{\text{Schleife}} I \frac{d\vec{r}_L(s)}{ds} \times \vec{B}(\vec{r}_L(s)) ds \quad (3.2-5)$$

In der Geschichte der Elektrotechnik benötigte die Erarbeitung dieses Zusammenhangs viele Jahrzehnte. Dabei wurde dieses Gesetz aus empirischen Beobachtungen gefolgert. Das \vec{B} -Feld wird demnach hervorgerufen von dem Strom I entlang der Linie \vec{r}_L . Die Richtung des Stromes I ergibt sich dabei aus der Tangente $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}_L}{ds}$ an die Linie. Der Strom I_1 ist demnach ein kleiner Teststrom im Feld des Stromes I (siehe auch Kapitel 3.1).

Der Begriff des magnetischen Feldes beruht auf der Idee, dass das \vec{B} -Feld an der Stelle \vec{r} durch lineare Superposition von einzelnen Anteilen des Stromes I hervorgerufen wird. Über diese wird dann integriert und man erhält das magnetische Feld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots ds \quad (3.2-6)$$

Der infinitesimale Feldanteil am Punkt \vec{r} des Stromanteils I am Punkt \vec{r}_L wird mit $d\vec{B}$ bezeichnet. Die stromführende Linie soll dabei die folgende Parameterdarstellung haben (siehe Abbildung 3.2):

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}_0 + s\vec{t} \quad (3.2-7)$$

Das zu erwartende Endergebnis soll analog zu Kapitel 3.1 und aufgrund der Definition des Ampere zu Beginn dieses Kapitels die zwei folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$|\vec{B}| \sim \frac{1}{r} \quad \vec{B} \perp \vec{t} \quad (3.2-8)$$

Zur Bestimmung des magnetischen Feldes \vec{B} wird die Gleichung 3.2-4 verwendet. Dabei werden die oben genannten Eigenschaften berücksichtigt:

$$d\vec{B} = \# \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}_L|^2} \vec{t} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_L}{|\vec{r} - \vec{r}_L|} ds$$

Das Kreuzprodukt bestimmt die Richtung des magnetischen Feldes \vec{B} . Weiterhin taucht der Abstand r der Punkte \vec{r} und \vec{r}_L im Nenner des ersten Bruchterms quadratisch auf, sodaß nach der Integration das Resultat die erwartete Abhängigkeit von r^{-1} besitzt. Um das Feld nun zu berechnen wird über alle Stromanteile integriert:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \# I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{t} \times (\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t}))}{|\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t})|^3} ds \quad (3.2-9)$$

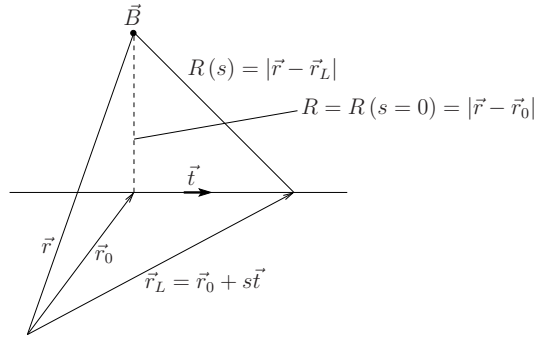


Abbildung 3.2: Vektorzusammenhänge bezüglich Magnetfeld

Die jetzt noch beliebige Konstante $\#$ wird später der Konventionen entsprechend gewählt. Der Ortsvektor \vec{r}_0 wird so gewählt, daß gilt (siehe Abbildung 3.2):

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{t} \quad (3.2-10)$$

Damit kann der Wurzelausdruck im Nenner sehr einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - (\vec{r}_0 + s\vec{t})| &\equiv |(\vec{r} - \vec{r}_0) - s\vec{t}| \\ &\equiv \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + s^2} = \sqrt{R^2 + s^2} \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

Das Magnetfeld ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \# I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{(R^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} ds - \# I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\vec{t} \times \vec{t})}{(R^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} ds \\ &= \# I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(R^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \# I \frac{2}{R^2} \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \# 2I \frac{\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \sim \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

Nun vergleicht man den Betrag dieses Ergebnisses

$$|\vec{B}| = \# I \frac{2}{R^2} R \equiv \# I \frac{2}{R} \quad (3.2-13)$$

mit der Konvention. Mit Gleichung 3.2-4 und der Definition der Kraft (Gleichung 3.1-1) wird der Betrag des magnetischen Feldes wie folgt definiert:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3.2-14)$$

So ergibt sich die Konstante $\#$ zu:

$$\# = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (3.2-15)$$

Daher erhält man das \vec{B} -Feld eines geraden Stromfadens im Abstand \vec{r} mit:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds \quad (3.2-16)$$

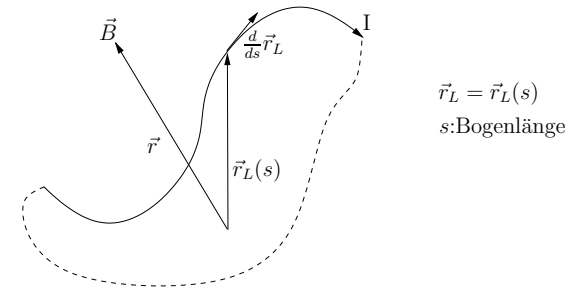


Abbildung 3.3: Stromschleife im Raum

Allgemein kann so das Magnetfeld einer beliebigen Stromschleife mit

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Schleife}} \frac{\frac{d}{ds} \vec{r}_L \times (\vec{r} - \vec{r}_L)}{|\vec{r} - \vec{r}_L|^3} ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{r}_L \times (\vec{r} - \vec{r}_L)}{|\vec{r} - \vec{r}_L|^3} \end{aligned} \quad (3.2-17)$$

berechnet werden (siehe Abb.3.3). Die Gleichungen 3.2-16 und 3.2-17 werden als das Gesetz von Biot-Savart bezeichnet.

Da eine Stromschleife nicht zwingend vom Unendlichen kommend wieder ins Unendliche verschwinden muß, sondern auch eine geschlossene Kurve sein darf, sind Magnetfelder bezüglich beliebiger Stromschleifen berechenbar. Wichtig ist nur, daß Ströme nicht aus dem Nichts kommen oder ins Nichts verschwinden, also quellenfrei sind.

3.3 Definition der Stromdichte

Die Verallgemeinerung des Stroms ist die Stromdichte. Dazu wird für beliebige Testflächen $\Delta\vec{F}$ (auch Stromflächen genannt) im Raum ein Ausdruck gesucht, welcher die Ströme beschreibt, die durch diese Fläche gehen (siehe Abbildung 3.4(a)). Dabei ist die Stromdichte, bezeichnet mit \vec{j} , ein Vektorfeld, welches in Richtung der Flächennormalen zeigt.

Um den Sinn der Einführung einer Stromdichte darzustellen, sei eine analoge Situation der Elektrostatik betrachtet.

Eine Punktladung wird mit Hilfe der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ beschrieben:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q) \quad (3.3-18)$$

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

kann man dann das elektrische Feld \vec{E} berechnen.

Im Falle magnetischer Felder wird deshalb eine Stromdichte \vec{j} betrachtet, welche alle möglichen Stromverteilungen darstellt. Die Stromdichte ist dabei bezüglich einer Fläche $d\vec{A}$ definiert und es gilt:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (3.3-19)$$

Für eine beliebige Testfläche $\Delta\vec{A}$ gilt demnach

$$I = \Delta\vec{A} \cdot \vec{j} \quad (3.3-20)$$

sofern die Stromdichte konstant auf der Fläche $\Delta\vec{A}$ ist. Allgemein kann der Gesamtstrom für beliebige Stromdichten bezüglich beliebiger Flächen F mit

$$I = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (3.3-21)$$

berechnet werden, welches den obrigen Sonderfall (3.3-20) mit einschließt.

An diesen beiden Gleichungen erkennt man, daß die Stromdichte immer bezüglich einer Fläche definiert ist, es handelt sich sozusagen um einen 'Strom pro Fläche' mit der Einheit:

$$\left[\vec{j} \right] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (3.3-22)$$

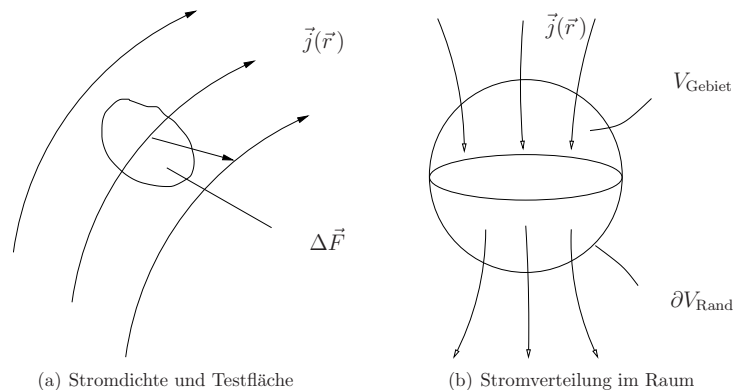


Abbildung 3.4: Veranschaulichung zur Definition der Stromdichte

Der Strom erfüllt die Kirchhoff'sche Knotengleichung, in der die Summe aller Ströme in einen Knoten verschwindet:

$$\sum_{\text{Teilströme } n} I_n = 0 \quad (3.3-23)$$

Diese Bedingung ist ebenfalls an die Stromdichte zu stellen: Die Stromdichte hat die verallgemeinerte Kirchhoff'sche Knotengleichung zu erfüllen:

$$I_{\text{total}} = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 \quad (3.3-24)$$

Es muß an einer beliebigen Stelle des Volumens genauso viel Strom über die Oberfläche eintreten, wie an einer anderen Stelle Strom austritt. Wendet man nun den Satz von Gauß an, findet man die Quellenfreiheit der Stromdichte:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

In bestimmten Fällen kann der Strom auf eine dünne Schicht konzentriert sein. Im Grenzfall, für eine unendlich dünne Schicht, spricht man von einer Oberflächenstromdichte \vec{k}_f . Wie der Name bereits sagt, handelt es sich dabei um eine Stromdichte, die in einer Oberfläche fließt (siehe Abbildung 3.5). Die Einheit ist dann gegeben mit:

$$\left[\vec{k}_f \right] = \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (3.3-25)$$

Nach Abbildung 3.5 durchsetzt also die Oberflächenstromdichte das Linienelement $d\vec{s}$. Wie auch bei der Stromdichte, dort steht die Fläche senkrecht zur Stromdichte, muß auch hier $d\vec{s}$ orthogonal zu \vec{k}_f stehen. Daher erhält man den infinitesimalen Strom dI , des von der Oberflächenstromdichte \vec{k}_f durchsetzten Linienelements $d\vec{s}$ mit:

$$dI = \vec{k}_f \cdot (\vec{n} \times d\vec{s}) \quad (3.3-26)$$

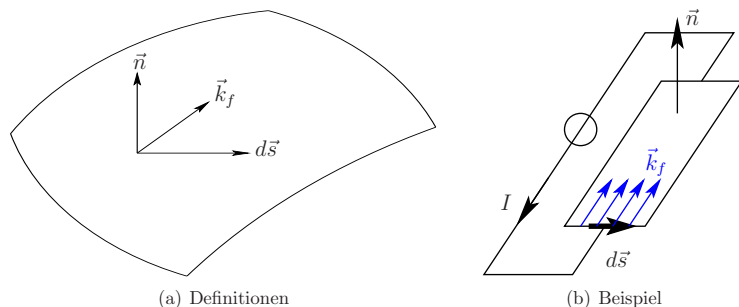


Abbildung 3.5: Oberflächenstromdichte

3.4 Das Magnetfeld einer beliebigen Stromdichteverteilung (Verallgemeinerung des Gesetzes von Biot-Savart)

In Kapitel 3.2 wurde bereits das Magnetfeld einer beliebigen Stromschleife erarbeitet:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\frac{d\vec{r}_L(s)}{ds} \times (\vec{r} - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds$$

Das Ziel ist nun eine Darstellung zu finden, welche das Magnetfeld für eine beliebige Stromdichte darstellt und nicht nur für eine statische Stromschleife. Dazu ist zunächst die Stromdichte \vec{j} einer Stromschleife I zu bestimmen (siehe Abb.3.6).

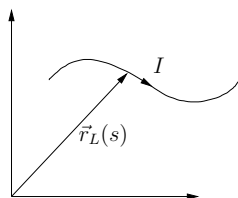


Abbildung 3.6: Stromschleife im Raum

Wenn es möglich ist, die Stromschleife als Stromdichte darzustellen, kann man sich aus dem Magnetfeld für die Stromschleife auch das Magnetfeld für eine beliebige Stromdichte überlegen. Zur Erinnerung sei die Ladungsdichte einer Linienladung betrachtet:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{\text{Linie}} \sigma_L \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L) ds$$

Eine sinnvolle Möglichkeit, die Stromdichte einer Stromschleife darzustellen ist somit einen Strom I entlang einer Schleife $\vec{r}_L(s)$ mit der δ -Funktion zu multiplizieren. Integriert

man entlang der Schleife $\vec{r}_L(s)$, so erhält man eine Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \int_{\text{Stromschleife}} \frac{d\vec{r}_L}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \quad (3.4-27)$$

Die Einheit der rechten Seite in Gleichung 3.4-27 entspricht mit $[I \delta^{(3)}(\vec{r}) ds] = A m^{-3} m = m^{-2}$ der einer Stromdichte.

Um zu verifizieren, ob diese Darstellung korrekt und sinnvoll ist, die Stromerhaltung $\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f}$ zu prüfen. Dies ist gleichbedeutend der Quellenfreiheit:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \\ &= \nabla \cdot I \int_{\text{Stromschleife}} \frac{d\vec{r}_L}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \end{aligned} \quad (3.4-28)$$

Beachtet man, daß sich die Divergenz auf den Ort \vec{r} bezieht, kann man den Nabla-Operator in den Integranden ziehen:

$$\nabla \cdot \vec{j} = I \int_{\text{Stromschleife}} \frac{d\vec{r}_L}{ds} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds = 0 \quad (3.4-29)$$

Da es sich um eine Leiterschleife handelt, sind Anfangs- und Endpunkt gleich und somit wird das Integral Null.

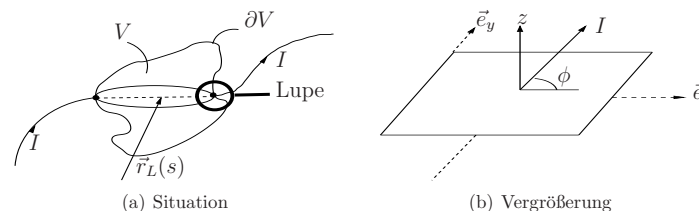


Abbildung 3.7: Strom fließt durch ein Volumen

Mit Hilfe der Vergrößerung der Austrittsstelle des Stromes I in Abbildung 3.7(b) stellt man nun eine lokale Überlegung an. Zum einen muß die Integration über das in Abbildung 3.7(b) gezeigte Flächenelement den Strom I liefern, zum anderen muß das Ergebnis vom dem Winkel ϕ sein.

Durch geschickte Wahl des Koordinatensystems für den Durchstoßpunkt wird nun der Beweis angetreten. In diesem Fall wird das Problem in der z -Ebene ($z=0$) betrachtet. Als Nullpunkt des Koordinatensystems wird der Durchstoßpunkt gewählt. Damit ist die Gleichung des Strompfades durch $\vec{r}_L(s) = s\vec{f}$ gegeben.

Als Ergebnis ist eine Integral der Form

$$\int_{\text{Flächenelement}} \vec{j} \cdot d\vec{f} = I$$

zu erwarten. Aus den Überlegungen vorher erhält man mit $d\vec{f} = \vec{e}_z dx dy$:

$$\begin{aligned}\vec{j}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} I \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \delta(x - t_x s) \delta(y - t_y s) \delta(z - t_z s) ds \\ \Rightarrow I \int_x \int_y \left[\int_s t_z \delta(x - t_x s) \delta(y - t_y s) \delta(z - t_z s) ds \right] dx dy &= I \quad (3.4-30) \\ \Rightarrow I \int_s t_z \delta(z - t_z s) ds \equiv I \int_{\tilde{s}} \delta(z - \tilde{s}) d\tilde{s} &\equiv I\end{aligned}$$

Integriert man über das gesamte Gebiet V (siehe Abbildung 3.7(a)), so erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f} &= \int_{\text{Eintrittsfläche}} \vec{j} \cdot d\vec{f} + \int_{\text{Austrittsfläche}} \vec{j} \cdot d\vec{f} \\ &= -I + I = 0\end{aligned}$$

Aus dem Feld einer Stromschleife (Biot-Savart)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r}_L \times (\vec{r} - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds$$

und der Stromdichte einer Stromschleife

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \int_L \frac{d\vec{r}_L}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds$$

ist unter Verwendung der Ausblendeigenschaft der folgende Zusammenhang gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r}_L \times (\vec{r} - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_V \int_L \frac{d\vec{r}_L \times (\vec{r}' - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r}' - \vec{r}_L(s)|^3} ds \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'\end{aligned}$$

Man erhält damit das Magnetfeld für eine beliebige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ mit:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (3.4-31)$$

Man nennt dies auch die Verallgemeinerung des Biot-Savart-Gesetzes.

Als Probe wird die Stromdichte eines Stromfadens wieder in Gleichung 3.4-31 eingesetzt und man erkennt, daß man das Magnetfeld eines Stromfadens erhält:

$$\begin{aligned}B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V I \int_L \frac{d\vec{r}_L}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_L) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r}_L}{ds} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_L}{|\vec{r} - \vec{r}_L|^3} ds\end{aligned}$$

Betrachtet man ein Raumgebiet in welches ein Strom an einer beliebigen Stelle eintritt und an einer beliebigen anderen Stelle wieder austritt (das kann auch für mehrere Ströme

formuliert werden), so ist gezeigt, daß die Darstellung des Stroms als Stromdichte konsistent gewählt wurde und daß immer noch $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ erfüllt ist.

Für den Fall einer Oberflächenstromdichte \vec{k}_f wird analog eine entsprechende Darstellung der Stromdichte verwendet:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int_{\text{Oberfläche}} \vec{k}_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^2 r' \quad (3.4-32)$$

3.5 Charakterisierung des magnetischen Feldes

3.5.1 Das Vektorpotential

Bei genauerer Betrachtung von Gleichung 3.4-31 erkennt man mit dem Zusammenhang

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

daß das Magnetfeld auch anders formuliert werden kann:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.5-33)$$

Der Nabla-Operator wirkt bezüglich \vec{r} und nicht bezüglich der Integrationsvariable \vec{r}' . Aus der Vektor-Analyse ist außerdem bekannt, daß gilt:

$$\nabla \times (\phi \vec{a}) = -\vec{a} \times (\nabla \phi) \quad (3.5-34)$$

Überträgt man dies auf die Magnetostatik und identifiziert $\vec{a} = \vec{j}$ und $\phi = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, so erhält man für das Magnetfeld einer Stromdichteverteilung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' \quad (3.5-35)$$

Aus der Berechnung des magnetischen Feldes \vec{B} in Gleichung 3.5-35 einer beliebigen Stromdichteverteilung \vec{j} , kann nun das Vektorpotential \vec{A} abgeleitet werden. Dabei sei auf die Einführung des Vektorpotentials mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in Kapitel 3.2 hingewiesen. Man bezeichnet den rechten Term des Kreuzproduktes mit \vec{A} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{\vec{A}} \quad (3.5-36)$$

Der Vektor \vec{A} bezeichnet damit das Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.5-37)$$

Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ hängen über die Rotation zusammen. Die Anwendung der Divergenz $\nabla \cdot$ auf das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ wird dann durch den

vektoranalytischen Zusammenhang klar

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \\ &= 0\end{aligned}\quad (3.5-38)$$

und ist immer erfüllt.

Dies ist bereits eine der Maxwell-Gleichungen, aber dazu mehr in den folgenden Kapiteln.

Vergleicht man dazu die Ähnlichkeiten zur Elektrostatik:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla \phi \\ \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'\end{aligned}$$

Als eine wichtige Eigenschaft des Vektorpotentials gilt

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.5-39)$$

da die Stromdichte \vec{j} im Unendlichen verschwindet und somit $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ weiterhin erfüllt ist. Zum Beweis wird das entsprechende Integral berechnet:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (3.5-40)$$

Der Integrand ist nichts anderes als die Divergenz des ortsabhängigen Terms des Vektorpotentials. Ist dieses Integral Null, so ist gezeigt, daß auch $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ gelten muß. Man wendet dazu auf Gleichung 3.5-40 den folgenden vektoranalytischen Zusammenhang an:

$$\nabla \cdot (\vec{j}\phi) = (\nabla \cdot \vec{j})\phi + \vec{j} \cdot \nabla \phi$$

Da die Stromdichte nur von gestrichelten Größen abhängt ($\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}')$), ist der erste Term auf der rechten Seite gleich Null. Daher erhält man:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (3.5-41)$$

Aus dem mathematischen Zusammenhang

$$\nabla \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

erhält man für Gleichung 3.5-41:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \nabla' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \underbrace{(\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}_{0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{f}'\end{aligned}\quad (3.5-42)$$

Wählt man für das Volumen V die Fernkugel (siehe Abbildung 3.8), so verschwindet der Integralbeitrag und es gilt:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.5-43)$$

Damit ist gezeigt, daß das Vektorpotential \vec{A} quellenfrei ist. Dies bedeutet anschaulich, daß Ströme räumlich begrenzt sind, also im unendlichen verschwinden.

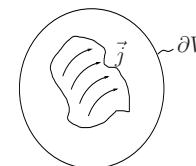


Abbildung 3.8: Stromverteilung im Raum

3.5.2 Mathematische Überlegungen zu den magnetostatischen Grundgleichungen

Zu Beginn des Kapitels über die Behandlung magnetostatischer Phänomene werden Grundideen der Magnetostatik mit denen der Elektrostatik verglichen. Als die informationstragenden Variablen betrachtet man:

Stromdichte	$\vec{j}(\vec{r})$	← Vektor
Magnetisches Feld	$\vec{B}(\vec{r})$	← Vektor

Aus dem Vektorcharakter der beiden Größen \vec{j} und \vec{B} kann man überlegen, welche Zusammenhänge dieser Größen bestehen.

Wie schon bei der Betrachtung des elektrischen Feldes macht es Sinn, über die Quellen und Wirbel der magnetischen Felder nachzudenken. Aus dem Wissen, daß magnetische Quellen nicht existieren, kommt man zu dem Schluß, daß für die Divergenz des Feldes gilt:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.5-44)$$

Dies konnte aber bereits mathematisch über das Vektorpotential in Kapitel 3.5.1 gezeigt werden.

Ebenfalls ist es interessant über die Wirbel des Feldes nachzudenken. Aufgrund der Erfahrung, daß Ströme Magnetfelder verursachen, kann also nur der Zusammenhang

$$\nabla \times \vec{B} = k_1 \vec{j} \quad (3.5-45)$$

Magnetfelder mit Strömen verbinden. Auf die Normierungskonstante k_1 wird später eingegangen. Analog zur Definition der Kraftdichte in der Elektrostatik, wo eine Probeladung

q im elektrischen Feld \vec{E} betrachtet wird, müssen für die Kraftdichte im magnetischen Feld kleine Teilstromdichten \vec{j} im Magnetfeld \vec{B} betrachtet werden. Analog zu 3.2-4 findet sich:

$$\vec{f} = k_2(\vec{j} \times \vec{B}) \quad (3.5-46)$$

Berücksichtigt man jetzt die heute gängigen Konventionen, so erhält man zusammenfassend die folgende Gleichung der Magnetostatik, in welche die Überlegungen von vorher wiedergefunden werden können. Die Konstanten k_1 und k_2 werden dem SI-System entsprechend gewählt:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (3.5-47)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.5-48)$$

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.5-49)$$

3.5.3 Rotation und Divergenz des magnetischen Feldes

In Kapitel 3.5.2 wurde mit Hilfe rein mathematischer Überlegungen die Struktur der magnetostatischen Gleichungen hergeleitet. Nun soll diese Gleichung aber mit physikalischen Argumenten erarbeitet werden. Dazu werden wie in der Elektrostatik die Divergenz und die Rotation des Magnetfeld \vec{B} untersucht.

Bestimmung von $\nabla \cdot \vec{B}$:

Da von den Magnetfeldern bekannt ist, daß keine Quellen (Monopole) existieren kann sofort festgehalten werden, daß gilt (siehe Kapitel vorher):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.5-50)$$

Als nächstes wird auf die Wirbel $\nabla \times \vec{B}$ eingegangen.

Bestimmung von $\nabla \times \vec{B}$:

Aus der Vektor-Analyse und dem Zusammenhang des \vec{B} -Feldes zum Vektorpotential \vec{A} ist bekannt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \nabla \times \vec{A} \\ &= -\nabla^2 \vec{A} + \nabla \nabla \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (3.5-51)$$

Da das Vektorpotential divergenzfrei ist (siehe Kapitel 3.5.1) gilt:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.5-52)$$

Dementsprechend erhält man für die Rotation des magnetischen Feldes \vec{B} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= -\nabla^2 \vec{A} \\ &= -\nabla^2 \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= -\mu_0 \int_V \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3 r' \\ &= \mu_0 \int_V \vec{j}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \end{aligned} \quad (3.5-53)$$

Wertet man dieses Integral aus, so erhält man

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.5-54)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (3.5-55)$$

als Gleichungen der Magnetostatik.

3.5.4 Zusammenhang der Feldgleichungen und deren Lösung

Aus der Magnetostatik (Kapitel 3.5.1) weiß man, daß das magnetische Feld und das Vektorpotential mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

zusammenhängen. Da keine Quellen magnetischer Felder existieren, kann der vektoranalytische Ausdruck $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ das Feld beschreiben und somit das Vektorpotential eingeführt werden. Die zur Berechnung zur Verfügung stehenden Gleichungen lauten damit:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.5-56)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.5-57)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.5-58)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.5-59)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (3.5-60)$$

Die Integraldarstellungen für das magnetische Feld (Gleichung 3.5-60) und für das Vektorpotential (Gleichung 3.5-59) lösen die magnetostatischen Gleichungen (3.5-56, 3.5-57 und 3.5-58) bei vorgegebener Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ im sonst leeren Raum. Die Gleichung 3.5-60 wird als das verallgemeinerte Gesetz von Biot-Savart bezeichnet.

3.6 Beispiel der Berechnung des Magnetfeldes eines geraden Stromfadens

Für eine beliebige Stromschleife gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}_L \times (\vec{r} - \vec{r}_L(s))}{|\vec{r} - \vec{r}_L(s)|^3} ds$$

Durch Parametrisierung der Linie kann das Magnetfeld des Stromfadens berechnet werden. Eine alternative Berechnung führt über die Ausnutzung von Symmetrien.

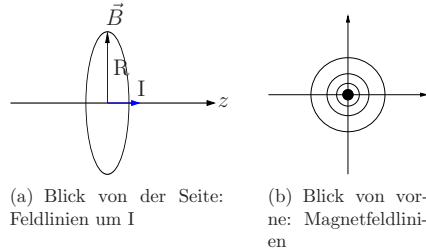


Abbildung 3.9: Stromfaden entlang der z-Achse

Aus der in Abbildung 3.9 gezeigten Anordnung (Zylindersymmetrie und Zylinderkoordinaten) für einen geraden Stromfaden auf der z-Achse erkennt man:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}(R, \varphi, z) \\ &= B_\varphi(R) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.6-61)$$

Das heißt, das Magnetfeld zeigt in \vec{e}_φ -Richtung (rechte-Hand-Regel) und ist nur vom Radius R , also vom Abstand zur stromführenden Achse abhängig.

Durch Integration über die Fläche einer beliebigen Feldlinie (z.B. bei R) erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} \\ \int_F \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} = I \end{aligned} \quad (3.6-62)$$

Das Integral $\int_F \vec{j} \cdot d\vec{f}$ sammelt dabei alle Ströme auf, die durch die Testfläche F gehen, im gezeigten Fall nur I . Mit dem Satz von Stokes gilt dann:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = I \quad (3.6-63)$$

Für das differentielle Linienelement $d\vec{r}$ gilt dabei (siehe Parametrisierung eines Kreises):

$$d\vec{r} = \vec{e}_\varphi ds \quad (3.6-64)$$

Somit erhält man für das Integral 3.6-62

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial F} B_\varphi(R) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi ds \\ &= \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(R) \underbrace{\int_{\partial F} ds}_{2\pi R} \end{aligned} \quad (3.6-65)$$

Löst man dies nach B_φ auf, so erhält man:

$$B_\varphi(r) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi r} \quad (3.6-66)$$

In vektorieller Schreibweise ergibt sich das Magnetfeld zu:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (3.6-67)$$

3.7 Der magnetische Elementardipol

Wie in der Elektrostatik wird auch in der Magnetostatik nach Grundbausteinen gesucht, die die magnetischen Phänomene darstellen können. Magnetische Monopole existieren (wenn überhaupt) nur so wenige (einzelne pro Galaxie), daß sie praktisch nicht berücksichtigt werden müssen. Magnetische Dipole sind hingegen vorstellbar. Wie bei der Herleitung der elektrischen Elementardipole, wird auch hier von einer endlichen Anordnung ausgegangen und durch eine Grenzwertbildung der Dipol hergeleitet.

Da es keinen (zumindest keinen statischen) Punktstrom gibt, ist der einfachste Baustein der Magnetostatik die infinitesimale Stromschleife (Abb. 3.10), genannt der magnetische Elementardipol.

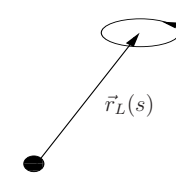
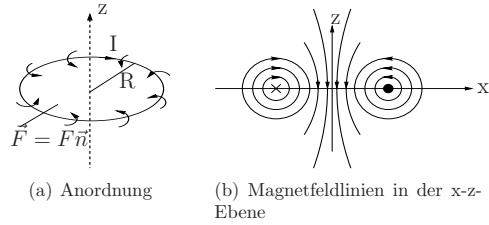


Abbildung 3.10: magnetischer Elementardipol

3.7.1 Herleitung der Stromdichte und des Momentes des magnetischen Dipols

Zuerst wird das Magnetfeld einer Stromschleife des Stroms I betrachtet (Abb. 3.11).

Zur Bestimmung der Stromdichte \vec{j} zieht man die Schleife zusammen ($2\pi r^2 \rightarrow 0$) und erhöht gleichzeitig den Strom $I \rightarrow \infty$ in der Weise, daß Produkt $F \cdot I = m$ konstant bleibt.

Abbildung 3.11: Magnetfeld einer endlichen Stromschleife \vec{r}_L

Aufgrund der Tatsache, daß das gesamte Gebilde an einem Punkt im Raum existieren soll, wird die folgende Struktur des Arguments erwartet:

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D - \vec{R}(s))$$

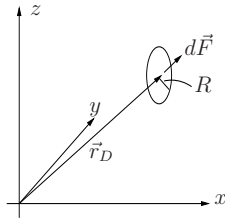


Abbildung 3.12: magnetischer Elementardipol

Die Stromschleife \vec{r}_L in Abbildung 3.11(a) wird dabei parametrisiert mit:

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}_D + \vec{R}(s) \quad (3.7-68)$$

Dabei soll aber nicht vergessen werden, daß die Fläche $F = 2\pi r^2$ sehr klein werden soll. Die Stromdichte der Stromschleife ergibt sich damit zu:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} \int_{\text{Schleife}} I \frac{d\vec{r}_L}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) ds \quad (3.7-69)$$

Zur Vorstellung ist das gesuchte Gebilde in Abbildung 3.12 dargestellt. Die Idee ist es nun, die Parametrisierung der Stromschleife in eine Taylor-Reihe um $\vec{R}(s) = 0$ zu entwickeln:

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_L(s)) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) - \vec{R}(s) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) + \dots$$

Setzt man dies ein, so erhält man für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} \left[I \int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{R}}{ds} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) ds - I \int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{R}}{ds} \vec{R}(s) \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) ds + \dots \right] \quad (3.7-70)$$

Der Term nullten Ordnung verschwindet, da der Schleifenendpunkt s_1 gleich dem Schleifenanfangspunkt s_0 ist und somit kein Beitrag zum Integral liefert:

$$\int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{R}}{ds} I \delta^{(3)}(\dots) ds \leftrightarrow \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\vec{r}_L}{ds} ds = \vec{r}_L(s_1) - \vec{r}_L(s_0) = 0$$

Der Term ersten Ordnung lautet nach einer geringfügigen Umstellung:

$$\vec{j}(\vec{r}) = - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleife}} \vec{R}(s) \cdot \underbrace{\nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)}_{\vec{g}} \frac{d\vec{R}}{ds} ds$$

Terme höherer Ordnung gehen aufgrund der Grenzwertbildung gegen Null (mit $F \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 0$, denn $F = \pi R^2$).

Die Struktur der Formel ist damit:

$$\vec{j}(\vec{r}) = - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleife}} \vec{R} \cdot \vec{g} \frac{d\vec{R}}{ds} ds \quad (3.7-71)$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes bedeutet dies für die x -Komponente:

$$\begin{aligned} j_x(\vec{r}) = \vec{e}_x \cdot \vec{j}(\vec{r}) &= \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} -I \int_{\text{Schleife}} \vec{R} \cdot \vec{g} \frac{d\vec{R}}{ds} \cdot \vec{e}_x ds \\ &= - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleifenfläche}} \nabla' \times (\vec{R}' \cdot \vec{g} \vec{e}_x) \cdot d\vec{f}' \end{aligned}$$

Aus der Vektor-Analyse kann folgender Zusammenhang verwendet werden:

$$\nabla \times (\phi \vec{c}) = \nabla \phi \times \vec{c} \quad (3.7-72)$$

Daraus erhält man für die x -Komponente der Stromdichte:

$$j_x(\vec{r}) = - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ I \cdot F = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleifenfläche}} \nabla' (\vec{R}' \cdot \vec{g}) \times \vec{e}_x \cdot d\vec{f}' \quad (3.7-73)$$

Betrachtet man nun den Ausdruck $\nabla' (\vec{R}' \cdot \vec{g})$ genauer, so erhält man:

$$\nabla' (\vec{R}' \cdot \vec{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} (x' g_x + y' g_y + z' g_z) \\ \frac{\partial}{\partial y'} (x' g_x + y' g_y + z' g_z) \\ \frac{\partial}{\partial z'} (x' g_x + y' g_y + z' g_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \vec{g}$$

Damit ergibt sich für die x -Komponente der Stromdichte :

$$\begin{aligned}
 j_x(\vec{r}) &= - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ IF = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleifenfläche}} (\vec{g} \times \vec{e}_x) \cdot d\vec{f} \\
 &= - \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ IF = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleifenfläche}} d\vec{f} \times \vec{g} \cdot \vec{e}_x \\
 &= + \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ IF = \text{const.}}} I \int_{\text{Schleifenfläche}} \vec{g} \times d\vec{f} \cdot \vec{e}_x \\
 &= \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ IF = \text{const.}}} I \vec{g} \times \underbrace{\int_{\text{Schleifenfläche}} d\vec{f}}_{\vec{F}} \cdot \vec{e}_x
 \end{aligned} \tag{3.7-74}$$

Analog ergeben sich die Ergebnisse für die y - und für die z -Komponenten. Für alle drei Komponenten zusammen erhält man damit:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\substack{I \rightarrow \infty \\ F \rightarrow 0 \\ IF = \text{const.}}} I \vec{g} \times \vec{F} \tag{3.7-75}$$

Im Grenzfall von

$$\begin{aligned}
 I &\rightarrow \infty \\
 F &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

wird der magnetische Dipol \vec{m} definiert:

$$\vec{m} := I\vec{F} = \text{const.}$$

Damit erhält man für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ eines Elementardipols:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}) &= \vec{g} \times \vec{m} \\
 &= \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \times \vec{m}
 \end{aligned}$$

Diese läßt sich mit der vektoranalytischen Formel

$$\nabla \varphi \times \vec{a} = \nabla \times (\vec{a} \varphi) \tag{3.7-76}$$

weiter umformen. Damit ergibt sich für die Stromdichte eines Elementardipols unter Einbeziehung von Gleichung 3.7-72:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}) &= \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \times \vec{m} \\
 &= \nabla \times \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)
 \end{aligned} \tag{3.7-77}$$

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 3.13 einige Details skizziert. Abbildung 3.13(e) stellt die gefundene Stromdichte des Dipols dar.

Nun muß noch gezeigt werden, daß die Stromdichte divergenzfrei ist. Für die Divergenz der Stromdichte eines Dipols erhält man:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)) = 0$$

Dies ergibt Null, da die Divergenz einer Rotation immer Null ergibt. Die Terme höherer Ordnungen aus Gleichung 3.7-70 werden nicht weiter betrachtet, da sie mit $|\vec{R}| \rightarrow 0$ verschwinden.

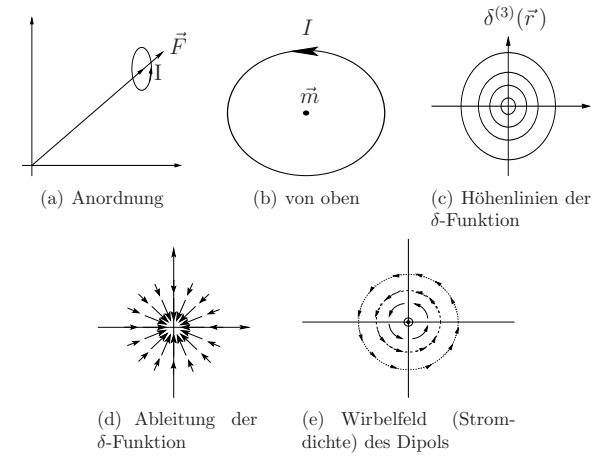


Abbildung 3.13: Veranschaulichung des magnetischen Elementardipols

3.7.2 Das magnetische Feld eines Elementardipols

Ausgehend von einer beliebigen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ kann das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ berechnet werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \tag{3.7-78}$$

Beschreibt man nun den magnetischen Elementardipol mit einer Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ oder $\vec{j}(\vec{r}')$

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}) &= \nabla \times (\vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)) = -\vec{m} \times \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \\
 \vec{j}(\vec{r}') &= -\vec{m} \times \nabla' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D),
 \end{aligned} \tag{3.7-79}$$

so kann durch Einsetzen in Gleichung 3.7-78 das Magnetfeld des Elementardipols berechnet werden. Eine andere Möglichkeit der Herleitung führt über die Berechnung des Magnetfeldes über $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. In diesem Fall setzt man die Stromdichte 3.7-79 in die Gleichung für das Vektorpotential ein und erhält:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_D)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'
 \end{aligned} \tag{3.7-80}$$

Mit der umgestellten Kettenregel

$$\phi \nabla \times \vec{A} = (\nabla \phi) \times \vec{A} - \nabla \times (\phi \vec{A}) \tag{3.7-81}$$

erhält man für den Integranden:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\times\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)=\nabla'\times\frac{\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\left(\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\times\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)\quad (3.7-82)$$

Setzt man dies in Gleichung 3.7-80 ein, so ergibt sich das Vektorpotential des Elementardipols:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\times\frac{\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\times\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial V}\underbrace{d^2\vec{r}'\times\frac{\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=0}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\times\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{m}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}_D)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\end{aligned}\quad (3.7-83)$$

Der Integralsatz, der von Zeile 1 auf Zeile 2 verwendet wurde, ist die Formulierung des Integralsatzes von Stokes bezüglich eines Volumenintegrals (A.6-54).

Nun muß noch die Rotation des Vektorpotentials berechnet werden, um das Magnetfeld des Elementardipols zu erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\nabla\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))+\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))\end{aligned}$$

Der Faktor $\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}$ kann berechnet werden:

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}=-3\frac{\vec{r}-\vec{r}_D}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^5}\quad (3.7-84)$$

Durch Einsetzen erhält man für das Magnetfeld:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\nabla\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))-3\frac{\vec{r}-\vec{r}_D}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^5}\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))\right)$$

Mit Hilfe des Vektoranalytischen Zusammenhangs

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})=(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\quad (3.7-85)$$

erhält man:

$$(\vec{r}-\vec{r}_D)\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))=|\vec{r}-\vec{r}_D|^2\vec{m}-[(\vec{r}-\vec{r}_D)\cdot\vec{m}](\vec{r}-\vec{r}_D)$$

Außerdem gilt der Zusammenhang:

$$\nabla\times(\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}_D))=2\vec{m}$$

Setzt man diese beiden Ergebnisse ein, so ergibt sich das Magnetfeld des Elementardipols zu

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{2\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}-3\frac{|\vec{r}-\vec{r}_D|^2\vec{m}-(\vec{r}-\vec{r}_D)(\vec{r}-\vec{r}_D)\cdot\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^5}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_D)(\vec{r}-\vec{r}_D)}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^5}-\frac{\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_D)(\vec{r}-\vec{r}_D)-|\vec{r}-\vec{r}_D|^2\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}_D|^5}\right)\end{aligned}\quad (3.7-86)$$

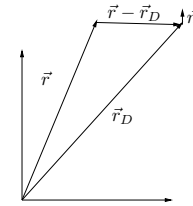


Abbildung 3.14: magnetischer Dipol im Raum

3.7.3 Das Magnetfeld eines magnetisierten Körpers

Ein mit \vec{M} magnetisierter Körper kann durch eine Stromdichte wie folgt beschrieben werden:

$$\vec{j}(\vec{r}')=\nabla'\times\int_{\text{Körper}}\vec{M}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}'')d^3r''\quad (3.7-87)$$

Setzt man dies in die Gleichung für das Vektorpotential ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\int_{\text{Körper}}\vec{M}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}'')d^3r''}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\times\left(\int_{\text{Körper}}\vec{M}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}'')d^3r''\right)d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{Körper}}\left[\int_V\left(\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\times\vec{M}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{r}'')d^3r'\right]d^3r''\end{aligned}$$

Nach analoger Vorgehensweise zur Berechnung des magnetischen Feldes des Elementardipols (Kapitel 3.7.2) bezüglich des Ausdrucks in den eckigen Klammern ergibt sich:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{Körper}}\frac{\vec{M}\times(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}d^3r''\quad (3.7-88)$$

Durch Bildung der Rotation erhält man das Magnetfeld mit:

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{Körper}}\left(\frac{3\vec{M}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^5}-\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\right)d^3r''\quad (3.7-89)$$

3.7.4 Dipolnäherung einer Stromdichteverteilung \vec{j}

Zur Bestimmung des Dipolmoments \vec{m} einer Stromdichteverteilung \vec{j} wird wieder das Vektorpotential verwendet. Dazu wird im folgenden eine lokalisierte, d.h. eine ganz im Endlichen befindliche Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$ im Vakuum betrachtet. Das zugehörige Vektorpotential ist gegeben durch:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (3.7-90)$$

Diesmal wird der Faktor $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ in eine Taylor-Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] \pm \dots \quad (3.7-91)$$

Setzt man dies in Gleichung 3.7-90 ein, so ergibt sich das gesuchte Resultat:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \vec{j}(\vec{r}') d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^5} \int_V \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2 \right] \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \pm \dots \end{aligned} \quad (3.7-92)$$

Gleichung 3.7-92 ist eine Darstellung des Vektorpotentials nach Multipolanteilen wachsender Ordnung. Wie bei der Herleitung des Vektorpotentials ist lediglich der Term erster Ordnung relevant. Der Term nullter Ordnung ist Null und die Terme höherer Ordnungen verschwinden mit $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

Damit ergibt sich als Näherung für das Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \quad (3.7-93)$$

Durch die vektoranalytische Formel

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} \quad (3.7-94)$$

kann der Integrand umgeformt werden:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}'$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')$ und dividiert anschließend durch 2, so erhält man:

$$2(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = \left\{ (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] \vec{r}' \right\} + [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \times \vec{r}$$

Setzt man den so erhaltenen Ausdruck $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')$ in Gleichung 3.7-93 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{1}{r^3} \int_V \left\{ (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] \vec{r}' \right\} d^3r' \\ &+ \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{1}{r^3} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \times \vec{r} d^3r' \end{aligned} \quad (3.7-95)$$

Ist $\vec{j}(\vec{r}')$ eine lokalisierte stationäre Stromverteilung, so liefert das erste Integral in Gleichung 3.7-95 keinen Beitrag.

Mit dem Zusammenhang (siehe [blu])

$$\int_V \vec{\Psi} d^3r' = \int_{\partial V} (\vec{\Psi} \cdot \vec{n}) df' - \int_V \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{\Psi}) d^3r' \quad (3.7-96)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') d^3r' &= \int_{\partial V} \vec{r}' [(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'] df' - \int_V \vec{r}' \nabla' \cdot [(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')] d^3r' \\ &= \int_{\partial V} \vec{r}' [(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'] df' - \int_V \vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') d^3r' - \int_V \vec{r}' [\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] d^3r' \end{aligned} \quad (3.7-97)$$

Das erste Integral über die Fernkugelflache liefert keinen Beitrag, da eine lokalisierte Stromverteilung betrachtet wird. Das zweite Integral verschwindet, da für stationäre Ströme gilt:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Für den Fall einer lokalisierten stationären Stromverteilung folgt also aus Gleichung 3.7-95 und 3.7-97:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{1}{r^3} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \times \vec{r} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{8\pi} \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] d^3r' \end{aligned}$$

Das magnetische Dipolmoment \vec{m} wird nun wie folgt definiert

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \quad (3.7-98)$$

da bereits durch Gleichung 3.7-83 das Vektorpotential mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.7-99)$$

gegeben ist.

Liegt der Aufpunkt \vec{r} genügend weit entfernt von der Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$, so wird das Magnetfeld hinreichend genau durch die Dipolnäherung beschrieben (Fernfeldnäherung).

3.7.5 Das Dipolmoment einer ebenen Drahtschleife

Diese Aufgabe ist aus [blu] entnommen.

Aufgabe: Weisen Sie nach, daß das magnetische Dipolmoment \vec{m} einer vom Strom I durchflossenen beliebigen ebenen Drahtschleife gegeben ist durch

$$\vec{m} = IF\vec{n} \tag{3.7-100}$$

Hierbei ist F die von der Drahtschleife eingeschlossene Fläche und \vec{n} der dazu gehörige Normalenvektor (siehe Abb. 3.15).

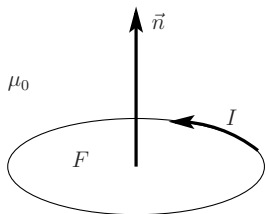


Abbildung 3.15: Zum magnetischen Dipolmoment einer ebenen Stromschleife

Lösung: Für eine lokalisierte Stromverteilung I erhält man aus Gleichung 3.7-98:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{I}{2} \int_{\text{Schleife}} \vec{r}' \times d\vec{s}' \end{aligned} \tag{3.7-101}$$

Nun ist $\vec{r}' \times d\vec{s}'$ ein Vektor, dessen Betrag gleich der Fläche des von \vec{r}' und $d\vec{s}'$ aufgespannten Parallelogramms ist (siehe Abb.3.16) und der in Richtung der Flächennormalen \vec{n} zeigt.

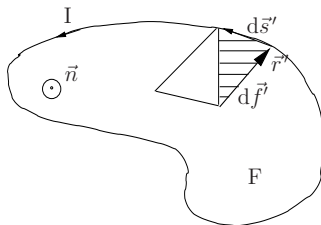


Abbildung 3.16: Zusammenhang der Vektoren

Der Vektor $\frac{1}{2}\vec{r}' \times d\vec{s}'$ ist also gleich dem gerichteten Flächenelement $\vec{n}df'$, das in Abbildung

3.16 durch Schraffur hervorgehoben ist:

$$\frac{1}{2}\vec{r}' \times d\vec{s}' = \vec{n}^2 df'$$

Das Umlaufintegral ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial F} \vec{r}' \times d\vec{s}' &= \vec{n} \int_F df' \\ &= \vec{n}F \end{aligned}$$

Damit erhält man für das magnetische Dipolmoment einer ebenen Stromschleife:

$$\vec{m} = IF\vec{n} \tag{3.7-102}$$

3.8 Kraft und Drehmoment

3.8.1 Kraft auf verschiedene Stromdichteverteilungen

Aus Kapitel 3.1 ist die Kraft auf eine Stromschleife bekannt:

$$\vec{F} = I \int_{\text{Schleife}} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) = I \int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{r}_L}{ds} \times \vec{B}(\vec{r}_L(s)) ds \tag{3.8-103}$$

Wie auch schon der Strom I in eine Stromdichte überführt wurde, wird nun auch die Kraft \vec{F} in eine Kraftdichte überführt:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} d^3r = \int_V \vec{j} \times \vec{B} d^3r \tag{3.8-104}$$

Die so definierte Kraftdichte \vec{f} trägt die Einheit $[\vec{f}] = \text{N m}^{-3}$.

3.8.2 Kraft und Drehmoment auf den magnetischen Dipol

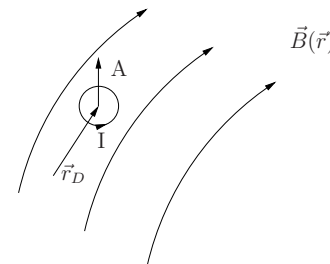


Abbildung 3.17: endliche Stromschleife im Feld

Bei der Herleitung der Kraft und des Drehmomentes wird auf die endliche Stromschleife zurückgegriffen. Die Grenzwertbildung $\vec{A} \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ mit $\vec{A} \cdot I = \vec{m}$ endlich wird dann an einer geeigneten Stelle ausgenutzt.

Ausgehend von der Kraft einer Stromschleife

$$\vec{F} = I \int_{\text{Schleife}} \frac{d\vec{r}_L(s)}{ds} \times \vec{B}(\vec{r}_L(s)) ds \quad (3.8-105)$$

ergibt sich für den Dipol:

$$\vec{F}_D = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_{\partial A} \frac{d\vec{r}'}{ds} \times B(\vec{r}'(s)) ds \quad (3.8-106)$$

Wählt man einen beliebigen Einheitsvektor \vec{e} und multipliziert diesen mit der Kraft \vec{F}_D , so ergibt sich:

$$\vec{e} \cdot \vec{F}_D = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_{\partial A} \left(\frac{d\vec{r}'}{ds} \times B(\vec{r}'(s)) ds \right) \cdot \vec{e}$$

Der Integrand ist als Spatprodukt zu erkennen, durch zyklisches Vertauschen erhält man unter Einbeziehung des Satzes von Stokes:

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{F}_D &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_{\partial A} \left(\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{e} \right) \cdot \frac{d\vec{r}'}{ds} ds \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_{\partial A} \left(\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{e} \right) \cdot d\vec{r}' \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_A \nabla' \times \left(\vec{B}(\vec{r}') \times \vec{e} \right) \cdot \vec{n} df' \end{aligned}$$

Mit der analytischen Eigenschaft

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} + a \nabla \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (3.8-107)$$

erhält man für den Integranden:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{B} \times \vec{e}) &= (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{e} \nabla \cdot \vec{B} + 0 \\ &= (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kraft \vec{F}_D :

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{F}_D &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_A (\vec{e} \cdot \nabla') \vec{B} \cdot \vec{n} df' \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ IA = m \text{ endlich}}} I \int_A (\nabla' \vec{B} \cdot \vec{n} df') \cdot \vec{e} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} m \frac{1}{A} \int_A (\nabla' \vec{B} \cdot \vec{n} df') \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

Durch Ausführen des Grenzübergangs erhält man:

$$\vec{F}_D \cdot \vec{e} = m \vec{n} \cdot \nabla \vec{B} \cdot \vec{e}$$

Der Term $m \vec{n}$ ist dabei der Betrag des Dipols m multipliziert mit der Flächennormalen \vec{n} . Dieses Produkt wird dann $\vec{m} = m \vec{n}$ genannt. Daher erhält man, wenn man für alle Einheitsvektoren einsetzt und anschließend zusammenfaßt:

$$\vec{F}_D = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (3.8-108)$$

Bei dem Ausdruck $(\vec{m} \cdot \nabla)$ handelt es sich um einen Tensor. Unter der Voraussetzung, daß der Nabla-Operator nur auf \vec{B} wirkt und m konstant ist, kann die Gleichung umgeschrieben werden:

$$\vec{F}_D = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (3.8-109)$$

Damit lautet zum Beispiel die x -Komponente in kartesischen Koordinaten:

$$F_{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} (m_x B_x + m_y B_y + m_z B_z) \quad (3.8-110)$$

Das Drehmoment auf den Dipol lautet:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (3.8-111)$$

Die Herleitung führt über die folgende Gleichung

$$\vec{T} = \int_{\text{Schleife}} I \left(\frac{d\vec{r}'}{ds} \times \vec{B} \right) \times \vec{r}' ds \quad (3.8-112)$$

indem man wieder den Grenzwert über die endliche Stromschleife ausführt. Dies soll aber nicht das Thema dieses Kapitels sein. Zur Veranschaulichung sei Abbildung 3.19 betrachtet. Auf den Dipol im Feld wirken eine Kraft und ein Drehmoment.

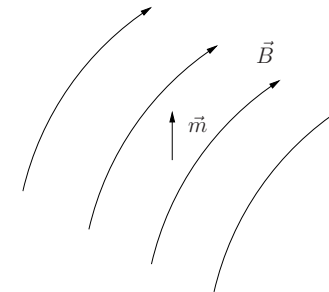


Abbildung 3.18: Dipol im Feld

Als ein Beispiel sei ein konstantes Magnetfeld betrachtet. Durch die mathematische Struktur stellt man fest, daß die Kraft auf den Dipol verschwinden muß:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = 0$$

Jedoch das Drehmoment verschwindet nicht:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Nach Wirkung des \vec{B} -Feldes ist der Dipol entlang des Feldes ausgerichtet (siehe Abbildung 3.19):

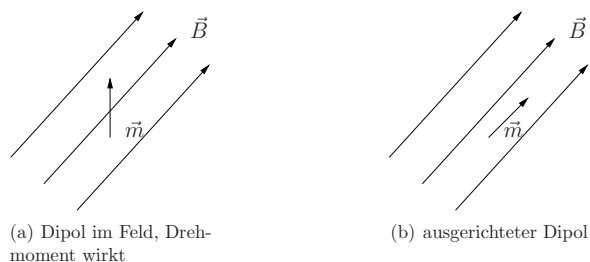


Abbildung 3.19: Drehmoment auf Dipol

Das konkrete Beispiel für diese physikalische Eigenschaft ist der Kompaß, der sich im Magnetfeld der Erde ausrichtet.

3.8.3 Prinzip eines Elektromagneten

Aus einem Draht wird eine Spule gewickelt und dann eine Stromquelle angelegt (Abbildung 3.20(a)).

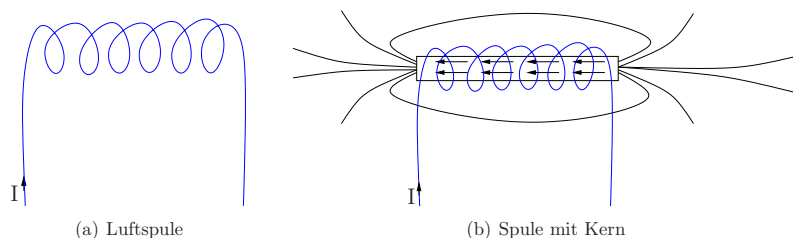


Abbildung 3.20: Elektromagneten

Das Magnetfeld dieser Anordnung kann dann mit dem Gesetz von Biot-Savart berechnet werden. Zur Verstärkung wird meist ein Kern aus magnetisierbarem Material eingebracht

(siehe Abbildung 3.20(b)). Die Dipole richten sich aus und verstärken das Magnetfeld. Zur Beschreibung dieser Situation müssen die Maxwell-Gleichungen um einen geeigneten Term erweitert werden, welcher die magnetischen Eigenschaften von Materialien beschreibt. Die entsprechende Herleitung wird im nächsten Kapitel erfolgen.

Bei der Wahl des Kernmaterials muß auf die Eigenschaft des Materials eingegangen werden. Zum Beispiel wird häufig Eisen verwendet, da dieses eine sehr gute Magnetisierbarkeit besitzt. Kupfer hingegen eignet sich nicht für eine Verstärkung des Magnetfeldes.

3.9 Dipole in Materie

3.9.1 Verteilung von Dipolen in Materie

Materie stellt eine Verteilung von Dipolen dar. Abb.3.21 zeigt einen entsprechend beliebigen Körper mit einer Dipolverteilung.

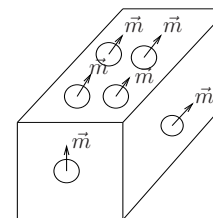


Abbildung 3.21: beliebiger Körper mit magnetischen Elementardipolen

Für einen Elementardipol lautet die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D)) \quad (3.9-113)$$

Analog zum elektrischen Fall kann eine Dipoldichte \vec{M} definiert werden. Der Sonderfall der Dipoldichte eines Punktdipols lautet dann:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (3.9-114)$$

Diese Dipoldichte kann analog zu den bisherigen Überlegungen punktvorgeweilte, linienverteilte, flächenhaft verteilte sowie räumlich verteilte Dipolmengen durch Superposition verallgemeinert werden.

Dem Begriff Dipoldichte \vec{M} ist damit die Stromdichte $\vec{j} = \nabla \times \vec{M}$ zugeordnet. Aufgrund der Superposition gilt dies dann für alle Dipoldichten \vec{M} . Die Magnetisierung trägt ebenfalls zum Strom bei. Eine tiefere Einsicht dazu gibt die Quantenmechanik.

Für die Gleichungen der Magnetostatik ergibt sich unter Einbeziehung von Magnetisie-

rung:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.9-115}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} + \underbrace{\nabla \times \vec{M}}_{\text{echte Stromdichte oder Magnetisierung}} \tag{3.9-116}$$

Eine alternative Schreibweise führt auf die Einführung des H -Feldes:

$$\nabla \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)}_{\vec{H}} = \vec{j}_{\text{frei}} \tag{3.9-117}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

mit dem Zusammenhang:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \tag{3.9-118}$$

In Abbildung 3.22 ist ein entsprechendes Beispiel aufgeführt.

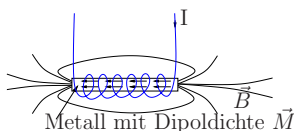


Abbildung 3.22: Spule und zugehöriges Magnetfeld

3.9.2 Lineare Materialgleichungen im Zusammenhang mit den magnetostatischen Maxwell-Gleichungen

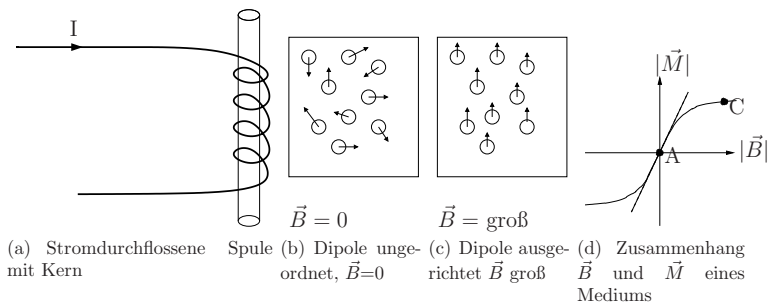


Abbildung 3.23: Magnetisierbares Material

Für ein lineares magnetisierbares Material gilt (kleine Felder):

$$\vec{M} \propto \vec{B} \tag{3.9-119}$$

Die Magnetisierung hängt also vom Magnetfeld ab. Für ein lineares Material (siehe Abbildung 3.23(d)) wird daher angenommen

$$\vec{M} = \chi_{\text{mag}} \vec{B} \tag{3.9-120}$$

wobei χ_{mag} Magnetisierbarkeit genannt wird.

Setzt man dies in die Maxwell-Gleichung ein

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \tag{3.9-121}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(1 - \mu_0 \chi_{\text{mag}})}_{\frac{1}{\mu_r}} \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \end{aligned} \tag{3.9-122}$$

Die Variable μ_r ist die relative Permeabilität. Aus historischen Gründen schreibt man

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \tag{3.9-123}$$

wobei μ magnetische Permeabilität genannt wird.

Bei einem Permanentmagneten ist $\vec{M} \neq 0$, auch wenn $\vec{B} = 0$ ist. Das heißt, es liegt kein lineares Material vor (siehe Abbildung 3.23). Als weiteres konkretes Beispiel der Anwendung sei auf den Transformator in Abbildung 3.24 verwiesen.

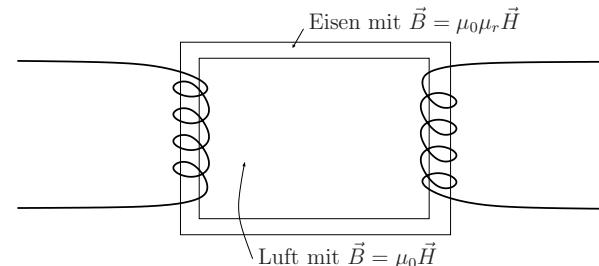


Abbildung 3.24: Transformator

3.9.3 Die Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen magnetischen Medien

Das Verhalten der Tangentialkomponenten der magnetostatischen Feldgrößen an der Grenzfläche zweier Medien werden mit Hilfe der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} \quad (3.9-124)$$

berechnet. Dazu betrachtet man zunächst diese Gleichung für eine kleine rechteckförmige

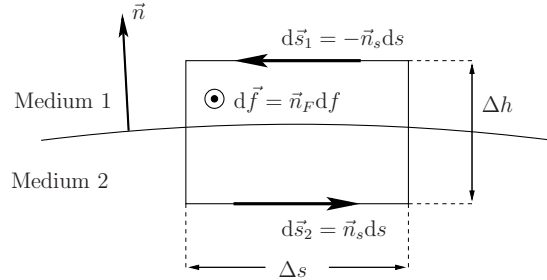


Abbildung 3.25: Skizze zur Übergangsbedingung der Tangentialkomponente

Fläche Δf . Die Fläche Δf durchsetzt die Grenzfläche der Medien senkrecht (siehe Abbildung 3.25). \vec{n} ist der Normaleneinheitsvektor senkrecht zur Grenzfläche und weist vom Medium 2 ins Medium 1.

Läßt man Δh gegen Null gehen, und zwar so, daß das Integrationsgebiet auf die Grenzlinie zusammengezogen wird, so erhält man für die linke Seite von Gleichung 3.9-124

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{C(\Delta f)} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Delta s} \vec{H} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{\Delta s} \vec{H} \cdot d\vec{s}_2 \\ &= \int_{\Delta s} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

wobei $d\vec{s} = -d\vec{s}_1 = d\vec{s}_2$ gesetzt wurde. Dabei liegt $d\vec{s}$ tangential zur Grenzfläche. Die beiden gegen Null gehenden Rechteckseiten links und rechts liefern keinen Beitrag. Die rechte Seite von Gleichung 3.9-124 geht aufgrund dieser Integration gegen Null, sofern \vec{j} endlich bleibt:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta f} \vec{j}_{\text{frei}} \cdot d\vec{f} = 0$$

Man erhält nur dann etwas von Null verschiedenes, wenn in der Grenzfläche ein Oberflächenstrom, beschrieben durch die Oberflächenstromdichte \vec{k}_f , fließt. Beschreibt man diesen Oberflächenstrom als Stromdichte, so lautet eine mögliche Darstellung:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int_{\text{Oberfläche}} \vec{k}_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^2 r' \quad (3.9-125)$$

Setzt man dies ein, so gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta f} \vec{j}_{\text{frei}} \cdot d\vec{f} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta f} \int_{\text{Oberfläche}} \vec{k}_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^2 r' \cdot d\vec{f} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta s} \int_{\Delta h} \int_{\text{Oberfläche}} \vec{k}_f \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^2 r' \cdot \vec{n}_F dh ds \\ &= \int_{\Delta s} \vec{k}_f \cdot \vec{n}_F ds \end{aligned}$$

Man erhält also:

$$\int_{\Delta s} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{s} = \begin{cases} 0 & \text{im Normalfall} \\ \int_{\Delta s} \vec{k}_f \cdot \vec{n}_F ds & \text{falls Oberflächenströme fließen.} \end{cases}$$

Aus dieser Beziehung kann man nur auf das Verhalten der Tangentialkomponenten von $\vec{H}_2 - \vec{H}_1$ schließen, da $d\vec{s}$ hier nicht beliebig gewählt werden kann, sondern stets tangential zur Grenzfläche liegt (siehe Abbildung 3.25).

Für die Auswertung wird die letzte Gleichung in eine geeignete Form gebracht. Dazu führt man den Normaleneinheitsvektor \vec{n}_F in Richtung von $d\vec{f}$ und den Tangenteneinheitsvektor \vec{n}_s in Richtung von $d\vec{s}$ ein (Abbildung 3.25). Offensichtlich sind die Einheitsvektoren durch die Beziehungen

$$-\vec{n}_s = \vec{n}_F \times \vec{n}$$

miteinander verknüpft. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs erhält man ein Spatprodukt:

$$\begin{aligned} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{s} &= (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{n}_s ds \\ &= (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{n}_F \times \vec{n}) ds \\ &= [\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{n}_F ds \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\int_{\Delta s} [\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{n}_F ds = \begin{cases} 0 & \text{ohne Oberflächenstrom} \\ \int_{\Delta s} \vec{k}_f \cdot \vec{n}_F ds & \text{mit Oberflächenstrom} \end{cases} \quad (3.9-126)$$

Da die Wahl der Testfläche Δf beliebig ist, muß gelten:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \begin{cases} 0 & \text{ohne Oberflächenstrom} \\ \vec{k}_f & \text{mit Oberflächenstrom} \end{cases} \quad (3.9-127)$$

Aus der Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ folgt die Übergangsbedingung der Normalenkomponente zweier magnetischer Medien. Zur Herleitung wählt man ein geeignetes Volumen, welches infinitesimal in beide Medien ragt (siehe Abbildung 2.37). Wertet man die Maxwell-Gleichung für dieses Volumen aus, so erhält man:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \nabla \cdot \vec{B} d^3 r = 0 \quad (3.9-128)$$

Mit dem Satz von Gauß folgt:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0 \quad (3.9-129)$$

Führt man gleichzeitig die Integration und die Grenzwertbildung aus, so erkennt man, daß nur die vordere und die hintere Deckelfläche einen Beitrag liefern:

$$\int_{\Delta f} \vec{B}_2 \cdot d\vec{f}_2 + \int_{\Delta f} \vec{B}_1 \cdot d\vec{f}_1 = 0 \quad (3.9-130)$$

Mit der Definition der Normalenrichtung \vec{n} erhält man:

$$\int_{\Delta f} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} df = 0 \quad (3.9-131)$$

Soll dies für beliebige Grenzflächen gelten, so muß gefordert werden:

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad (3.9-132)$$

bzw.

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (3.9-133)$$

3.10 Energiebetrachtung

Analog zum elektrischen Feld ist bekannt, daß die potentielle Energie eines magnetischen Feldes über die Energiedichte

$$\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (3.10-134)$$

berechnet werden kann.

Auf die Herleitung der Energiedichte des magnetischen Feldes wird in Kapitel 6.5 eingegangen.

Vergleicht man die Energiedichte des elektrischen Feldes mit der des magnetischen Feldes, so ergibt sich für die Dimension:

$$\left[\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{VAs}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad (3.10-135)$$

$$\left[\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] = \frac{\text{Am}}{\text{Vs}} \left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right)^2 = \frac{\text{VAs}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad (3.10-136)$$

Die Dimensionen sind also gleich und entsprechen in beiden Fällen einer Energie pro Volumen.

3.11 Lernziele Kapitel 3

Wissen,

1. welche praktischen Versuche die Grundphänomene der Magnetostatik zeigen,
2. wie die magnetische Kraft definiert ist und was sie bewirkt,
3. wie das magnetische Feld definiert ist und wie dieses mit der elektrischen Kraft zusammenhängt,
4. wie Stromdichten definiert sind,
5. was es für Stromdichten und Stromverteilungen gibt,
6. wie die verschiedenen Stromverteilungen als Stromdichten beschrieben werden,
7. wie das Biot-Savart Gesetz definiert ist,
8. was die Integrale des Gesetzes von Biot-Savart löst,
9. wie die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik lauten,
10. was das Biot-Savart-Gesetz aussagt,
11. wann das Gesetz von Biot-Savart anwenden werden kann,
12. wie die Grundgleichungen der Magnetostatik lauten,
13. was ein Vektorpotential ist und welche Eigenschaften es besitzt,
14. wie das Magnetfeld einfacher Stromverteilungen berechnet wird!
15. wie einfache magnetische Felder skizziert werden können,
16. wie der magnetische Elementardipol definiert ist,
17. wie sich die Stromdichte und das magnetische Feld eines Elementardipols berechnen läßt,
18. wie das magnetische Dipolmoment definiert ist,
19. was sich hinter dem Begriff Dipolnäherung verbirgt,
20. wie Kraft und Drehmoment des magnetischen Dipols definiert sind,
21. wie Kraft und Drehmoment auf einen Dipol verursacht werden,
22. wie ein Dipol reagiert, wenn auf ihn Kräfte und/oder Drehmomente wirken,
23. wie magnetische Dipole in den Maxwell Gleichungen dargestellt werden,
24. wie das magnetische Feld eines Dipols skizziert werden kann,
25. wie die magnetische Feldstärke definiert ist,
26. was ein lineares Medium ist,
27. was eine Oberflächenstromdichte ist,

28. wie allgemein die Übergangsbedingungen an der Grenze verschiedener magnetischer Medien lauten,
29. wie die Energie des magnetischen Feldes definiert ist,
30. wie man Felder von Stromdichteverteilungen ohne das Gesetz von Biot-Savart berechnet.

4 Zusammenfassung statischer Feldprobleme

Vor dem Einstieg in die Elektrodynamik werden zuerst noch einmal alle Ergebnisse der Elektrostatik und Magnetostatik zusammen gefaßt und dann in Kapitel 5 einige Anwendungsbeispiele vorgeführt. Anschließend werden in Kapitel 6 mit der Zeitabhängigkeit der elektrischen und magnetischen Felder diese Gleichung um die Dynamik erweitert.

4.1 Zusammenfassung Elektrostatisches Feld

Ladung:

$$Q \quad [Q] = \text{As} = \text{Cb} \quad (4.1-1)$$

Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV} \quad [\rho] = \frac{\text{As}}{\text{m}^3} \quad (4.1-2)$$

Beispiel Punktladung:

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (4.1-3)$$

elektrischer Feldvektor:

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad [\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4.1-4)$$

Die Gleichungen der Elektrostatik:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (4.1-5)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (4.1-6)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (4.1-7)$$

$$-\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.1-8)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (4.1-9)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (4.1-10)$$

elektrischer Punktdipol (Abbildung 4.1), beschrieben durch Dipolmoment:

$$\vec{p} \quad [\vec{p}] = \text{Asm} \quad (4.1-11)$$

Raumladungsdichte ρ einer Dipoldichte \vec{P} :

$$\rho_D(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (4.1-12)$$

Dipoldichte \vec{P} eines Punktdipols \vec{p} , auch Polarisation genannt:

$$\vec{P} = \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (4.1-13)$$

Ladungsdichte allgemein:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (4.1-14)$$

Einführung der Hilfsgröße \vec{D} , auch dielektrische Verschiebungsdichte genannt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} &= \rho_f \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f \end{aligned} \quad (4.1-15)$$

Kraftdichte \vec{f} und Kraft \vec{F} einer Ladungsverteilung ρ im Feld:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} \quad (4.1-16)$$

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{E} d^3r \quad (4.1-17)$$

Kraft auf Punktladung:

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (4.1-18)$$

Kraft auf einen Dipol:

$$\vec{F}_D = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D} \quad (4.1-19)$$

Drehmoment eines Dipols:

$$\vec{T} = \underbrace{\vec{r}_D \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D}}_{\text{Drehung um Ursprung}} + \underbrace{\vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_D)}_{\text{Drehung um eigenen Mittelpunkt}} \quad (4.1-20)$$

Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (4.1-21)$$

Übergangsbedingungen:

tangential:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (4.1-22)$$

normal:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \begin{cases} \sigma_f & \text{wenn eine Oberflächenladung existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1-23)$$



Abbildung 4.1: elektrischer Dipol mit Dipolmoment \vec{p}

4.2 Zusammenfassung magnetostatisches Feld

Strom:

$$I \quad [I] = \text{A} \quad (4.2-24)$$

Beispiel Kirchhoff'sche Regel:

$$\sum_K I_K = 0 \quad (4.2-25)$$

Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{dI}{dA} \quad [\vec{j}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (4.2-26)$$

magnetischer Feldvektor:

$$\vec{B}(\vec{r}) \quad [\vec{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad (4.2-27)$$

Die Gleichungen der Magnetostatik:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (4.2-28)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2-29)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.2-30)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.2-31)$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (4.2-32)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (4.2-33)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (4.2-34)$$

magnetischer Punktdipol (siehe Abbildung 4.2):

$$\vec{m} \quad [\vec{m}] = \text{Am}^2 \quad (4.2-35)$$

Stromdichte einer magnetischen Dipoldichte \vec{M} , auch Magnetisierung genannt:

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (4.2-36)$$

Dipoldichte \vec{M} eines Punktdipols \vec{m} :

$$\vec{M} = \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_D) \quad (4.2-37)$$

Stromdichte allgemein:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_f(\vec{r}) + \nabla \times \vec{M} \quad (4.2-38)$$

Einführung der Hilfsgröße \vec{H} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \\ \Rightarrow \nabla \times \left(\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}_{\vec{H}} \right) &= \vec{j}_f \\ \Rightarrow \nabla \times \vec{H} &= \vec{j}_f \end{aligned} \quad (4.2-39)$$

Kraftdichte \vec{f} und Kraft \vec{F} auf einen Teststrom \vec{j} im Feld:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (4.2-40)$$

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} d^3r \quad (4.2-41)$$

Beispiel Kraft auf Stromleiter:

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \Delta x \quad (4.2-42)$$

Kraft auf einen Dipol \vec{m} :

$$\vec{F} = \nabla \left(\vec{m} \cdot \vec{B} \right) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D} \quad (4.2-43)$$

Drehmoment auf einen Dipol \vec{m} :

$$\vec{T} = \underbrace{\vec{r}_D \times \nabla \left(\vec{m} \cdot \vec{B} \right) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_D}}_{\text{Drehung um den Ursprung}} + \underbrace{\vec{m} \times \vec{B}(\vec{r}_D)}_{\text{Drehung um den eigenen Mittelpunkt}} \quad (4.2-44)$$

Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (4.2-45)$$

Übergangsbedingungen:

tangential:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \begin{cases} 0 & \text{im Normalfall} \\ \vec{k}_f & \text{wenn Oberflächenströme fließen} \end{cases} \quad (4.2-46)$$

normal:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) = 0 \quad (4.2-47)$$



Abbildung 4.2: magnetischer Dipol mit Dipolmoment \vec{m}

4.3 Die Hilfsgrößen \vec{D} und \vec{H}

Die beiden Hilfsgrößen \vec{D} und \vec{H} unterscheiden sich in ihren Definitionen vor allem in einer Eigenschaft sehr grundlegend. Die Polarisation \vec{P} wird zur Bildung des \vec{D} -Feldes zum elektrischen Feld addiert, wohingegen die Magnetisierung \vec{M} zur Bildung des \vec{H} -Feldes vom magnetischen Feld subtrahiert wird:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Was das physikalisch bedeutet kann man besser an den beiden folgenden Maxwell-Gleichungen erkennen:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \end{aligned}$$

An diesen beiden Gleichungen erkennt man den gravierenden Unterschied: bei polarisierbaren Materialien im elektrischen Feld $\Rightarrow \vec{E}$ wird dieses kleiner (negatives Vorzeichen), im Gegensatz zu magnetisierbaren Materialien im magnetischen Feld $\Rightarrow \vec{B}$ wird dieses größer (positives Vorzeichen).

Das bedeutet also, wenn man ein magnetisierbares Material ins magnetische Feld einbringt, dann verstärkt sich die Feldenergie, wenn man aber ein polarisierbares Material ins elektrische Feld einbringt, dann schwächt es die Feldenergie ab.

In der Realität hat dies eine Auswirkung auf die Art der elektrischen Maschinen, die man baut und verwendet. Aufgrund der oben genannten Gründe werden elektrische Maschinen auf der Basis magnetischer Phänomene realisiert. Es ist einfach ein Material ins Feld einzubringen, um dadurch die Energie des Systems zu erhöhen. Eine entsprechende Möglichkeit gibt es für eine Maschine elektrischer Natur nicht. Auch hat man bei Maschinen auf der Basis magnetischer Phänomene die Möglichkeit, das Feld dadurch zu erhöhen, indem man ein paar Stromwicklungen mehr verwendet. Im Falle einer elektrischen Maschine müßte man es irgendwie schaffen, mehr Ladung hin- und herzuschaukeln. Das das schwierig ist, soll folgende Skizze einer eventuell möglichen Maschine elektrischer Natur darstellen.

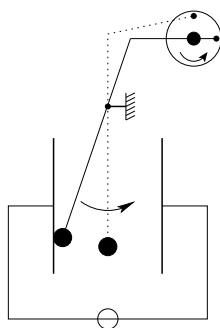


Abbildung 4.3: Maschine auf der Basis elektrischer Phänomene

5 Lösungsmethoden für die Feldgleichungen

5.1 Allgemeine Lösungsmethoden

Aufgrund der Ähnlichkeit der Feldgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik wird hier vor allem auf Beispiele der Elektrostatik eingegangen. Die zu lösenden Gleichungen der Elektrostatik lauten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung findet man den Ansatz

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

und damit die Poisson-Gleichung:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho$$

Die Poisson-Gleichung wird dann durch das Coulomb-Integral gelöst:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Viele elektrostatische Problemstellungen sind mit Hilfe dieser Gleichungen beschreibbar und lösbar. Es gibt jedoch auch viele andere mathematische Methoden, mit welchen Problemstellungen angegangen werden können. Einige davon werden in den nächsten Kapiteln vorgestellt.

5.2 Das Potential einer geladenen Kugel

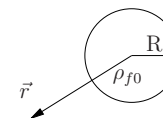


Abbildung 5.1: geladene Kugel mit Radius R

Gegeben sei eine Kugel mit der Ladungsdichte ρ_{f0} (Abbildung 5.1). Gesucht sei eine Beschreibung durch ein Feld. Um das Problem zu vereinfachen, werden zunächst folgende Annahmen gemacht:

- Das Problem ist statisch $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$
- Es treten keine Ströme auf $\Rightarrow \vec{j} \rightarrow 0$
- Es gibt weder Polarisierung noch Magnetisierung $\Rightarrow \vec{P} = 0$ und $\vec{M} = 0$

Daraus folgen die vereinfachten Maxwell-Gleichungen für dieses Beispiel:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_{f0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (5.2-1)$$

Aus der dritten und vierten Gleichung erkennt man, daß das magnetische Feld \vec{B} das des Vakuums ist, d.h. das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{B} sind entkoppelt. Aus der ersten und zweiten Gleichung kann man die Poisson-Gleichung herleiten (siehe Kapitel 5.1):

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho_{f0} \quad (5.2-2)$$

Setzt man die gegebene Raumladungsdichte ein, so erhält man:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \begin{cases} \rho_{f0} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie des Problems und der zu erwartenden radialen Abhängigkeit von $\phi = \phi(r)$ kann der Laplace-Operator wie folgt ausgewertet werden:

$$\nabla^2 \phi \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right)$$

Daher erhält man als Lösung:

$$\begin{aligned}-\varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) &= \begin{cases} \rho_{f0} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \\ \Rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) &= \begin{cases} \rho_{f0} r^2 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \\ -\varepsilon_0 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi &= \begin{cases} \frac{1}{3} \rho_{f0} r^3 + c_1 & r < R \\ c_2 & r > R \end{cases} \\ -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi &= \begin{cases} \frac{1}{3} \rho_{f0} r + \frac{c_1}{r^2} & r < R \\ \frac{c_2}{r^2} & r > R \end{cases} \\ -\varepsilon_0 \phi &= \begin{cases} \frac{1}{6} \rho_{f0} r^2 - \frac{c_1}{r} + c_3 & r < R \\ -\frac{c_2}{r} + c_4 & r > R \end{cases} \\ \phi &= \begin{cases} -\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{f0} r^2 + \frac{c_1}{r\varepsilon_0} - \frac{c_3}{\varepsilon_0} & r < R \\ \frac{c_2}{r\varepsilon_0} - \frac{c_4}{\varepsilon_0} & r > R \end{cases}\end{aligned}\quad (5.2-3)$$

Da aufgrund von Stetigkeit bei $r = 0$ keine Polstelle auftauchen darf, muß die Konstante $c_1 = 0$ gewählt werden. Im Unendlichen muß das Potential verschwinden, und daher:

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0$$

gelten. Aus dieser Bedingung läßt sich die Konstante c_4 bestimmen:

$$\begin{aligned}\phi(r \rightarrow \infty) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{c_2}{\varepsilon_0 r} - \frac{c_4}{\varepsilon_0} \right) = 0 \\ &= -\frac{c_4}{\varepsilon_0} = 0\end{aligned}$$

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{f0} r^2 - \frac{c_3}{\varepsilon_0} & r < R \\ \frac{c_2}{r\varepsilon_0} & r > R \end{cases}$$

Als eine weitere Randbedingung kann angenommen werden, daß am Rand der Kugel keine freien Ladungen auftreten können, deshalb muß gelten:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_0 \vec{E}(R^-) - \varepsilon_0 \vec{E}(R^+)) \cdot \vec{e}_r &= 0 \\ \Rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi(R^-) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi(R^+) &= 0\end{aligned}$$

Setzt man dies in die 4. Zeile von 5.2-3 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \rho_{f0} R &= \frac{c_2}{R^2} \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{1}{3} \rho_{f0} R^3\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{f0} r^2 - \frac{c_3}{\varepsilon_0} & r < R \\ \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_{f0} \frac{R^3}{r} & r > R \end{cases}$$

Zur Bestimmung der verbliebenen Konstanten c_3 wird die Übergangsbedingung am Rand der geladenen Kugel betrachtet. Dort muß gelten:

$$\phi(R^-) = \phi(R^+)$$

Setzt man dies ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{f0} R^2 - \frac{c_3}{\varepsilon_0} &= \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_{f0} R^2 \\ \Rightarrow c_3 &= -\frac{1}{2} \rho_{f0} R^2\end{aligned}$$

Damit erhält man das Potentials der geladenen Kugel:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_{f0} r^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho_{f0} R^2 & r < R \\ \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_{f0} \frac{R^3}{r} & r > R \end{cases}\quad (5.2-4)$$

5.3 Methode der Spiegelladung

Zur Lösung vieler elektrostatischer Probleme dient das Coulomb-Integral:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (5.3-5)$$

Trotzdem ist eine explizite Berechnung nicht immer möglich, da Ladungen von Feldern verschoben werden können. Dies führt auf den Begriff des Leiters. Befindet sich zum Beispiel eine Ladung $\rho(\vec{r})$ vor einer metallischen Wand, so kennt man nur die vorhandene Ladung $\rho(\vec{r})$, aber nicht die Ladungsverteilung auf dem Metall. Aufgrund der Leitfähigkeit von Metallen können freie Ladungsträger verschoben werden und so eine unbekannte Ladungsverteilung auf dem Leiter einstellen. Damit kann das Coulomb-Integral nicht mehr so einfach verwendet werden. Man stellt sich nun die elektrostatische "Welt" aus Ladungen und Metallen vor, dabei ist dann üblicherweise die Ladungsdichte ρ_{Ladung} bekannt, und ρ_{Metall} zunächst unbekannt. Wichtig ist dabei, wie die Ladung ρ_{Metall} wirklich aussieht.

Zunächst muß aber noch klar gestellt werden, daß das Modell des Metalls, das eines idealen Leiters ist. Somit ist der Leiter im Inneren feldfrei. Daher ist das Potential ϕ im Leiterinneren konstant und ebenso auf der Oberfläche. Deshalb spricht man bei Metalloberflächen von Äquipotentialflächen. Weiterhin steht das elektrische Feld \vec{E} am Rand senkrecht zur Oberfläche.

Zur Beschreibung verwendet man daher das folgende Modell:

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \nabla^2 \phi &= \rho && \text{für alle Nichtmetallgebiete} \\ \phi|_{\text{Rand}} &= \text{const.} = 0 && \text{auf allen Metallen} \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

Die nachfolgend vorgestellte Methode zur Berechnung des Potentials dient lediglich als Hilfsmittel zur Berechnung und entspricht nicht der Realität im Leiter. Das Beispiel in

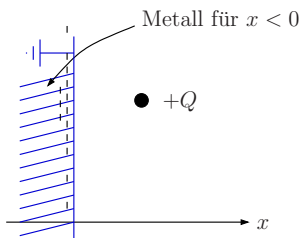


Abbildung 5.2: Punktladung $+Q$ vor einer geerdeten metallischen Wand

Abbildung 5.2 beschreibt eine Ladung, die am Punkt $\vec{r}_Q = x_Q \vec{e}_x$ sitzt, die Randbedingung ist mit $\phi = \phi_{\text{Metall}}$ gegeben, welches die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho = Q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (5.3-7)$$

Neben der komplizierten mathematischen Lösung des Coulomb-Integrals gibt es nun noch eine weitere komfortablere Möglichkeit, nämlich die Methode der Spiegelladung oder das Spiegelladungsprinzip.

Man wählt den Ansatz:

$$\text{gesuchtes Potential} = \text{Potential (gegebene Punktladung)} + \text{Potential (Spiegelladung)}$$

Man setzt im Metall eine fiktive zweite Ladung an, welche die Randbedingung am Metall bezüglich der Ladungsverteilung im freien Raum darstellt. Im Falle einer Punktladung vor einer ebenen Wand dient dazu eine gleich große Punktladung im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Wand, jedoch mit umgedrehten Vorzeichen (siehe Abbildung 5.3). Diese so genannte Spiegelladung liefert auf dem Rand genau den gleichen Betrag des Potentials, nur mit dem umgekehrten Vorzeichen. Addiert man beide Anteile auf, so ergibt sich das gesuchte Potential am Rand.

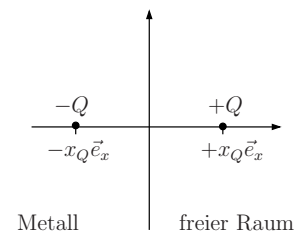


Abbildung 5.3: Prinzip der Spiegelladung

Für das Beispiel in Abbildung 5.2 lautet demnach die Lösung nach dem Spiegelladungsprinzip:

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - x_Q \vec{e}_x|} - \frac{Q}{|\vec{r} + x_Q \vec{e}_x|} \right) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (5.3-8)$$

Es wurde also wie zuvor beschrieben, symmetrisch zur Kante der metallischen Wand (bei $x = 0$), eine zweite Ladung $-Q$ am Ort $-x_Q$ angenommen (siehe Abbildung 5.3). Durch Supersosition der Potentiale beider Ladungen ergibt sich das Gesamtpotential für den Raum $x > 0$ (siehe Abbildung 5.4). Für $x < 0$ gilt aufgrund der Stetigkeit des Potentials $\phi = 0$. Die Spiegelladung ist also wirklich nur eine fiktive Ladung im Metall, die nur in nichtmetallischen Gebieten wirkt.

In kartesischen Koordinaten lautet das Ergebnis für $x > 0$:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + x_Q)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (5.3-9)$$

Nun kann man noch die tatsächlich induzierte Ladungsverteilung auf dem Rand des Metalls berechnen. Diese Ladungsverteilung ist nicht automatisch vorgegeben, sondern

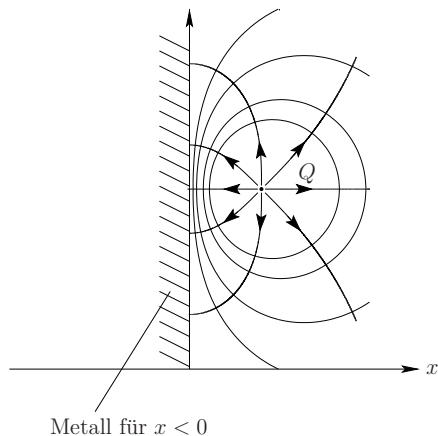


Abbildung 5.4: Potential und Feld einer Ladung Q vor einer metallischen Wand

kann nur durch eine Lösung des Potentials oder des elektrischen Feldes im Nachhinein angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_2) \Big|_{x=0} &= \sigma_f \\
 \Rightarrow \vec{e}_x \cdot \varepsilon_0 \vec{E}_1 \Big|_{x=0} &= \sigma_f \\
 \Rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \phi \Big|_{x=0} &= \sigma_f \\
 \Rightarrow \sigma_f &= -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{-(x-x_Q)}{\sqrt{(x-x_Q)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{-(x+x_Q)}{\sqrt{(x+x_Q)^2 + y^2 + z^2}} \right) \Big|_{x=0} \\
 \Rightarrow \sigma_f &= -\frac{1}{2\pi} \frac{Qx_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y^2 + z^2}}
 \end{aligned} \tag{5.3-10}$$

Aus diesem Ergebnis kann man nun noch die Gesamtladung auf der Metalloberfläche berechnen. Da es sich um eine Flächenladung handelt, die symmetrisch in der $y - z$ -Ebene liegt, werden spezielle Polarkoordinaten eingeführt:

$$\begin{aligned}
 y &= \xi \cos \varphi \\
 z &= \xi \sin \varphi \\
 dy dz &= \xi d\xi d\varphi \\
 \xi &: 0 \dots \infty \\
 \varphi &: 0 \dots 2\pi
 \end{aligned} \tag{5.3-11}$$

Mit diesen neuen Koordinaten ergibt sich die Gesamtladung auf der Metalloberfläche:

$$\begin{aligned}
 Q_F &= -\frac{Qx_Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x_Q^2 + y^2 + z^2}} dy dz \\
 &= -\frac{Qx_Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x_Q^2 + \xi^2}} \xi d\xi d\varphi \\
 &= \frac{Qx_Q}{2\pi} 2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{x_Q^2 + \xi^2}} \right]_0^{\infty} \\
 &= -Q
 \end{aligned} \tag{5.3-12}$$

Leider ist die Methode der Spiegelladung nicht universal anwendbar, sie unterliegt folgenden Einschränkungen:

- korrekt nur für exakt gerade Fläche
- oder andere hochsymmetrische Anordnungen (Ecke, Kugel, Zylindermantel)
- trotzdem anwendbar, wenn der Abstand der Punktladung klein gegen die Krümmung der Fläche ist

Auch komplexere Ladungsverteilungen sind zur Berechnung mit dieser Methode geeignet, sofern die Bedingungen vorher eingehalten werden. Vorstellbar sind daher auch Linienladungen oder Dipole vor einer metallischen Wand.

Ein weiteres Beispiel wäre ein geladenes Teilchen, welches sich in einer metallischen Röhre (siehe Abbildung 5.5) bewegt. Die Überwindung der Spiegelladungsanziehung würde zur korrekten Berechnung der Austrittsarbeit führen.

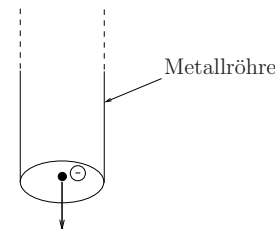


Abbildung 5.5: Elektron in metallischer Röhre

Allgemein kann man für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ vor einer Metallwand in

der $y - z$ -Ebene formuliert werden:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dz' dy' dx' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dz' dy' dx' \end{aligned} \quad (5.3-13)$$

Wenn man will, kann man dieses Integral auch mit Hilfe einer Greenschen Funktion ausdrücken:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) \rho(x', y', z') dz' dy' dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, x', y', z') \rho(x', y', z') dz' dy' dx' \end{aligned} \quad (5.3-14)$$

Die Greensche Funktion $G(x, y, z, x', y', z')$ beschreibt dabei die Antwort des Halbraumes auf die Ladungsverteilung $\rho(x', y', z')$.

Ein anderes, einfach zu berechnendes Beispiel ist die Spiegelung an der metallischen Kugel. In diesem Fall bringt man im Kugellinneren eine geeignete Spiegelladung an, so wie

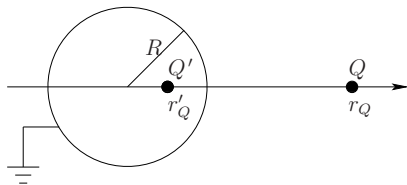


Abbildung 5.6: Spiegelung an der Kugel

dies in Abbildung 5.6 dargestellt ist. Addiert man die Potentiale der gegebenen Ladung Q und der Spiegelladung Q' auf, so ergibt sich das Potential:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_Q|} \quad (5.3-15)$$

Am Rand der Kugel gilt dann:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{R} - \vec{r}_Q|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|\vec{R} - \vec{r}'_Q|} \quad (5.3-16)$$

Der Vektor \vec{R} beschreibt dabei Punkte auf der Kugeloberfläche. Durch Auswerten der Gleichung an zwei ausgewählten Punkten, erhält man die Lösung für \vec{r}'_Q und Q' .

Nimmt man an, daß die beiden Ladungen auf der x -Achse liegen, so ergibt sich für die beiden Gleichungen folgende Darstellung:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - r_Q \vec{e}_x|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|\vec{r} - r'_Q \vec{e}_x|} \quad (5.3-17)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{R} - r_Q \vec{e}_x|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|\vec{R} - r'_Q \vec{e}_x|} \quad (5.3-18)$$

Wählt man für die beiden speziellen Punkte zur Bestimmung der gestrichenen Variablen

$$\vec{R}_1 = R \vec{e}_x$$

und

$$\vec{R}_2 = -R \vec{e}_x$$

so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von r'_Q und Q' :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|R \vec{e}_x - r_Q \vec{e}_x|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|R \vec{e}_x - r'_Q \vec{e}_x|} \\ 0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|-R \vec{e}_x - r_Q \vec{e}_x|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{|-R \vec{e}_x - r'_Q \vec{e}_x|} \end{aligned} \quad (5.3-19)$$

Diese ergeben sich nach einer kurzen Umformung zu:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\sqrt{(R - r_Q)^2}} &= \frac{Q'}{\sqrt{(R - r'_Q)^2}} \\ \frac{Q}{\sqrt{(R + r_Q)^2}} &= \frac{Q'}{\sqrt{(R + r'_Q)^2}} \end{aligned}$$

Löst man beide Gleichungen nach Q auf und setzt sie gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(R - r_Q)^2}}{\sqrt{(R - r'_Q)^2}} &= \frac{\sqrt{(R + r_Q)^2}}{\sqrt{(R + r'_Q)^2}} \\ \Rightarrow \frac{R - r_Q}{R - r'_Q} &= \pm \frac{R + r_Q}{R + r'_Q} \end{aligned}$$

Für den Fall des positiven Vorzeichens erhält man:

$$r'_Q = r_Q$$

Setzt man dies in eine der Gleichungen 5.3-19 ein, so erhält man

$$Q' = -Q$$

Da diese Lösung für die Spiegelladung nicht innerhalb der Kugel liegt und außerdem die gegebene Ladung neutralisieren würde, kann es sich nicht um die gesuchte Lösung handeln. Deshalb muß

$$\frac{R - r_Q}{R - r'_Q} = -\frac{R + r_Q}{R + r'_Q}$$

zum Ergebnis führen.

Multipliziert man diese Gleichung aus, so erhält man:

$$r'_Q = \frac{R^2}{r_Q}$$

Setzt man dies in die erste der Gleichungen in 5.3-19 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \frac{\sqrt{\left(R - \frac{R^2}{r_Q}\right)^2}}{\sqrt{(R - r_Q)^2}} \\ &= Q \frac{\sqrt{\frac{R^2}{r_Q^2} (r_Q - R)^2}}{\sqrt{(R - r_Q)^2}} \\ &= Q \sqrt{\frac{R^2}{r_Q^2}} \\ &= \pm Q \frac{R}{r_Q} \end{aligned}$$

Durch erneutes Einsetzen erkennt man, daß nur

$$Q' = -Q \frac{R}{r_Q}$$

die Lösung sein kann, damit das Potential auf der Kugeloberfläche gleich Null ist. Damit erhält man das Potential einer Punktladung vor einer metallischen Kugel mit:

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} - \frac{RQ}{|\vec{r}_Q| |\vec{r} - \frac{R^2}{|\vec{r}_Q|} \frac{\vec{r}_Q}{|\vec{r}_Q|}|} \right) & \text{für } r > R \end{cases}$$

5.4 Poisson-Gleichung auf berandeten Gebieten

Gegeben ist im Allgemeinen ein Gebiet V mit dem Rand ∂V (siehe Abbildung 5.7). Von diesem sei die Ladungsverteilung ρ im Inneren bekannt. Weiterhin gilt eine Randbedingung. Mögliche Randbedingungen wären z.B. eine

- Dirichlet Bedingung:

$$\phi = \phi|_{\text{Rand}} \tag{5.4-20}$$

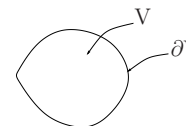


Abbildung 5.7: Volumen mit Oberfläche

- oder eine Neumann Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi|_{\text{Rand}} = 0 \tag{5.4-21}$$

Ebenfalls soll das Potential ϕ im Unendlichen verschwinden:

$$\phi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0 \tag{5.4-22}$$

Bei der Überlegung der Randbedingung darf nicht vergessen werden, daß das "Unendliche" zum Rand gehört.

Abbildung 5.4 in Kapitel 6.2 zeigt eine mögliche Situation, den Spezialfall einer Punktladung vor einer metallischen Wand.

Zu dieser allgemeinen Formulierung der Aufgabenstellung wird im Folgenden gezeigt,

1. es gibt eine Lösung und
2. es gibt keine weitere Lösung.

Das heißt, im Folgenden werden Existenz und Eindeutigkeit gezeigt (siehe Kapitel 5.5).

Problem: Lösung im konkreten Fall ausrechnen \Rightarrow verschiedene Lösungsverfahren

Wendet man sich nun dem Beispiel aus Abbildung 5.9 zu, ist die zweidimensionale Laplace-Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi \right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4-23}$$

Hierzu bieten sich verschiedene Möglichkeiten zur Erarbeitung der Lösung an. Zum einen kann man das Problem zeichnerisch lösen. Ebenfalls ist es möglich, die Lösung für einen bestimmten Bereich zu bestimmen. Prinzipiell kann man versuchen, das Problem exakt zu lösen, allerdings ist es in der Praxis meist kompliziert und führt auf unbekannte Funktionen. Daher entwickelt man in letztem Fall die Funktionen in unendliche Reihen. Eine andere Methode zur exakten Lösung ist mit Hilfe der konformen Abbildung ($x+iy \equiv z$) gegeben. Als letztgenannte Methode sei die Numerik erwähnt, die auf Programme wie Mathematica, Matlab oder MAFIA zurückgreift.

Aufgrund dieser vielen verschiedenen Lösungsmöglichkeiten wird nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

5.5 Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Dirichlet-Probleme

Gegeben ist das Gebiet V mit dem Rand ∂V . In V ist eine Ladungsdichte ρ gegeben, und auf ∂V ein Randwert ϕ_R . Dieses Problem kann mit der Poisson-Gleichung gelöst werden.

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi &= \rho \\ \phi|_{\text{Rand}} &= \phi_R \end{aligned} \quad (5.5-24)$$

Zuerst soll die Eindeutigkeit gezeigt werden. Nimmt man an, daß das Poisson-Problem zwei Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 hat, müßten diese die Poisson-Gleichung wie folgt lösen

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi_1 &= \rho \\ -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi_2 &= \rho \end{aligned} \quad (5.5-25)$$

Aufgrund der Linearität der Poisson-Gleichung ergibt sich durch Subtraktion:

$$\Rightarrow -\varepsilon_0 \nabla^2 \underbrace{(\phi_2 - \phi_1)}_{\delta\phi} = 0 \quad (5.5-26)$$

Für die Randbedingungen muß daher gelten:

$$\begin{aligned} \phi_1|_{\text{Rand}} &= \phi_R \\ \phi_2|_{\text{Rand}} &= \phi_R \\ \Rightarrow \underbrace{\phi_2|_{\text{Rand}} - \phi_1|_{\text{Rand}}}_{\delta\phi|_{\text{Rand}}} &= 0 \\ \delta\phi|_{\text{Rand}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5-27)$$

Man erhält somit das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \delta\phi &= 0 \\ \delta\phi|_{\text{Rand}} &= 0 \end{aligned}$$

Zunächst multipliziert man diese Differentialgleichung mit $\delta\phi$ und integriert über den gesamten Raum:

$$0 = - \int_V \delta\phi \nabla^2 \delta\phi \, d^3r \quad (5.5-28)$$

Mit dem vektoranalytischen Zusammenhang

$$\nabla \cdot (\delta\phi \nabla \delta\phi) = \nabla \delta\phi \cdot \nabla \delta\phi - \delta\phi \nabla^2 \delta\phi \quad (5.5-29)$$

kann das Integral umformuliert werden. Mit Hilfe des Green'schen Theorems erhält man dann:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_V \nabla \cdot (\delta\phi \nabla \delta\phi) \, d^3r + \int_V \nabla \delta\phi \cdot \nabla \delta\phi \, d^3r \\ &= - \underbrace{\int_{\partial V} \delta\phi \nabla \delta\phi \, d^2\vec{r}}_{=0, \text{ wegen RB}} + \int_V \underbrace{(\nabla \delta\phi)^2}_{\geq 0} \, d^3r \end{aligned} \quad (5.5-30)$$

Der Oberflächenterm verschwindet, weil $\delta\phi$ am Rand vorgegeben ist. Da der Term $(\nabla \delta\phi)^2$ immer größer gleich null ist, muß gelten:

$$\nabla \delta\phi = 0 \quad (5.5-31)$$

Daraus ergibt sich wegen der Randbedingungen

$$\delta\phi = \text{const.} = 0$$

und damit für die beiden Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 :

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (5.5-32)$$

Die Poisson-Gleichung liefert demnach, wenn überhaupt, eine eindeutige Lösung. Es existiert also maximal eine Lösung.

Nun gilt es noch, die Existenz der Lösung zu zeigen, d. h. das Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi &= \rho \\ \phi|_{\text{Rand}} &= \phi_R \end{aligned} \quad (5.5-33)$$

hat (mindestens) eine Lösung. ϕ ist eine solche Lösung.

Zum Beweis, daß dieses Problem mindestens eine Lösung besitzt, wird eine Extremwertaufgabe formuliert. Methoden zur Charakterisierung von Feldern durch Extremalprinzipien basieren auf der Variationsrechnung. Bekannt ist, daß jedem Feld eine Energie zugeordnet ist:

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \rho \Phi \right) d^3r = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\nabla \Phi)^2 - \rho \Phi \right) d^3r \quad (5.5-34)$$

Dieses Energiefunktional setzt sich aus der Feldenergie $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$ und der potentiellen Energie $\rho \Phi$ zusammen. Man kann zeigen, daß der Potentialverlauf, bei dem sich das Minimum der im Feld gespeicherten Energie einstellt, der Lösung des Potentialproblems entspricht.

Angenommen Φ sei die Lösung, dann werden nun benachbarte Funktionen der Form $\Phi + \lambda \tilde{\Phi}$ betrachtet. $\tilde{\Phi}$ ist dabei eine Störung bezüglich der Lösung ϕ . Für $\lambda = 0$ erhält man wieder die ungestörte Funktion. Aus der Dirichlet Randbedingung $\Phi|_{\partial V} = \Phi_{\text{Rand}}$ ergibt sich für die Störung $\tilde{\Phi}$ die Randbedingung:

$$\tilde{\Phi}|_{\partial V} = 0$$

Setzt man dies in die allgemeine Gleichung für die Energie W ein, so ergibt sich:

$$W = \int_V \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\nabla (\Phi + \lambda \tilde{\Phi}) \right)^2 - \rho \left(\Phi + \lambda \tilde{\Phi} \right) \right] d^3r := f(\lambda) \quad (5.5-35)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß mit $\vec{E} = -\nabla \Phi$ gilt:

$$\vec{E}^2 = (\nabla \Phi)^2$$

Wertet man diese Gleichung weiter aus, so erhält man die Energie als Funktion von $f(\lambda)$. Es muß nun gezeigt werden, daß $f(\lambda)$ ein Minimum hat, wenn die Poisson-Gleichung gilt (siehe Abbildung 5.8). Für $f(\lambda)$ gilt:

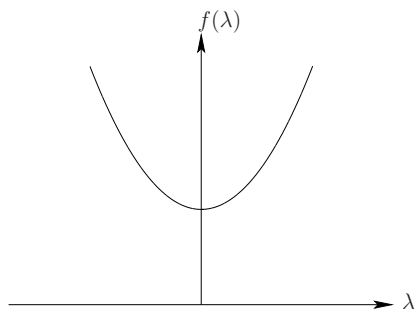


Abbildung 5.8: Minimum der Feldenergie

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= \int_V \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - \rho \Phi \right] d^3r + \int_V \left[\varepsilon_0 \lambda \nabla \Phi \nabla \tilde{\Phi} - \rho \lambda \tilde{\Phi} \right] d^3r \\
 &\quad + \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \lambda^2 (\nabla \tilde{\Phi})^2 d^3r \\
 &= a + b\lambda + c\lambda^2 \\
 &= a - \frac{b^2}{4c} + c \left(\lambda + \frac{b}{2c} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.5-36}$$

Dabei handelt es sich um eine Parabelgleichung. Der Scheitelpunkt dieser Parabel liegt bei $\frac{b}{2c}$. Wie zu Anfang erwähnt, muß nun das lokale Minimum für $\lambda = 0$ auftauchen, damit Φ die Lösung des Problems darstellt. Durch eine separate Betrachtung von a , b und c kann dieses geforderte Ergebnis überprüft werden.

Der konstante Ausdruck $a - \frac{b^2}{4c}$ ist für ein lokales Minimum unerheblich. Die Variable c muß positiv sein, dies gilt, da $(\nabla \tilde{\Phi})^2$ immer größer gleich Null ist. Und für die Variable b muß $b = 0$ gefordert werden, damit keine Verschiebung der Parabel auftaucht und $\lambda = 0$ das lokale Minimum darstellt. Dies ist erfüllt, da gilt:

$$\begin{aligned}
 b &= \int_V \left[\varepsilon_0 \nabla \Phi \nabla \tilde{\Phi} - \rho \tilde{\Phi} \right] d^3r \\
 &= \int_V \left[-\varepsilon_0 \nabla^2 \Phi \tilde{\Phi} + \nabla(\varepsilon_0 \nabla \Phi \tilde{\Phi}) - \rho \tilde{\Phi} \right] d^3r \\
 &= \int_V \underbrace{\tilde{\Phi} (\varepsilon_0 \nabla^2 \Phi - \rho)}_{=0} d^3r + \underbrace{\int_{\partial V} \varepsilon_0 \nabla \Phi \tilde{\Phi} d^2\vec{r}}_{=0, \text{ wegen RB}} = 0
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die Energie W genau ein Minimum bei $\lambda = 0$ besitzt. Die Lösung dieses Minimums ist Φ mit:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \Phi = \rho \tag{5.5-37}$$

Damit ist gezeigt, daß eine Lösung existiert. Mit dem Beweis, daß nur eine Lösung existiert sind damit Existenz und Eindeutigkeit gezeigt.

5.6 Das Neumann Problem

Dieser Aufgabentyp ist durch die Poisson-Gleichung und einer Ableitungsbedingung am Rand gegeben:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho \quad \text{in } V \tag{5.6-38}$$

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial V} = \frac{\partial}{\partial n} \phi|_{\partial V} = V' \quad \text{auf } \partial V \tag{5.6-39}$$

Dieser Aufgabentyp hat Lösungen, die sich nur um Konstanten zur Lösung des entsprechenden Dirichlet-Problems unterscheiden. Er führt also auch auf ein eindeutiges Feld, da gilt $\vec{E} = -\nabla \phi$. Eine spezielle Lösungsmethode für Probleme dieser Art kann nicht angegeben werden. Die Methoden die bei der Berechnung von Dirichlet-Problemen zu einem Ergebnis führen, funktionieren auch hier. Die Randbedingung kann über die Übergangsbedingung

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)|_{\partial V} &= \sigma_f \\
 -\vec{n} \cdot (\nabla \phi_1 - \nabla \phi_2)|_{\partial V} &= \sigma_f
 \end{aligned}$$

ausgewertet werden.

Existenz und Eindeutigkeit können auf analoge Weise zum Beweis bezüglich des Dirichlet Problems gezeigt werden. Der Unterschied ist lediglich, daß die Oberflächenintegrale wegen $\frac{\partial}{\partial n} \delta \Phi|_{\text{Rand}} = \dots$ verschwindet.

5.7 Äquipotentialflächen und Feldlinien einer Ladungsverteilung

Äquipotentialflächen sind Flächen konstanten Potentials im betrachteten Raumgebiet. Mit der Bedingung

$$\phi(\vec{r}) = c \tag{5.7-40}$$

hält man das Potential für verschiedene Werte c fest und erhält dann eine Bedingung zur Berechnung der zugehörigen Fläche.

Zur Berechnung der Feldlinien des Vektorfeldes \vec{A} verwendet man die Bedingung:

$$d\vec{r} \times \vec{A} = 0 \tag{5.7-41}$$

Diese Gleichung beschreibt ein Stückchen Weg $d\vec{r}$ entlang der Feldlinie und setzt durch die Kreuzmultiplikation mit dem Feld \vec{A} alle Richtungsanteile senkrecht zur Feldlinie zu Null. Damit läuft der Ausdruck $d\vec{r}$ entlang der Feldlinien und man erhält eine Bedingung zur Berechnung der Feldlinien.

Eine etwas günstigere Bedingungsgleichung zur Berechnung der Feldlinien lautet:

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} \times \vec{A} = 0 \tag{5.7-42}$$

Diese Bedingung zeigt sofort die Eigenschaft einer Linie, daß sie nämlich nur von einem Parameter abhängt. Beide Gleichungen bedeuten aber das gleiche.

Durch Auswerten dieser Ansätze erhält man dann Bestimmungsgleichungen, mit denen man dann die Äquipotentialflächen und die Feldlinien konstruieren kann.

Beispiel: Gegeben sei eine Punktladung Q im Koordinaten-Ursprung.

Nach der Berechnung in Kapitel 2.4.1 erhält man für diese Anordnung das elektrostatische Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (5.7-43)$$

und das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (5.7-44)$$

Zur Berechnung der Äquipotentialflächen setzt man nun das Potential gleich einer Konstanten c :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = c \quad (5.7-45)$$

Durch Auflösen nach r :

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{c} \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (5.7-46)$$

erhält man die Äquipotentialflächen mit konstantem Radius r und beliebigen Winkeln ϑ und φ , also Kugeloberflächen.

Zur Berechnung der Feldlinien verwendet man nun den Ansatz

$$d\vec{r} \times \vec{E} = 0 \quad (5.7-47)$$

Das Differential $d\vec{r}$ lautet in Kugelkoordinaten

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin\vartheta d\varphi \quad (5.7-48)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 5.7-47 erhält man:

$$\begin{aligned} d\vec{r} \times \vec{E} &= (\vec{e}_r dr + \vec{e}_\vartheta r d\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin\vartheta d\varphi) \times \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right) \\ &= -\vec{e}_\varphi r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\vartheta + \vec{e}_\vartheta r \sin\vartheta \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\varphi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.7-49)$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften des Kugelkoordinatensystems erhält man daraus zwei separate Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\vartheta &= 0 \\ r \sin\vartheta \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.7-50)$$

die nun noch gelöst werden müssen. Für beliebige r und ϑ erhält man damit die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\vartheta &= 0 \\ d\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.7-51)$$

zur Berechnung der Feldlinien. Durch Integration erhält man die Feldlinien mit Hilfe der Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta &= \text{const.} \\ \varphi &= \text{const.} \end{aligned} \quad (5.7-52)$$

Da der Radius r beliebig ist, handelt es sich nun um Linien, die konstant in ϑ und φ sind, also Geraden, die senkrecht auf den Kugeloberflächen (Äquipotentialflächen, siehe vorher) stehen.

5.8 Lösung des 2D-Potentialkastens

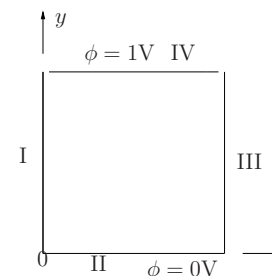


Abbildung 5.9: Potentialproblem im Vakuum, raumladungsfrei

Das Problem des Potentialkastens, das 2-dimensionale Problem eines rechteckigen Kastens ist in Abbildung 5.9 gezeigt, soll hier gelöst werden. Es handelt sich dabei um eines der häufigsten Probleme in der Elektrotechnik. Dazu ist zu lösen:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.8-53)$$

$$\phi|_{\text{Rand}} \text{ vorgegeben} \quad (5.8-54)$$

In kartesischen Koordinaten lautet Gleichung 5.8-53 für das 2-dimensionale Problem in Abbildung 5.9 (Laplace-Gleichung):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi = 0 \quad (5.8-55)$$

Spezielle Aufmerksamkeit bedürfen dabei die beiden Ecken oben, links und rechts. In diesen Ecken stoßen zwei verschiedene Potentiale unmittelbar aneinander. Abbildung 5.10 zeigt dieses Problem auf den Ursprung projiziert.

Im folgenden Unterkapitel wird auf diese Lösung eingegangen.

5.8.1 Lösung in den Ecken

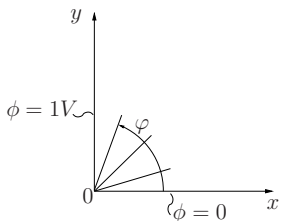


Abbildung 5.10: Potentialproblem im Vakuum, raumladungsfrei

Auch in den Ecken muß die Laplace-Gleichung gelöst werden:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{5.8-56}$$

Zwei Aussagen bezüglich dieses Problems können festgehalten werden. Das Problem ist selbst-ähnlich oder Skalen-invariant und das Potential darf nur vom Winkel abhängen. Zur Lösung führt man Zylinderkoordinaten ein.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{5.8-57}$$

Für diesen Fall ist die z-Koordinate irrelevant (2D), deshalb lautet das zu lösende Problem:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{5.8-58}$$

Es sollen die folgenden Dirichlet-Randbedingungen gelten:

$$\phi|_{\varphi=0} = 0V \tag{5.8-59}$$

$$\phi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 1V \tag{5.8-60}$$

Der Ansatz lautet nun

$$\phi(r, \varphi) \equiv \phi(\varphi) \quad (\text{nicht abhängig von } r) \tag{5.8-61}$$

Die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten vereinfacht sich somit zu:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{5.8-62}$$

mit den angegebenen Randbedingungen. Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} \phi &= a\varphi + b \\ b &= 0 \\ a &= \frac{2}{\pi}V \end{aligned} \tag{5.8-63}$$

Die Lösung in Zylinderkoordinaten lautet somit:

$$\phi(r, \varphi, z) = \frac{2V}{\pi} \varphi \tag{5.8-64}$$

Diesen Ausdruck kann man auch in kartesische Koordinaten transformieren. Es gilt unter der Anwendung von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.8-65}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{5.8-66}$$

für die Lösung $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \arctan \frac{y}{x} \tag{5.8-67}$$

Unter Anwendung von $\vec{E} = -\nabla\phi$ lassen sich aus der Lösung 5.8-67 die Komponenten des elektrischen Feldes bestimmen:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \phi = -\frac{2V}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{5.8-68}$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{2V}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Der Betrag des E-Feldes ist damit:

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{2V}{\pi} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}} \\ &= \frac{2V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2V}{\pi} \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{5.8-69}$$

In Abbildung 5.11 sind die Äquipotentiallinien, sowie die Feldlinien des E-Feldes eingezeichnet. Es ist zu beachten, daß das elektrische Feld im Ursprung gegen Unendlich geht (siehe auch Gleichung 5.8-69). Die Lösung dieses Problems ist somit auch die Lösung des Potentialkastens in den Ecken, in denen die unterschiedlichen Potentiale aneinanderstoßen.

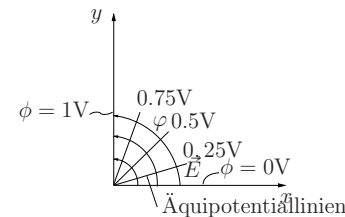


Abbildung 5.11: Das elektrische Feld in einer Ecke des Potentialkastens

5.8.2 Exakte Lösung

Für den rechteckigen Potentialkasten kann eine exakte Lösung gefunden werden. Diese soll nun analytisch hergeleitet werden. Die mathematische Formulierung der Problemstellung lautet:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = 0 \tag{5.8-70}$$

$$\phi|_{\text{Rand}} = \begin{cases} 0V & \text{für I, II, III} \\ 1V & \text{für IV} \end{cases} \tag{5.8-71}$$

Als Lösungsfunktion wird

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{1-u}{v}) + \arctan(\frac{1+u}{v})) \tag{5.8-72}$$

angenommen. Von dieser Funktion Ψ ist bekannt, daß sie die Lösung der DGL

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\phi = 0$$

für $-\infty < u < \infty$ und $0 \leq v < \infty$ ist. Ψ ist demnach eine Lösung der Poisson-Gleichung in einem einfachen Gebiet.

Aus diesem Grund wird eine geeignete Koordinatentransformation definiert (siehe Abbildung 5.12). Eine geeignete Transformation für die Lösung dieses Problems führt über die

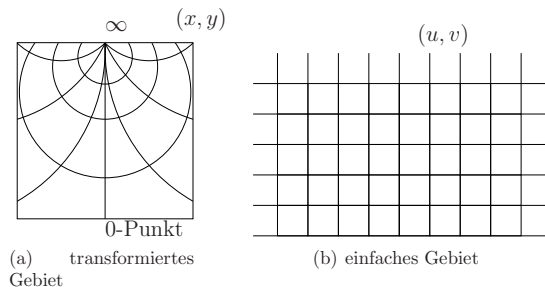


Abbildung 5.12: Koordinatentransformation

Jacobi Sn-Funktion. Dazu werden x und y zuerst in den Variablen u und v formuliert.

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \tag{5.8-73}$$

Anschließend formuliert man den Zusammenhang der Variablen x, y und u, v über die noch allgemeine Transformationsfunktion $w(\dots)$ bezüglich einer konformen Abbildung:

$$u + iv = w(x + iy) \tag{5.8-74}$$

Dementsprechend können u und v über den Realteil und den Imaginärteil der Funktion $w(x + iy)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \text{Re}[w(x + iy)] \\ v(x, y) &= \text{Im}[w(x + iy)] \end{aligned} \tag{5.8-75}$$

Wie bereits vorher erwähnt stellt die Jacobi Sn-Funktion eine geeignete Transformation für das gestellte Problem dar. Auf die Herleitung dieser Funktion sei hier nicht näher eingegangen. Hier soll gelten:

$$w(z) = \text{Sn}(kz, m) \tag{5.8-76}$$

mit den speziellen Konstanten:

$$\begin{aligned} k &= 3,1651 \\ m &= 0,0294 \end{aligned} \tag{5.8-77}$$

Wenn $\Psi(u, v)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, dann ist auch

$$\phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y)) \tag{5.8-78}$$

eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = ?$$

Bildet man die zweite Ableitung von ϕ nach x , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Analog wird zweite Ableitung von ϕ nach y behandelt. Durch Addition der Ableitungen nach x und y erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\Psi = 0 \tag{5.8-79}$$

Daher erhält man die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u + iv &= w(x + iy) \\ \frac{\partial}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} w \\ \frac{\partial}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} w \right) \end{aligned} \tag{5.8-80}$$

Dabei ist für $z = x + iy$ gesetzt. Die Lösung dieser Differentialgleichung führt dann auf die exakte Lösung des Potentialproblems (siehe auch Abbildung 5.13):

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{1-u}{v}) + \arctan(\frac{1+u}{v})) \tag{5.8-81}$$

$$u(x, y) = \text{Re}[w(x + iy)] \tag{5.8-82}$$

$$v(x, y) = \text{Im}[w(x + iy)] \tag{5.8-83}$$

$$\phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y)) \tag{5.8-84}$$

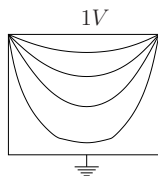


Abbildung 5.13: Elektrostatistische Lösung des 2-D Potentialkastens

5.8.3 Methode des Separationsansatzes

Eine andere Möglichkeit, das Problem aus Abbildung 5.9 analytisch zu lösen, bietet der Separationsansatz. Zur Lösung dieses Problems wird die Kantenlänge des Potentialkastens ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Lösung auf Länge 1 normiert. Für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = 0 \quad (5.8-85)$$

wird dabei der Ansatz gewählt

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.8-86)$$

wobei also die Funktion X nur von der Variablen x abhängt, und die Funktion Y nur von der Variablen y . Der Ansatz 5.8-86 wird in Gleichung 5.8-85 eingesetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Eine Division durch XY liefert:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Für diese Differentialgleichung existiert nur, wenn beide Summanden konstant sind:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{const.} = -k^2 \quad (5.8-87)$$

Dadurch erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mit den zugehörigen Lösungen

$$X'' = -k^2 X \quad (5.8-88)$$

$$X(x) = A \sin(kx) \quad (5.8-89)$$

und

$$Y'' = k^2 Y \quad (5.8-90)$$

$$Y(y) = B \sinh(ky) \quad (5.8-91)$$

Dabei wurden die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ bereits eingesetzt. Durch die Berücksichtigung der Randbedingung $\phi(x = 1) = 0$ folgt:

$$X(1) = A \sin(k) = 0 \quad (5.8-92)$$

Da der Sinus Nullstellen bei $n\pi$ besitzt, wird die Gleichung durch

$$k = n\pi \quad n \in N = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8-93)$$

erfüllt. Die Lösungen für $n < 0$ können vernachlässigt werden, da die sin-Funktion ungerade ist.

Wählt man $B = 1$, was wegen $\phi = XY$ keine Beschränkung der Lösungsmenge zur Folge hat, erhält man

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin(n\pi x) \\ Y(y) &= \sinh(n\pi y) \end{aligned} \quad (5.8-94)$$

Da nun für jedes $n \in N$ eine Lösung gefunden wurde, wird A in A_n umbenannt und es ergibt sich aus den Gleichungen 5.8-94 für n die Lösung ϕ_n :

$$\phi_n = A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

Jedes ϕ_n stellt somit eine Lösung dar. Da alle möglichen Lösungen gleichzeitig auftreten können, ergibt sich für den Ansatz 5.8-86 für alle n :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y) \quad (5.8-95)$$

Nun wird die letzte Randbedingung $\phi(x, y = 1) = 1$ ausgenutzt, um A_n zu berechnen:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi) \quad (5.8-96)$$

Die Konstanten A_n werden nun so bestimmt, daß die Randbedingung 5.8-96 gilt. Betrachtet man Gleichung 5.8-96 genauer, so stellt man fest, daß es sich hier um eine Fourier-Reihe handelt, für die die Koeffizienten A_n bestimmt werden müssen. Die Koeffizienten A_n sollen also so gewählt werden, daß die Lösung an der Stelle $y = 1$ erfüllt wird. Durch Multiplikation der Gleichung 5.8-96 mit $\sin(\tilde{n}\pi x)$ und anschließender Integration nach x über das Lösungs-Intervall $[0; 1]$, erhält man durch Ausnutzen des Äquivalenztheorems

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(\tilde{n}\pi x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq \tilde{n} \\ \frac{1}{2} & \text{für } n = \tilde{n} \end{cases} \quad (5.8-97)$$

die Lösung für die Koeffizienten A_n . Die unendliche Summe über n reduziert sich dadurch auf die Terme, für die $n = \tilde{n}$ gilt:

$$\int_0^1 \sin(\tilde{n}\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 A_n \sinh(n\pi) \sin(\tilde{n}\pi x) \sin(n\pi x) dx$$

$$\left[-\frac{1}{\tilde{n}\pi} \cos(\tilde{n}\pi x) \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\tilde{n}\pi) \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq \tilde{n} \\ \int_0^1 \sin^2(\tilde{n}\pi x) dx = \frac{1}{2} & \text{für } n = \tilde{n} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tilde{n}\pi} (1 - \cos(\tilde{n}\pi)) = \frac{1}{2} A_{\tilde{n}} \sinh(\tilde{n}\pi)$$

Durch Auflösen nach $A_{\tilde{n}}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 A_{\tilde{n}} &= \frac{2}{\pi \tilde{n} \sinh(\tilde{n}\pi)} \begin{cases} 2 & \text{für ungerade } \tilde{n} \\ 0 & \text{für gerade } \tilde{n} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\pi \tilde{n} \sinh(\tilde{n}\pi)} & \text{für ungerade } \tilde{n} \\ 0 & \text{für gerade } \tilde{n} \end{cases} \\
 \tilde{n} &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.8-98}$$

Die Gesamtlösung des Problems ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \sum_{n=1, n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{4}{\pi n \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2l+1) \sinh((2l+1)\pi)} \sin((2l+1)\pi x) \sinh((2l+1)\pi y)
 \end{aligned}
 \tag{5.8-99}$$

wobei jede einzelne der Funktionen $\nabla^2 \phi = 0$ erfüllt. Ebenfalls erfüllt die Gesamtlösung auch die Randbedingung.

Als Besonderheit sei in Abbildung 5.14 das Gibbs'sche Phänomen an der Stelle $\phi(x, y = 1)$ angeführt. Bricht man die unendliche Summe an einer beliebigen Stelle ab, so ergibt sich eine Lösung ähnlich der in Abbildung 5.14.

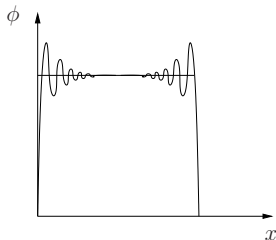


Abbildung 5.14: Gibbs'sches Phänomen

5.8.4 Numerische Lösung des Potentialkastens

Wie in der Vorlesung diskutiert, treffen analytische, das heißt formelmäßig geschlossene Verfahren zur Feldberechnung bei komplexen Problemen schnell an ihre Grenzen. Die Alternative sind numerische Verfahren, also die Abbildung des "eigentlichen" Problems in ein "ähnliches", das in endlich vielen Schritten eine "ausreichend genaue" Näherungslösung liefert.

Die bewußt vage Beschreibung muß natürlich für ein konkretes numerisches Verfahren präzisiert werden. Allgemein muß für ein numerisches Verfahren gefordert werden:

- Konvergenz

- Konsistenz
- Effizienz

Das numerische Verfahren muß eine Lösung haben, die mit dem ursprünglichen Problem etwas zu tun hat, und die möglichst zu berechnen ist.

Auch in diesem Unterkapitel wird die Potentialverteilung auf einem zweidimensionalen Gebiet V , mit Vorgabe der Randwerte berechnet. Diese Berechnung ist auf den folgenden Seiten in logische Schritte unterteilt.

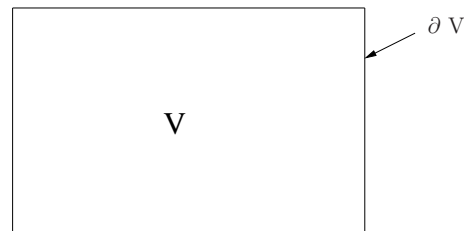


Abbildung 5.15: Potentialkasten im 2-Dimensionalen

Schritt 1: Mathematische Analyse

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 \phi &= 0 \quad \text{in } V \\
 \phi|_{\partial V} &= \text{vorgegeben}
 \end{aligned}
 \tag{5.8-100}$$

Diese Gleichung mit der Vorgabe des Potentials am Rand ist immer lösbar, aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (siehe Kapitel 5.5).

Schritt 2: Diskretisierung

Als erstes wird das Gebiet in einzelne Zellen eingeteilt, bzw. es wird ein Gitternetz über das Lösungsgebiet gelegt.

In diesem Fall wird das einfachste Gitter gewählt, und zwar ein äquidistantes Gitter entlang der kartesischen Koordinaten. Darauf muß der Verlauf des Potentials durch die Werte auf den Gitterpunkten und durch eine geeignete "Interpolationsvorschrift" repräsentiert werden. Als numerische Verfahren, d.h. als Methode zur Berechnung der Potentialwerte auf den Gitterpunkten soll das Gauß-Seidel-Verfahren dienen. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

- Belege die äußeren Punkte mit den vorgeschriebenen Randwerten
- Belege die inneren Punkte mit beliebigen Startwerten
- Ersetze die Werte an den inneren Punkte Sukzessive jeweils durch die Mittelwerte der vier Nachbarn
- Brich das Verfahren ab, sobald die Änderungen "klein genug" werden.

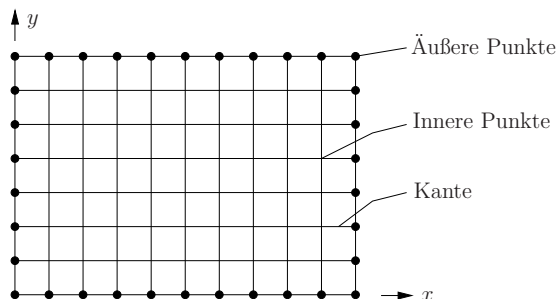


Abbildung 5.16: Diskretisierung eines rechteckförmigen Gebietes

An dieser Stelle sollte das numerische Verfahren konvergiert sein. In Kapitel 5.9.4 wird gezeigt, daß das Verfahren gegen die analytische Lösung konvergiert. Deshalb wird im Folgenden mit Hilfe von Mathematica eine Lösung numerisch berechnet.

Zunächst erzeugt man ein Gitter mit 10 × 10 Gitterzellen, d.h. 11 × 11 Gitterpunkten:

```
MM = 10;
NN = 10;
A = Table[0, {i, 1, NN + 1}, {j, 1, MM + 1}];
MatrixForm[A]
```

Das Ergebnis ist eine entsprechende Matrix, die hier noch mit Nullen belegt ist (siehe Abbildung 5.17).

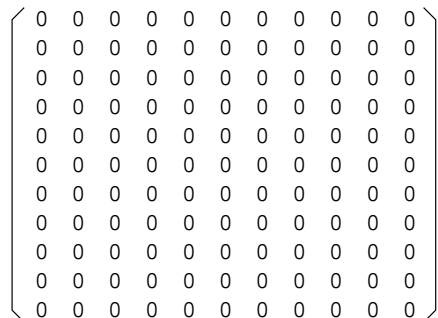


Abbildung 5.17: Matrix der Gitterpunkte

Ein Gitter zeichnet man mit Mathematica wie folgt:

```
NumericalGrid = Plot[0, {x, 0, 1},
```

```
GridLines -> {{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0},
             {0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0}},
PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, AspectRatio -> 1, Ticks -> False];
```

Die zugehörige Ausgabe ist in Abbildung 5.18 zu sehen. Das gewählte numerische Gitter,

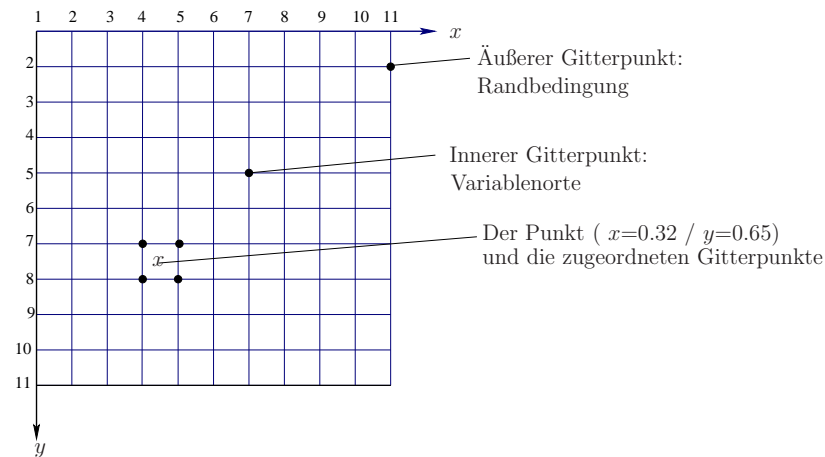


Abbildung 5.18: Numerisches Gitter

ist also die Zuordnung des Lösungsgebietes zur Struktur einer endlichen Matrix.

Die Funktionen, die jedem Punkt des Lösungsgebietes seine zugeordneten Gitterpunkte zuweisen müssen definiert werden:

```
LowerIndex[z_, KK_] := Which[z <= 0.0, 1, z >= 1, KK + 1,
                             True, IntegerPart[z*KK] + 1]
UpperIndex[z_, KK_] := Which[z <= 0.0, 1, z >= 1, KK + 1,
                             True, IntegerPart[z*KK] + 2]
```

Mit dem Befehl

```
Plot[LowerIndex[z, 10], {z, 0, 1}, PlotRange -> {0, 11}, PlotPoints -> 1000]
```

oder mit

```
Plot[UpperIndex[z, 10], {z, 0, 1}, PlotRange -> {0, 11}, PlotPoints -> 1000]
```

kann dies veranschaulicht werden(siehe Abbildung 5.19).

Durch eine bi-lineare Interpolation wird das Potential innerhalb der einzelnen Gitterzellen feiner dargestellt:

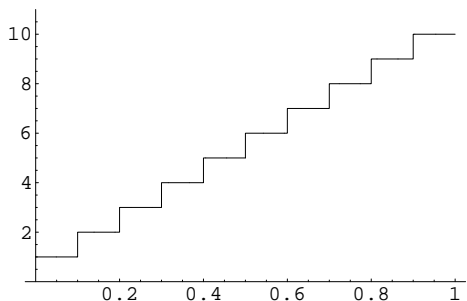


Abbildung 5.19: Zuordnung der Gitterpunkte

```
UnitSquareInterpolation[xR_, yR_, VLeHi_, VLeLo_, VRiHi_, VRiLo_] :=
(1 - xR)*(1 - yR)*VLeHi + xR*(1 - yR)*VRiHi +
(1 - xR)*yR*VLeLo + xR*yR*VRiLo;
Phi[x_, y_] :=
Module[{Le, Ri, Hi, Lo, xUS, yUS},
Le = LowerIndex[x, MM];
Ri = UpperIndex[x, MM];
Hi = LowerIndex[y, NN];
Lo = UpperIndex[y, NN];
xUS = x*MM - (Le - 1);
yUS = y*NN - (Hi - 1);
UnitSquareInterpolation[
xUS, yUS, A[[Hi, Le]], A[[Lo, Le]], A[[Hi, Ri]], A[[Lo, Ri]]]]
```

Dabei handelt es sich um die explizite Form der Interpolationsvorschrift, wie aus den Werten der Matrix A die Werte der Funktion zu berechnen sind:

- Bestimme für jeden Punkt die Koordinaten der zugeordneten Zelle
- Bilde diese Zelle auf das Einheitsquadrat ab
- Verwende die bi-lineare Interpolation:

Nun werden die Randwerte und zufällige Startwerte für das diskretisierte Gitter festgelegt. In Abbildung 5.21 ist dieses dargestellt:

```
InitializeWithStartValues :=
Module[{i, j},
SeedRandom[4];
For[i = 1, i <= NN + 1,
For[j = 1, j <= MM + 1,
A[[i, j]] = 0.1*Random[Integer, {0, 10}]; j++]; i++];
For[j = 1, j <= MM + 1, A[[1, j]] = 1.0; j++];
```

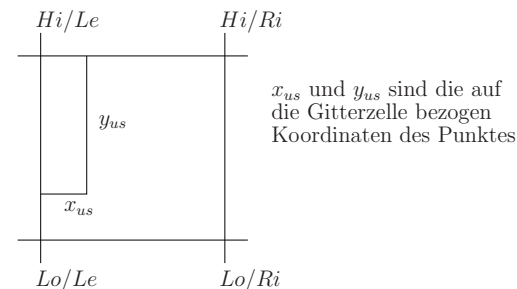


Abbildung 5.20: Interpolation innerhalb einer diskreten Zelle

```
For[j = 1, j <= MM + 1, A[[NN + 1, j]] = 0.0; j++];
For[i = 1, i <= NN + 1, A[[i, 1]] = 0.0; i++];
For[i = 1, i <= NN + 1, A[[i, MM + 1]] = 0.0; i++];
A[[1, 1]] = 0.5;
A[[1, MM + 1]] = 0.5;]
```

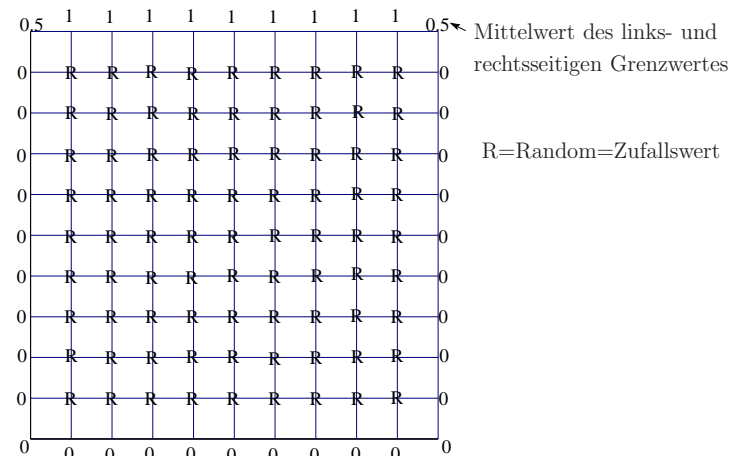


Abbildung 5.21: Randwerte und Startwerte

Diese Funktion muß natürlich noch ausgeführt werden, mit dem zweiten Befehl erhält man eine Ausgabe wie in Abbildung 5.22:

```
InitializeWithStartValues;
MatrixForm[A]
```

Will man die Ausgabe zum Beispiel grau-codiert darstellen, so kann dies wie folgt geschehen:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 0.5 \\ 0. & 0.3 & 1. & 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0 & 0. \\ 0. & 0.4 & 0.9 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.8 & 0.4 & 0.3 & 0. \\ 0. & 0.1 & 0.6 & 1. & 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0. \\ 0. & 1. & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.9 & 1. & 0. \\ 0. & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.7 & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 1. & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0. \\ 0. & 1. & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.9 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0. \\ 0. & 0.3 & 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0.9 & 0. \\ 0. & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

Abbildung 5.22: Matrix der Startwerte

```
B = Table[0.0, {i, 1, NN + 1}, {j, 1, MM + 1}]
DisplayMatrix :=
Module[{i, j},
  For[i = 1, i <= NN + 1,
    For[j = 1, j <= MM + 1, B[[i, j]] = 1 - A[[NN + 2 - i, j]]; j++];
  i++];
ListDensityPlot[B, Ticks -> False, Frame -> False]]
```

Durch den Befehl

```
DisplayMatrix
```

erhält man dann eine Ausgabe, wie in [Abbildung 5.23](#).

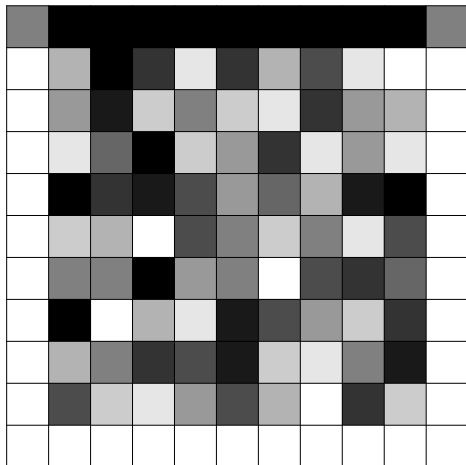


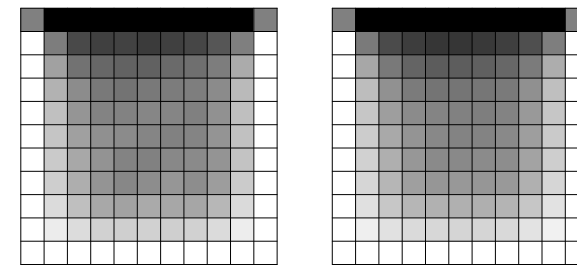
Abbildung 5.23: Matrix der Startwerte, grau-codiert

Schritt 3: Programmierung des Algorithmus

Zur Berechnung der Potentialwerte im Inneren des rechteckförmigen Kastens wird nun der eigentliche Algorithmus formuliert. Zuerst definiert man die Vorschrift für eine Iteration, anschließend wird diese k mal ausgeführt (hier $k = 7$):

```
PerformRelaxationStep :=
Module[{i, j},
  For[i = 2, i <= NN,
    For[j = 2, j <= MM,
      A[[i, j]] =
        (A[[i, j - 1]] + A[[i, j + 1]] + A[[i - 1, j]] + A[[i + 1, j]])/ 4.0;
      j++];
    i++];
  ]
For[k = 1, k <= 7, k++; PerformRelaxationStep; DisplayMatrix];
```

Das Ergebnis kann in den [Abbildungen 5.24 bis 5.27](#) betrachtet werden.



(a) nach 1 Schritt

(b) nach 2 Schritten

Abbildung 5.24: Numerische Lösung

Die Lösung wird sehr schnell glatt, und damit "glaubwürdig", aber sie ist noch weit von der richtigen Lösung entfernt! \implies Immer Konvergenz überprüfen!

Praktisch gesehen müßte man unendlich viele Schritte durchführen, allerdings sollten einige tausend Iterationen ausreichen, um eine angemessen konvergierte Lösung zu erhalten:

```
For[k = 1, k <= 2000, k++; PerformRelaxationStep];
```

Bevorzugt man eine Darstellung mit Höhenlinien, so kann dies natürlich auch realisiert werden:

```
FieldPlot =
ContourPlot[Phi[x, 1 - y], {x, -0.001, 1.001}, {y, -0.001, 1.001},
PlotPoints -> 300,
```

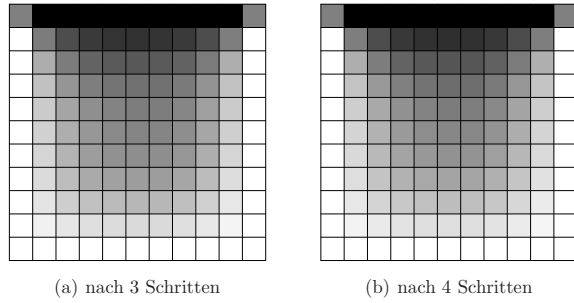


Abbildung 5.25: Numerische Lösung

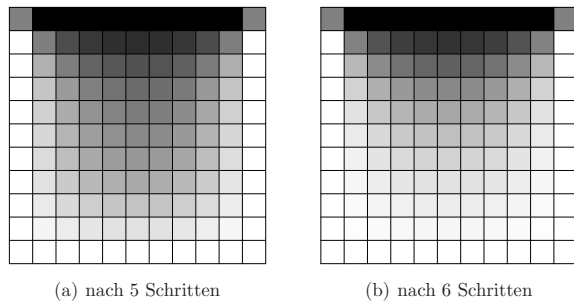


Abbildung 5.26: Numerische Lösung

Contours -> {0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0},
 ContourShading -> False]

In Abbildung 5.27(b) kann die Zeichnung der Höhenlinien der interpolierten Lösung betrachtet werden.

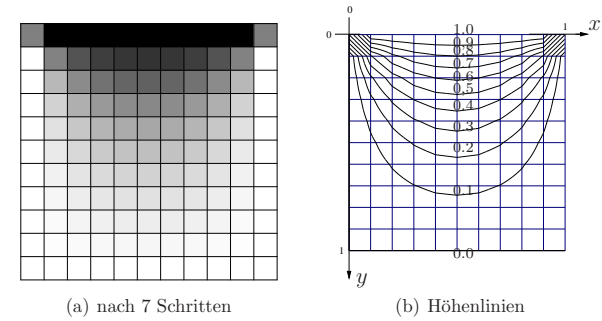


Abbildung 5.27: Numerische Lösung

5.9 Numerische Lösungsverfahren

5.9.1 Allgemeines zu numerischen Lösungsverfahren

Die Grundidee beim numerischen Lösen partieller Differentialgleichungen ist die Darstellung der unendlichen Informationen durch eine endliche Information. Diese Verminderung des Informationsgehaltes zieht eine numerische Approximation nach sich. Als grundlegende Schritte für numerische Lösungsverfahren ergeben sich:

- Festlegung eines numerischen Gitters, siehe Abbildung 5.28 (Diskretisierung des Lösungsgebietes)

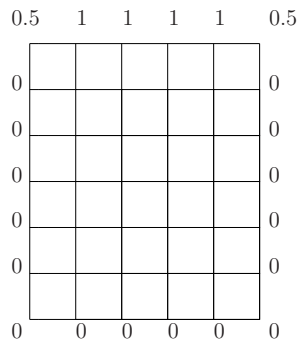


Abbildung 5.28: Numerisches Gitter mit vorgegebenen Randwerten

- Verteilung von Randbedingungen, stoßen zwei unterschiedliche Randwerte in einer Ecke aneinander, so wird der Mittelwert der beiden Randbedingungen verwendet
- Schema zur Berechnung der inneren Werte
- Interpolation auf alle Punkte.

Als spezielles Beispiel wird hier auf das Jacobi-Verfahren eingegangen. Andere Verfahren, wie etwa die Momentenmethode, finite Differenzenverfahren etc., führen natürlich auch zu numerischen Lösungen. Auf diese Verfahren soll aber hier nicht eingegangen werden.

5.9.2 Grundidee einiger numerischer Verfahren

Die Idee vieler numerischer Verfahren beruht auf der Approximation von Ableitungen. Die erste Ableitung kann mathematisch wie folgt geschrieben werden (Differenzenquotient):

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{5.9-101}$$

Die zweite Ableitung lautet demnach durch erneutes Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x) + f(x - 2\Delta x)}{4(\Delta x)^2} \end{aligned} \tag{5.9-102}$$

Bezieht man dies auf die Laplace-Gleichung im 2-Dimensionalen, so erhält man mit $h = 2\Delta x = 2\Delta y$ eine Näherung durch die Verwendung von Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &\approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f &\approx \frac{f(y+h) - 2f(y) + f(y-h)}{h^2} \end{aligned} \tag{5.9-103}$$

Setzt man dies zum Beispiel in die Laplace-Gleichung ein, so ergibt sich im Diskreten:

$$\nabla^2 \phi_{k,l} = \frac{\phi_{k+1,l} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k,l-1} - 4\phi_{k,l}}{h^2} = 0 \tag{5.9-104}$$

Als numerisches Modell wird daher die Gleichung

$$\phi_{k+1,l} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k,l-1} - 4\phi_{k,l} = 0 \tag{5.9-105}$$

für alle inneren Gitterpunkte gelöst. Formuliert man dies in Matrix-Schreibweise, so lautet ein mögliches Gleichungssystem

$$\underline{\underline{M}} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.9-106}$$

welches dann gelöst werden muß.

5.9.3 Anwendung des Jacobi-Verfahrens

Um die Differenzgleichung aus Kapitel 5.9.2 als Jacobi-Iterationsverfahren anzuwenden, muß man folgende Schritte befolgen:

- wähle beliebige Startwerte für die Gitterpunkte im Inneren des Gitters, die Randwerte sind bekannt (siehe Abbildung 5.28)
- laufe über alle inneren Punkte und ersetze den Wert durch den Mittelwert der Nachbarn $\phi_{k,l} = \frac{1}{4}(\phi_{k,l-1} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k+1,l})$
- wiederhole den vorherigen Schritt, bis die Änderungen nicht mehr wesentlich sind

In Abbildung 3.14 ist eine Folge von Iterationsschritten abgebildet, welche mit dem Jacobi-Verfahren berechnet wurden.

Wenn das Verfahren konvergiert ist, gilt für alle Punkte:

$$\phi_{k,l} = \frac{1}{4}(\phi_{k,l-1} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k+1,l})$$

5.9.4 Konvergenzbeweis

Bei der Verwendung numerischer Verfahren, welche Potentialverläufe mit Hilfe der diskreten Gleichung

$$\phi_{k,l} = \frac{1}{4} (\phi_{k+1,l} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k,l-1}) \tag{5.9-107}$$

berechnen, stellen sich grundsätzlich die Fragen:

- konvergiert das Verfahren?
- wenn ja, wogegen?

Bei der Beantwortung dieser Fragen sind neben der Frage nach der Konvergenz außerdem die folgenden Begriffe zu erörtern:

- Konsistenz
- Effizienz

In Worten ausgedrückt wird für das angestrebte Lösungsverfahren folgendes erwartet:

Das numerische Verfahren nähert sich einer Lösung, die für beliebig genaue Diskretisierung beliebig genau ist, und das schnell. Der Jacobi-Schritt oder ein Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens betrachtet für einen diskreten Wert des Potentials jeweils nur 4 unmittelbare Nachbarn (siehe Abbildung 5.30). Das Ziel ist es nun zu zeigen, daß diese

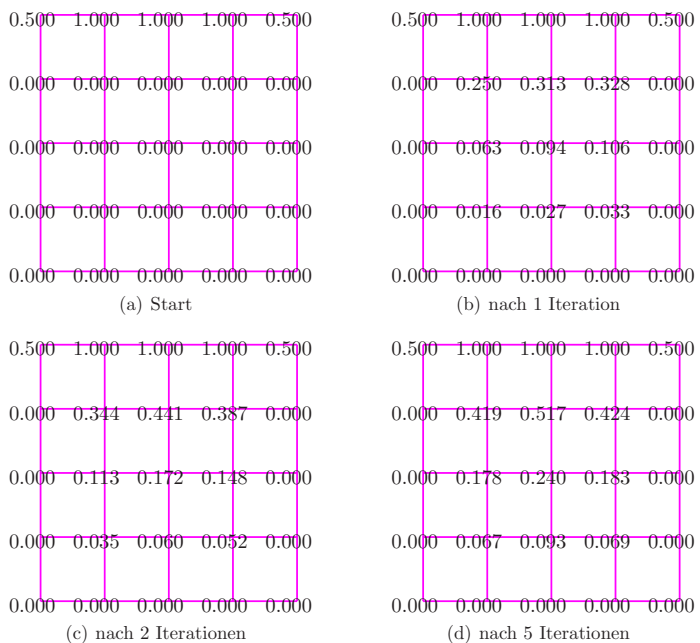


Abbildung 5.29: Das Jacobi-Verfahren in der Anwendung

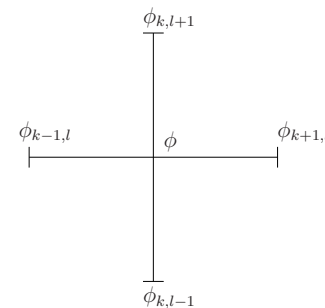


Abbildung 5.30: Jacobi-Schritt

Verfahren eine gute Näherung der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{5.9-108}$$

darstellen.

Motivation: Betrachte für eine differenzierbare Funktion ϕ den Operator

$$L\phi = \phi(x, y + h) + \phi(x, y - h) + \phi(x + h, y) + \phi(x - h, y) - 4\phi(x, y) \tag{5.9-109}$$

Entwicklung in eine Taylor-Reihe um den Punkt $h=0$ liefert

$$L\phi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) h^2 \approx \nabla^2 \phi h^2 \tag{5.9-110}$$

Offensichtlich ist dies (bis auf den Faktor h^2) die diskrete Version des Operators $\Delta = \nabla^2$. Und es gilt:

$$L\phi = 0 \rightarrow \phi(x, y) = \text{Mittelwert über Nachbarn} \tag{5.9-111}$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x, y + h) + \phi(x, y - h) + \phi(x + h, y) + \phi(x - h, y))$$

Wenn jeder Wert dem Mittelwert seiner Nachbarn gleich ist, entspricht dies offensichtlich einer diskreten Lösung der Laplace-Gleichung.

Frage: Führt das Verfahren dort hin?

Betrachte dazu folgenden Ausdruck, gebildet aus allen Werten auf dem Gitter:

$$W = \sum_{\text{Kanten}} \frac{1}{2} (\phi_{\text{Kantenanfang}} - \phi_{\text{Kantenende}})^2 \tag{5.9-112}$$

Offensichtlich ist dies die diskrete Form der Feldenergie. Für eine beliebige Kante parallel zur x -Achse gilt:

$$(\phi_{K.A} - \phi_{K.E})^2 = \left(\phi(x_n + \frac{1}{2}h) - \phi(x_n - \frac{1}{2}h) \right)^2 \tag{5.9-113}$$

$$\approx \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_n} h \right)^2 = E_x^2$$

Dies gilt analog für die Kanten parallel zur y -Achse.

Offensichtlich ist die Funktion W positiv und hat (anschaulich) ein Minimum.

Behauptung:

- Das Mittelwertschema nähert sich dieser Lösung (diesem Minimum)
- Wenn es sie erreicht hat, gilt die diskrete Form der Laplace-Gleichung $\nabla^2 \phi = 0$

Bemerkungen:

- Im Allgemeinen wird die Lösung nie streng erreicht, sondern nur "ausreichend gut"
- Bemerke die Analogie zur Argumentation des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes!

Beweis: Veränderung der Funktion bei jedem Schritt betrachten!

Wie verändert sich das Funktional W , wenn der Iterationsschritt "Ersetze inneren Wert durch den Mittelwert der Nachbarn" durchgeführt wird?

Offensichtlich sind nur solche Beiträge betroffen, die von einer auf P endenden Kante stammen (siehe Abbildung 5.31). Daher erhält man nach einem Iterationsschritt:

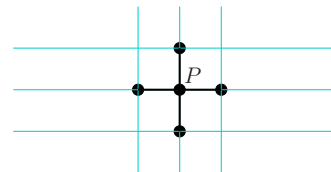


Abbildung 5.31: P und die betroffenen Nachbarpunkte

$$W^{neu} - W^{alt} = \frac{1}{2} \sum_{\text{Kante an } P} (\phi_{\text{Nachbar}} - \phi_p^{(neu)})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\text{Kante an } P} (\phi_{\text{Nachbar}} - \phi_p^{(alt)})^2 \tag{5.9-114}$$

Dabei ist der "Nachbar" natürlich jeweils auf die zugehörige Kante bezogen. Numeriert man die Kanten und die Nachbarn von 1 bis 4, gilt:

$$W^{(neu)} - W^{(alt)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (\phi_k - \phi_p^{(neu)})^2 - (\phi_k - \phi_p^{(alt)})^2 \tag{5.9-115}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (\phi_k^2 - 2\phi_k \phi_p^{(neu)} + \phi_p^{(neu)^2} - \phi_k^2 + 2\phi_k \phi_p^{(alt)} - \phi_p^{(alt)^2})$$

Nun war definiert:

$$\phi_p^{(neu)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \phi_k \tag{5.9-116}$$

Deshalb erhält man:

$$W^{(neu)} - W^{(alt)} = -2 \left(\phi_p^{(neu)} - \phi_p^{(alt)} \right)^2 \tag{5.9-117}$$

Das Funktional W wird bei jedem Schritt also verringert, außer ϕ_p bleibt unverändert, dann war aber $\phi_p^{(alt)}$ bereits der Mittelwert.

Wir Können also feststellen:

- Das Verfahren ist konvergent, d.h. es liefert fortlaufend bessere Annäherungen an eine "diskrete Lösung".
- Das Verfahren ist konsistent, denn die diskrete Lösung repräsentiert eine Approximation der gesuchten Lösung der Laplace-Gleichung.

Ist das Verfahren auch effizient?

- Nein, bei "großen" Problemen (d.h. bei einer hohen Auflösung) konvergiert es sehr langsam
- Ja, denn der Programmieraufwand ist sehr gering, man kann es sogar per Taschenrechner "implementieren".

5.9.5 Zusammenhang des Differenzenquotienten mit der Laplace-Gleichung

In diesem Kapitel wird eine alternative Möglichkeit vorgestellt, den Differenzenquotienten bezüglich der Laplace-Gleichung herzuleiten.

Die Laplace-Gleichung lautet in kartesischen Koordinaten im 2-Dimensionalen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = 0 \tag{5.9-118}$$

Um den Zusammenhang des Differenzenquotienten mit der Laplace-Gleichung darzustellen, wird zunächst eine Beziehung zwischen den kontinuierlichen und den diskreten Koordinaten benötigt:

$$\begin{aligned} \phi_{k,l} &\leftarrow \phi(x_k, y_l) \\ \phi_{k,l-1} &\leftarrow \phi(x_k, y_{l-1}) \equiv \phi(x_k, y_l - h) \\ \phi_{k,l+1} &\leftarrow \phi(x_k, y_{l+1}) \equiv \phi(x_k, y_l + h) \\ \phi_{k-1,l} &\leftarrow \phi(x_{k-1}, y) \equiv \phi(x_k - h, y_l) \\ \phi_{k+1,l} &\leftarrow \phi(x_{k+1}, y) \equiv \phi(x_k + h, y_l) \end{aligned} \tag{5.9-119}$$

Die Idee ist es nun, die Funktion ϕ an den Nachbarstellen zu $\phi(x_k, y_l)$ (Gleichung 5.9-119) in Taylor-Reihen zu entwickeln:

$$\begin{aligned} \phi_{k,l-1} = \phi(x_k, y_l - h) &\approx \phi(x_k, y_l) - \frac{\partial\phi}{\partial y}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}h^2 - \dots h^3 + \dots \\ \phi_{k,l+1} = \phi(x_k, y_l + h) &\approx \phi(x_k, y_l) + \frac{\partial\phi}{\partial y}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}h^2 + \dots \\ \phi_{k-1,l} = \phi(x_k - h, y_l) &\approx \phi(x_k, y_l) - \frac{\partial\phi}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 - \dots \\ \phi_{k+1,l} = \phi(x_k + h, y_l) &\approx \phi(x_k, y_l) + \frac{\partial\phi}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 + \dots \end{aligned} \tag{5.9-120}$$

Addiert man die Gleichungen 5.9-120, ergibt sich für die rechte Seite

$$4\phi(x_k, y_l) + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}h^2 + O(h^3) \tag{5.9-121}$$

Durch die zuvor genannte Addition erhält man demnach im Diskreten:

$$\phi_{k,l-1} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k+1,l} \approx 4\phi_{k,l} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}h^2 + O(h^3) \tag{5.9-122}$$

In dieser Weise ergibt sich für das zweidimensionale Problem eine diskrete Approximation des Differentialoperators $\nabla^2\phi$. Klammert man vom zweiten und dritten Term auf der rechten Seite h^2 aus, vernachlässigt $O(h^3)$ und stellt die Gleichung um, so erhält man:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_{k,l-1} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k+1,l} - 4\phi_{k,l}}{h^2} \tag{5.9-123}$$

Die diskrete Repräsentation von $\nabla^2\phi = 0$ durch den Jacobi-Schritt mit

$$\phi_{k,l} = \frac{1}{4}(\phi_{k,l-1} + \phi_{k,l+1} + \phi_{k-1,l} + \phi_{k+1,l}) \tag{5.9-124}$$

ist demnach eine sinnvolle numerische Näherung. Für alle Indizes betrachtet hat man ein lineares System zu lösen. Es gibt also genauso viele Unbekannte, wie Gleichungen. Das System ist daher lösbar.

Mathematica, Maple, Mathcad und *Quickfield* sind komfortable kommerzielle Programme, mit welchen man auf schnelle Weise Lösungen dieser Art berechnen lassen kann.

5.9.6 Numerische Probleme

Auch im Numerischen werden Ecken betrachtet, in welchen zwei verschiedene Potentiale

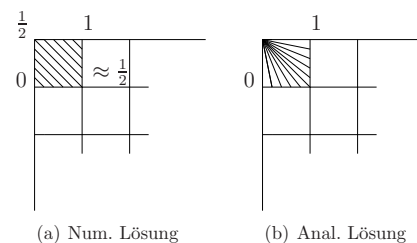


Abbildung 5.32: Vergleich der Lösung in den Ecken

aneinanderstoßen. In Kapitel 5.8.1 wurde dazu bereits eine analytische Berechnung des Potentials in diesen Ecken vorgestellt. Abbildung 5.32 zeigt sowohl die analytische, als auch eine sinnvolle numerische Lösung. Die Stoßecke stellt immer ein Problem dar, die gezeigte numerische Lösung ordnet dieser Ecke den Mittelwert der beiden angrenzenden Potentiale $\frac{1}{2}(\phi_{\text{links}} + \phi_{\text{oben}})$ zu. Anschließend funktioniert das hier verwendete Jacobi-Verfahren. Jedoch ergibt sich damit für die Äquipotentiallinien der entsprechenden Gitterzelle im Numerischen eine etwas andere Lösung als im Analytischen siehe Abbildung 5.32.

5.9.7 Komplizierte Gebiete

Für numerische Berechnungen, zum Beispiel für den Fall des Jacobi-Verfahrens, sei zusätzlich ein komplexes Lösungsgebiet betrachtet (siehe Abbildung 5.33(a)). Eine Lösung für spezielle Randwerte ist in Abbildung 5.33(b) gezeigt. Auch für ein solches Gebiet funktionieren numerische Verfahren. Oftmals ist einer der Gründe der Diskretisierung, die Komplexität des betrachteten Gebietes. Numerische Verfahren können dann bei entsprechender Anwendung konvergieren und eine Lösung liefern. Analytische Verfahren versagen meist bei komplexen Lösungsgebieten, bis auf in wenigen Ausnahmefällen.

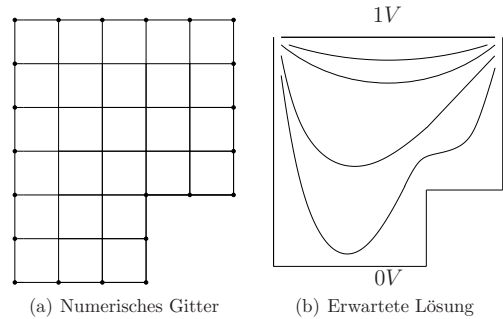


Abbildung 5.33: Gittergleichung und Lösung

5.10 Magnetisierbare Kugel im Magnetfeld

Die zugehörigen Gleichungen der Magnetostatik lauten:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \quad (5.10-125)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.10-126)$$

Mit diesen Gleichungen soll nun der Fall einer magnetisierten Kugel in einem magnetischen Feld betrachtet werden. Zu erwarten ist, daß die Kugel das Magnetfeld beeinflusst. Dies soll in diesem Kapitel untersucht werden. In Abbildung 5.34 ist eine Lösung skizziert, die in einem solchen Fall erwartet werden kann.

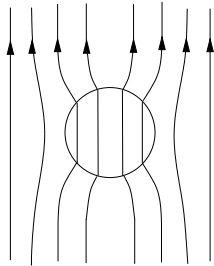


Abbildung 5.34: Magnetisierte Kugel im Feld

Da in diesem Fall keine Ströme \vec{j}_f fließen, gilt für Gleichung 5.10-125:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \vec{M} \quad (5.10-127)$$

Ist es möglich, zwischen \vec{B} und \vec{M} einen Zusammenhang der Form

$$\vec{M} = \kappa \vec{B} \quad (5.10-128)$$

zu formulieren, so erhält man damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} &= \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (5.10-129)$$

Im Inneren der Kugel gilt damit:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.10-130)$$

Außerhalb der Kugel gilt:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.10-131)$$

An den Gleichungen 5.10-130 und 5.10-131 erkennt man, daß im ganzen Gebiet gleichförmig gilt (auch über die Zonengrenzen):

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.10-132)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.10-133)$$

An Gleichung 5.10-132 erkennt man, daß die Tangentialkomponente \vec{H}_{tan} des Feldes \vec{H} stetig ist. An Gleichung 5.10-133 erkennt man, daß die Normalenkomponente \vec{B}_{norm} des Feldes \vec{B} stetig ist.

Zur Lösung dieses Problems wird nun nach Orthogonalfunktion entwickelt:

- Einführung eines Kugelkoordinatensystems: $x, y, z \rightarrow r, \vartheta, \varphi$
- Schreiben der Gleichung in Kugelkoordinaten
- Entwicklung der Feldgrößen dieses Systems nach sphärischen Harmonischen $f(\vartheta, \varphi)$ also in das sphärische Analogon von sin und cos
- Koeffizientenvergleich \rightarrow Lösung

Da diese Vorgehensweise etwas langwierig ist, soll nun mit einer etwas anschaulicheren Methode eine Lösung erarbeitet werden.

Aus großer Entfernung kann die magnetisierbare Kugel durch eine Dipol genähert werden. Deshalb stellt man sich das Gesamtfeld als das von außen herrschende B-Feld plus dem Dipolfeld vor.

Das Feld des Dipols \vec{m} lautet nach Gleichung 3.7-86:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right) \quad (5.10-134)$$

Bezeichnet man das äußere Feld mit \vec{B}_0 , so nimmt man das Gesamtfeld im Außenraum durch Addition mit dem Dipolfeld an:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}\vec{r} - r^2\vec{m}}{|\vec{r}|^5} \quad (5.10-135)$$

Im Inneren wird das Feld konstant angenommen:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{innen}} = \text{const.} \quad (5.10-136)$$

Beide Ansätze erfüllen die Feldgleichungen. Im Außenbereich erhält man:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = 0 \quad (5.10-137)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.10-138)$$

Im Innenbereich gilt:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.10-139)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.10-140)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \quad (5.10-141)$$

Durch eine Betrachtung der Feldgrößen auf der Kugeloberfläche erhält man für die Feldgrößen:

Außen:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}\vec{r} - r^2\vec{m}}{|\vec{r}|^5} \quad (5.10-142)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}\vec{r} - r^2\vec{m}}{|\vec{r}|^5} \quad (5.10-143)$$

Innen:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{innen}} \quad (5.10-144)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}_{\text{innen}} \quad (5.10-145)$$

Aus Symmetriegründen erhält man für das B-Feld im Inneren, daß \vec{B}_{innen} und \vec{m} die gleiche Richtung haben wie \vec{B}_0 .

Als Übergangsbedingung werden nur die Gleichungen

$$(\vec{B}_{\text{innen}} - \vec{B}_{\text{außen}}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.10-146)$$

$$(\vec{H}_{\text{innen}} - \vec{H}_{\text{außen}}) \times \vec{n} = 0 \quad (5.10-147)$$

betrachtet, wobei \vec{n} der Normalenvektor der Oberfläche ist. Auf der Oberfläche der Kugel gilt mit $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{B}_{\text{innen}} - \vec{B}_{\text{außen}}) &= \vec{n} \cdot \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{n} \cdot \frac{3\vec{m} \cdot \vec{n}\vec{n} - \vec{m}}{r^3} - \vec{n} \cdot \vec{B}_{\text{innen}} \\ &= \vec{n} \cdot \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m} \cdot \vec{n}}{r^3} - \vec{n} \cdot \vec{B}_{\text{innen}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.10-148)$$

Dies gilt für alle Normalenrichtungen \vec{n} , deshalb erhält man allgemein

$$\vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{R^3} - \vec{B}_{\text{innen}} = 0 \quad (5.10-149)$$

wenn der Radius der Kugel mit R bezeichnet wird.

Für die Tangentialkomponente erhält man auf der Oberfläche der Kugel:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{H}_{\text{außen}} - \vec{H}_{\text{innen}}) &= \vec{n} \times \left(\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{m}}{r^3} - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}_{\text{innen}} \right) \\ &= \frac{\vec{n} \times \vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{n} \times \vec{m}}{r^3} - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{n} \times \vec{B}_{\text{innen}} \end{aligned} \quad (5.10-150)$$

Bezeichnet man den Radius der Kugel wiederum mit R und zieht in Betracht, daß das Ergebnis für alle \vec{n} gelten muß, so erhält man:

$$0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m}}{R^3} - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}_{\text{innen}} \quad (5.10-151)$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man für das Feld im Inneren:

$$\vec{B}_{\text{innen}} = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \vec{B}_0 \quad (5.10-152)$$

Der Ersatzdipol der magnetisierbaren Kugel lautet dann:

$$\vec{m} = + \frac{\mu_r - 1}{(2 + \mu_r)\mu_0} 4\vec{B}_0 \pi R^3 \quad (5.10-153)$$

Als Ergebnis kann festgehalten werden, daß das äußere B-Feld die Kugel magnetisiert. Dieses neu hinzugekommene Feld verstärkt das vorhandene Feld. Die Feldlinien des äußeren Feldes werden dabei verschoben (siehe Abbildung 5.35(c)), an der Oberfläche der Kugel machen die Feldlinien eine Knick.

5.11 Lernziele Kapitel 5

Wissen,

1. wie man die Maxwell Gleichungen für eine gegebene Problemstellung vereinfacht,
2. wie die Methode der Spiegelladung funktioniert,

3. wann sich die Methode der Spiegelladung anwenden läßt,
4. wie die Poisson-Gleichung für verschiedene Fälle gelöst werden kann,
5. wie sich elektrische Feldprobleme lösen lassen,
6. wie man Problemstellungen mit Dirichlet oder Neumann Randbedingung löst,
7. wie man die Methoden zur Lösung für den 2D Potentialkasten anwenden muß,
8. wie sich magnetische Feldprobleme lösen lassen.

Man sollte sich allgemeine Lösungsstrategien aneignen, nicht nur "Kochrezepte" für Spezialfälle wissen und aus der Formelsammlung nicht nur ablesen können, sondern auch wissen, woher die "Dinge" kommen.

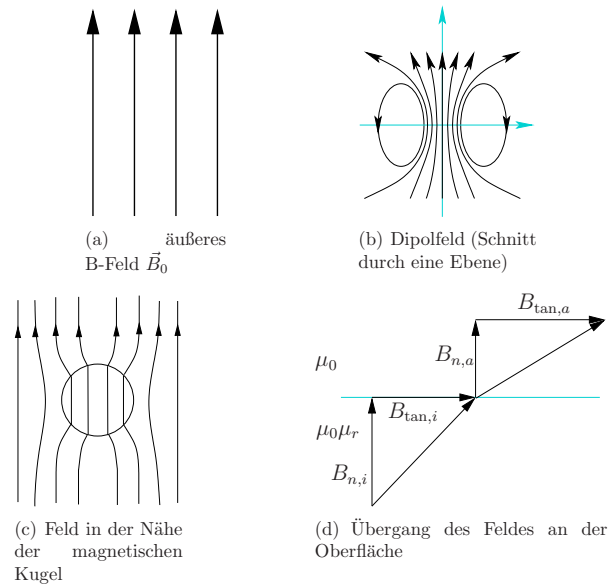


Abbildung 5.35: magnetisierbare Kugel

6 Elektrodynamik, Zusammenhang elektrischer und magnetischer Felder

6.1 Allgemeine Überlegungen

Zur Verbindung der elektrischen und magnetischen Felder werden neben den Erkenntnissen der Elektrostatik und der Magnetostatik nun folgende Tatsachen berücksichtigt:

- Ströme sind bewegte Ladungen, Ladungen sind akkumulierte Ströme
- Ausdrücke für die Zeitabhängigkeit von Feldern benötigen das Induktionsgesetz
- Als Ausdrücke kommen nur die vektoriellen Größen $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ und $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ in Frage

Aus diesem Grund erwartet man für die Zeitabhängigkeit der Maxwell-Gleichungen ausgehend von den Maxwell-Gleichungen für statische Fälle:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (6.1-1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 + ? \quad (6.1-2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.1-3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + ? \quad (6.1-4)$$

An Stelle der Fragezeichen werden die Terme $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ und $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ eingesetzt, es muß nur noch geklärt werden, welcher Term in welche Gleichung gehört und ob Konstanten vor den Termen benötigt werden. In den Gleichungen 6.1-1 und 6.1-3 können diese Terme nicht auftauchen, da es sich um skalare Gleichungen handelt, $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ und $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ jedoch vektorielle Größen sind.

6.1.1 Bewegte Ladungen

Zur erweiterten Betrachtung der Gleichungen der Elektrostatik

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \quad (6.1-5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

und der Magnetostatik

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \quad (6.1-6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

werden nun bewegte Ladungen betrachtet. Mit dem Wissen, daß ein Strom bewegte Ladung darstellt, gilt der Zusammenhang:

$$\frac{d}{dt}Q = I \quad (6.1-7)$$

Eine Überprüfung der Einheiten zeigt, daß der Zusammenhang sinnvoll ist. Berücksichtigt man das Vorzeichen des Stromes korrekt und betrachtet anstelle des Stromes und der Ladung die Stromdichte \vec{j} und die Ladungsdichte im Raum, so erhält man aus Gleichung 6.1-7:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r + \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d^2\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r + \int_V \nabla \cdot \vec{j} \, d^3r = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} \right) d^3r = 0$$

Für beliebige Volumina V erhält man damit die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

welche als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird. An dieser Stelle wird nun nicht mehr weiter auf diese Gleichung eingegangen, da dies erst Sinn macht, wenn alle zeitabhängigen Phänomene bezüglich der Erweiterung der statischen Gleichungen 6.1-1 bis 6.1-4 betrachtet wurden.

6.1.2 Kräfte auf Ladungen und Ströme

Aus den Kapiteln 4.1 und 4.2 sind die Kräfte und die Kraftdichten von Ladungen und Strömen bekannt, welche durch elektrische respektive magnetische Felder ausgeübt werden:

$\vec{f}_{\text{el}} = \rho \vec{E}$	Kraftdichte auf Ladungsdichte
$\vec{F}_{\text{el}} = Q \vec{E}$	Kraft auf eine Punktladung
$\vec{f}_{\text{magn}} = \vec{j} \times \vec{B}$	Kraftdichte auf eine Stromdichte
$\vec{F}_{\text{magn}} = I \delta \vec{s} \times \vec{B}$	Kraft auf einen Strom

Als Verallgemeinerung einer einzelnen bewegten Punktladung erhält man die Stromdichte einer beliebigen bewegten Ladungsverteilung mit:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (6.1-8)$$

Für eine homogene Ladungsverteilung, die sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt, gilt dann:

$$I = \rho \vec{A} \cdot \vec{v}$$

Setzt man Gleichung 6.1-8 in die Definition der Kraftdichte ein, betrachtet dies für eine Punktladung q und integriert über den gesamten Raum, so erhält man die magnetische Kraft auf eine Punktladung.

Diese Kraft wird allgemein als Lorentz-Kraft bezeichnet:

$$\vec{F}_{\text{magn}} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Befindet sich das geladene Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, dann addieren sich die elektrischen und magnetischen Kräfte und man erhält:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.1-9)$$

Mit dem Newton-Gleichgewicht

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d}{dt} \vec{v} = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$$

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens und \vec{r} die Trajektorie des Teilchens darstellen, erhält man die Bewegungsgleichung geladener Teilchen im EM-Feld :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.1-10)$$

Betrachtet man zusätzlich die Koordinatenabhängigkeit aller Größen, so erhält man:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = q \left(\vec{E}(\vec{r}(t), t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t), t) \right)$$

Da in diesem Fall $\vec{r}(t)$ die Punktladung im Ort beschreibt, werden die Felder also im Ort der Punktladung ausgewertet.

Sind die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_0 bekannt

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \frac{d}{dt} \vec{r}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

so kann die Bewegungsgleichung gelöst werden.

6.1.3 Bewegung von Teilchen im elektrischen Feld

Der einfachste Fall ist das Teilchen im konstanten, statischen \vec{E} -Feld ($\vec{B} = 0$):

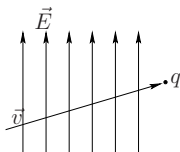


Abbildung 6.1: bewegte Ladung im konstanten elektrischen Feld

Aus dem Kraftansatz erhält man:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = q\vec{E}$$

Durch Integration über die Zeit erhält man die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \left[m \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_{t_0}^t &= q \left[\vec{E} t \right]_{t_0}^t \\ m \frac{d\vec{r}}{dt} &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{t_0} + q\vec{E}(t - t_0) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \vec{E}(t - t_0) \end{aligned}$$

Eine weitere Integration liefert den Ort:

$$r(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{E}(t - t_0)^2$$

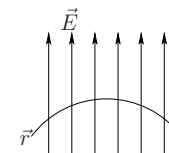


Abbildung 6.2: Wurfparabel für ein negativ geladenes Teilchen

Aus dem Energiesatz erhält man mit $\vec{E} = -\nabla\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \right) = -q \nabla \phi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -q \frac{d}{dt} (\phi(\vec{r}(t))) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + q\phi \right) = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{q\phi}_{\text{pot. Energie}} = \underbrace{\text{const.}}_{\text{gesamte Energie}} \end{aligned} \quad (6.1-11)$$

Gleichung 6.1-11 stellt den Energiesatz im statischen \vec{E} -Feld dar.

6.1.4 Bewegung von Teilchen im magnetischen Feld

Ein weiterer einfacher Fall ist die Bewegung in einem konstanten, statischen \vec{B} -Feld ($\vec{E}=0$). Hier sei der Spezialfall $\vec{B} = B\vec{e}_z$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v} &= \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} &= v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt für die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z &= \frac{q}{m} B (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \times \vec{e}_z \\ &= \frac{q}{m} B (-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x) \end{aligned} \quad (6.1-12)$$

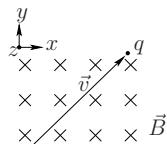


Abbildung 6.3: bewegte Ladung im konstanten Magnetfeld

Für die einzelnen Richtungskomponenten gilt demnach:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} B v_y = \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{q}{m} B v_x = -\omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dementsprechend muß die Geschwindigkeit $v_z = \text{const.}$ sein. Die Konstante $\omega_c = qBm^{-1}$ stellt dabei die Gyrationfrequenz oder Zyklotronfrequenz dar. Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y können über die Matrixgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_c \\ -\omega_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{6.1-13}$$

gelöst werden. Mit den Eigenwerten $\pm i\omega_c$ können die Lösungen formuliert werden:

$$v_x = \hat{v} \cos(\omega_c t + \alpha) \tag{6.1-14}$$

$$v_y = -\hat{v} \sin(\omega_c t + \alpha) \tag{6.1-15}$$

$$v_z = c_1 \tag{6.1-16}$$

Die Gleichung

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \hat{v}^2 \cos^2(\omega_c t + \alpha) + \hat{v}^2 \sin^2(\omega_c t + \alpha) + c_1^2 = \hat{v}^2 + c_1^2 = v^2 \tag{6.1-17}$$

zeigt, daß der Betrag der Geschwindigkeit und damit die Energie ($\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$) konstant bleibt.

Der Aufenthaltsort des Teilchens kann durch Integration berechnet werden:

$$x = x_0 + \frac{\hat{v}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \alpha) \tag{6.1-18}$$

$$y = y_0 + \frac{\hat{v}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \alpha) \tag{6.1-19}$$

$$z = z_0 + c_1 t \tag{6.1-20}$$

Die hier auftretende Konstante $r_L = \hat{v}\omega_c^{-1}$ ist der Gyrationradius, auch Larmor-Radius genannt, ist Radius der Kreisbahn des Teilchens.

In einem konstantem \vec{B} -Feld in \vec{e}_z -Richtung bewegt sich das Teilchen demnach

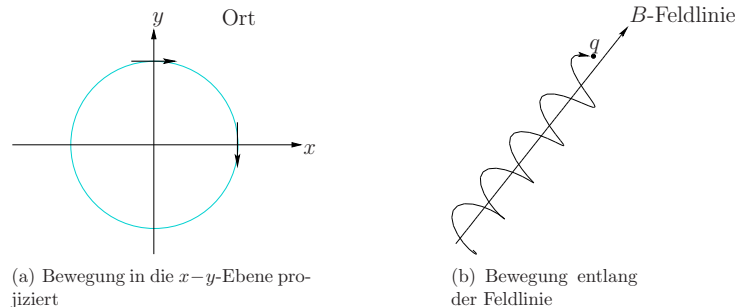


Abbildung 6.4: bewegtes Teilchen im konstantem Magnetfeld

- auf einer Kreisbahn in der $x - y$ -Ebene
- auf einer linearen Bahn entlang der z -Achse

Daraus ergibt sich, daß sich das Teilchen auf einer Spiralbahn bewegt.

Die Diskussion des Energiesatzes erfolgt in Kapitel 6.5 für beliebige elektromagnetische Felder.

Ein Anwendungsbeispiel der Bewegung von geladenen Teilchen im Feld ist die Kernfusion. Der grundlegende Prozeß kann dabei wie folgt formuliert werden:



Abbildung 6.5 soll diesen Reaktionsprozeß erläutern.

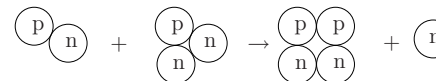
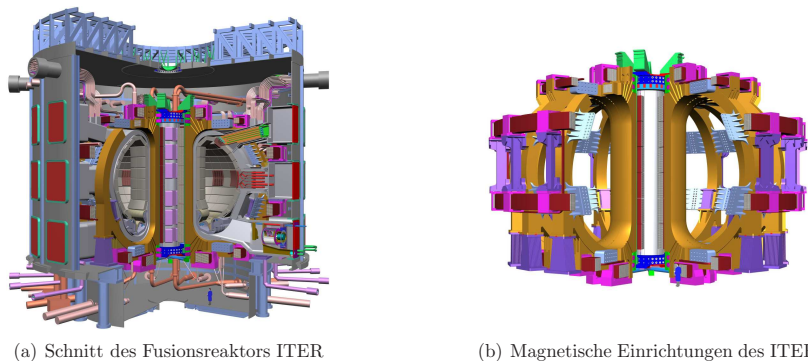


Abbildung 6.5: Grundprozeß der Kernfusion

Die Kernfusion findet bei Temperaturen von ca. $T \approx 10^7$ K statt, in einem entsprechend aufgebauten Plasmareaktor. Dieser ist torusförmig und durch entsprechende Magnetfelder werden die hochenergetischen Teilchen im Inneren des Feldes eingeschlossen. Bekannte Reaktoren sind unter den Begriffen Tokamak oder Stellarator zu finden, drei Beispiele, die in der Forschung verwendet werden, findet man unter den Namen ITER, JET und Textor.

6.2 Herleitung des Induktionsgesetzes

Bewegung einer Leiterschleife in einem Feld $\vec{B}(\vec{r})$



(a) Schnitt des Fusionsreaktors ITER

(b) Magnetische Einrichtungen des ITER

Abbildung 6.6: Mit freundlicher Genehmigung von ITER.

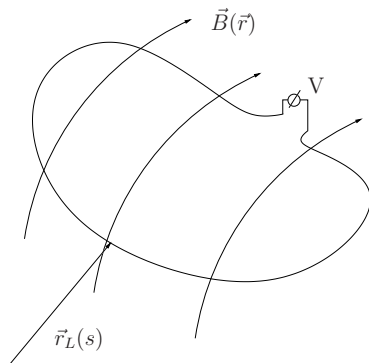


Abbildung 6.7: Leiterschleife im magnetischen Feld

Als Erläuterung zur Abbildung 6.7 wird der Begriff Induktion betrachtet. Natürlich muß dies dann allgemein betrachtet werden, somit kann auch das elektrische Feld sofort in die Überlegungen mit einbezogen werden.

Eine vereinfachte Situation ist gegeben für das konstante Magnetfeld in nur einer Koordinatenrichtung:

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z = \text{const.} \quad \text{für } x < 0$$

In Abbildung 6.8 ist diese vereinfachte Situation dargestellt. Der Leiterbügel in Abbildung

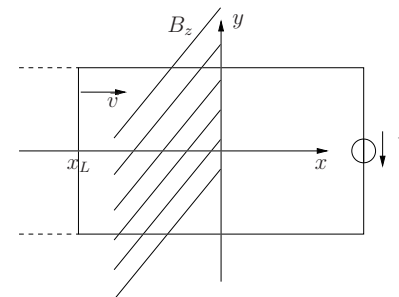


Abbildung 6.8: rechteckige Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

6.8 befindet sich in der Position x_L und bewegt sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Zunächst soll kein Strom fließen.

Weil das Magnetfeld statisch ist, gilt:

$$\int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_F \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{f} = 0 \tag{6.2-21}$$

Dies verdeutlicht die mikroskopische Darstellung des bewegten Leiters im Magnetfeld in Abbildung 6.9.

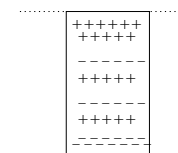


Abbildung 6.9: Ausschnitt aus einem bewegten Leiterstück im Magnetfeld

Der Leiter besitzt positive unbewegliche Ionen und negative bewegliche Elektronen auf die im Mittel keine Kraft wirken darf, da sonst ein Strom fließen würde. Die Gesamtkraft auf die Elektronen lautet:

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Daher gilt für \vec{E} und \vec{B} :

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (6.2-22)$$

Das Gesamtintegral über das elektrische Feld ist Null:

$$\int_{\text{Schleife}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Da die Schleife aus einem Leiterstück und dem Spannungsmeßgerät besteht, muß gelten:

$$\int_{\text{Leiterschleife}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{Spannungsmeßgerät}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Für die Leiterschleife ohne Meßgerät gilt daher mit dem Zusammenhang 6.2-22:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\text{Leiterschleife}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\text{Leiterschleife}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\text{Leiterschleife}} d\vec{s} \times \vec{v} \cdot \vec{B} \\ &= -LvB_z \end{aligned}$$

Mit der Tatsache, daß die Bewegung der Leiterschleife eine zeitliche Veränderung (Verschiebung) der eingeschlossenen Fläche bedeutet, gilt:

$$Lv = \frac{d}{dt} F$$

Daher erhält man für die Spannung V am Meßgerät:

$$\begin{aligned} V &= - \frac{d}{dt} FB_z \\ &= - \frac{d}{dt} (B_z F) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt nun nicht nur für den Spezialfall der bewegten Leiterschleife in Abbildung 6.8, sondern auch allgemein. Das sogenannte Induktionsgesetz kann deshalb mathematisch wie folgt definiert werden:

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_F \vec{B} \cdot d\vec{f}}_{\psi} = - \frac{d}{dt} \psi \quad (6.2-23)$$

Dabei stellt ψ den durchsetzenden magnetischen Fluß dar. Zum weiteren Verständnis wird auf die Zeitableitung des Integralterms in Gleichung 6.2-23 weiter eingegangen:

$$\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{f} + \int_F \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} d\vec{f} \quad (6.2-24)$$

Der Term $\frac{\partial}{\partial t} d\vec{f}$ kann dabei wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} d\vec{f} = \vec{v} \times d\vec{s} \quad (6.2-25)$$

Dementsprechend erhält man:

$$\begin{aligned} \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{f} + \int_F \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} d\vec{f} &= \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{f} + \int_{\partial F} \vec{B} \cdot \vec{v} \times d\vec{s} \\ &= \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{f} + \int_{\partial F} d\vec{s} \cdot \underbrace{(\vec{B} \times \vec{v})}_{\vec{E}} \end{aligned} \quad (6.2-26)$$

Gedankenexperiment zum Bezugssystem:

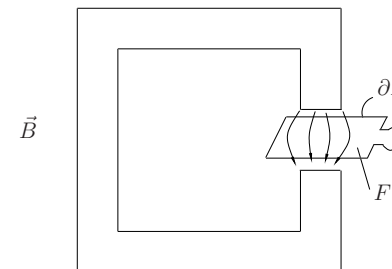


Abbildung 6.10: Leiterschleife im zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$

Die Erfahrung und das Relationsprinzip sagen, es findet auch eine Induktion statt, wenn sich das Magnetfeld bewegt und der Leiter in Ruhe ist. Es ist nicht wichtig, was sich von beiden bewegt, man muß lediglich das Bezugssystem passend wählen. Betrachtet man diesen Fall jedoch genauer, so stellt man aber fest, daß man hier doch eine Situation ganz neuer Art konstruiert hat, obwohl man das Ergebnis schon kennt. Das Magnetfeld ist hier dynamisch geworden.

Die induzierte Spannung (am Meßgerät in Abbildung 6.10) lautet demnach:

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= - \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_F \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (6.2-27)$$

Als Ergebnis erkennt man, daß ein sich änderndes \vec{B} -Feld ein elektrisches Feld hervorruft:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (6.2-28)$$

Dieses Ergebnis paßt auch zur Herleitung der statischen Gleichungen. Sofern das Magnetfeld zeitlich konstant ist, gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (6.2-29)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.2-30)$$

6.3 Herleitung der Verschiebungsstromdichte

Am Beispiel des Plattenkondensators sollen die Überlegungen zur Herleitungen der Verschiebungsstromdichte dargestellt werden.

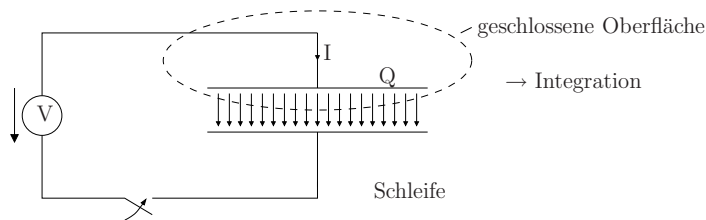


Abbildung 6.11: Plattenkondensator

Der Kondensator in Abbildung 6.11 lädt sich auf. Dabei hängt die Ladung des Kondensators wie folgt mit dem Strom zusammen

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (6.3-31)$$

und ist durch die Oberflächenladung σ_f gegeben:

$$Q = \sigma_f F = \text{Flächenladungsdichte} \cdot \text{Oberfläche} \quad (6.3-32)$$

Aus der Übergangsbedingung am Rand des Kondensators kann σ_f bestimmt werden:

$$\sigma_f = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} \quad (6.3-33)$$

Das \vec{E} -Feld wird demnach durch die Ladung hervorgerufen:

$$|E| = \frac{Q}{A} \quad (6.3-34)$$

Durch Integration über die Fläche F des Kondensators folgt:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ &= I = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (6.3-35)$$

Aus Kapitel 4.2 ist bekannt, daß für eine geschlossene Oberfläche $\int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0$ gilt. Verläuft diese Oberfläche durch den Kondensator (siehe Abbildung 6.11), so kann dieser Zusammenhang nicht gehalten werden, da im Kondensator kein Strom fließt. Der Widerspruch, daß $\int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \neq 0$ gilt, wenn die geschlossene Oberfläche F durch den Kondensator

verläuft (siehe Abb. 6.11), wird aufgelöst durch die Einführung des Verschiebungsstroms. Die Änderung von \vec{E} hat Stromqualität:

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} (\sigma_f F) = \frac{d}{dt} (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} F) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{F} \\ &= \int_{\text{Fläche}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (6.3-36)$$

Deshalb wurde der Verschiebungstrom von Faraday wie folgt eingeführt:

$$\vec{j}_{\text{Verschiebung}} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (6.3-37)$$

Der Integralbeitrag ergibt sich zu:

$$\int \vec{j}_{\text{Verschiebung}} \cdot d\vec{f} = F \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = F \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{F} \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (6.3-38)$$

Die gesamte Stromdichte \vec{j} setzt sich aus dem Leitungsstrom und dem Verschiebungsstrom zusammen. Daher kann nun die statische Maxwell-Gleichung

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad (6.3-39)$$

um die Zeitabhängigkeit erweitert werden:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (6.3-40)$$

6.4 Die Kontinuitätsgleichung

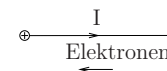


Abbildung 6.12: Strom von Elektronen

Abbildung 6.12 symbolisiert die Kontinuitätsgleichung: ein Strom I fließt zwischen zwei Ladungen und transportiert eine gewisse Menge von einer Seite zur anderen. Da nur ein Strom zwischen den beiden Ladungen existiert und sonst keine anderen Verluste vorhanden sein können, ist die Ladungserhaltung erfüllt. Die Gesamtzahl der Elektronen (Ladungsträger) bleibt erhalten. Daraus folgt, daß die Kontinuitätsgleichung die logische Grundlage des Ladungsbegriffs ist. Die logische Konsequenz ist, daß die Maxwell-Gleichungen die Kontinuitätsgleichung erfüllen müssen (siehe Kapitel 6.1).

Bildet man die Zeitableitung der Raumladungsdichte ρ

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (6.4-41)$$

und die Divergenz der Stromdichte

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (6.4-42)$$

so erhält man durch Addition beider Gleichungen die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6.4-43)$$

Daran sieht man, daß die Kontinuitätsgleichungen eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen ist.

6.5 Energieprinzip bezüglich elektromagnetischer Felder

Beginnend mit der Diskussion von bewegten geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld, wird im Folgenden auf die Energiebilanzgleichung eingegangen.

Aus Kapitel 2.8 ist folgende Gleichung bekannt:

$$\text{Änderung der Energiedichte} - \text{Nettofluß an Energie} = \text{vom Feld geleistete Arbeit} \quad (6.5-44)$$

Dazu wird zunächst Bekanntes aus der Physik betrachtet. Ein Massepunkt mit der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ im Raum (siehe Abbildung 6.13).

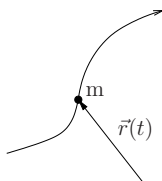


Abbildung 6.13: Massepunkt m auf der Bahn $\vec{r}(t)$

Die entsprechende mechanische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ erhält man aus der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (6.5-45)$$

Durch Einsetzen erhält man mit dem Zusammenhang $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$:

$$\begin{aligned} & m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}(\vec{r}) \quad | \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow & m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \equiv \frac{d}{dt} W_{kin} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{mech. Leistung}} \end{aligned} \quad (6.5-46)$$

Betrachtet man dazu die Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld, erhält man:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{m} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.5-47)$$

Daraus ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) &= q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{E} \cdot \vec{I} \vec{t} \end{aligned} \quad (6.5-48)$$

wobei \vec{t} die Richtung des Stroms angibt.

Als ein zusätzlicher Aspekt dieser Überlegungen sei hier erwähnt, daß nur das \vec{E} -Feld eine Änderung der Energie hervorruft. Das \vec{B} -Feld ändert nur die Richtung. Betrachtet man dieses Ergebnis für den Fall einer beliebigen Stromdichte, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \end{aligned} \quad (6.5-49)$$

Auf der rechten Seite entsteht so der Term $\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Konstruiert man für das \vec{B} -Feld einen ähnlichen Term mit $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, so erhält man aus den Maxwell-Gleichungen 6.9-89 und 6.9-90 durch Multiplikation mit $\varepsilon_0 \vec{E}$ und $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$:

$$\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.5-50)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{B} \quad (6.5-51)$$

Die Terme jeweils auf der linken Seite können durch eine Zeitableitung wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{B}$$

Durch die Faktoren ε_0 und $\frac{1}{\mu_0}$ wurde darauf geachtet, daß die Einheiten der beiden Terme gleich sind. Durch Addieren der beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{B})}_{-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.5-52)$$

Gleichung 6.5-52 ist die Zeitableitung der Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes. Diese Gleichung wird im Allgemeinen als Energiesatz bezeichnet und lautet nach vektoranalytischer Umformung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.5-53)$$

Vergleicht man die Struktur des Energiesatzes mit der der Ladungserhaltung,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\vec{j}) = 0 \quad (6.5-54)$$

so erkennt man die selbe Struktur:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dots) + \nabla \cdot (\dots) = \dots \quad (6.5-55)$$

Diese Struktur ist typisch für Erhaltungssätze jeglicher Art.

Den Termen im Energiesatz aus Gleichung 6.5-53 werden nun entsprechend ihrer physikalischen Eigenschaften Namen gegeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2}_{w_{el}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2}_{w_{magn.}} \right) + \nabla \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}_{\vec{S}} \right) = - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{P_\Omega} \quad (6.5-56)$$

Die Variable w_{el} bezeichnet die Energiedichte des \vec{E} -Feldes, $w_{magn.}$ die Energiedichte des \vec{B} -Feldes, \vec{S} die Energieflußdichte (Poynting-Vektor) des EM-Feldes und P_Ω den Energieverlust des Feldes durch Arbeit am mechanischen System.

Integriert man die Energiebilanzgleichung 6.5-56 über den gesamten Raum so erhält man die Energie des Systems:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{f} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r \quad (6.5-57)$$

6.6 Leistung des Feldes

Betrachtet wird nun der Term $-\vec{j} \cdot \vec{E}$, welcher auch als die Leistung des Feldes bezeichnet wird. Entsprechend kann $+\vec{j} \cdot \vec{E}$ als die Leistung bezeichnet werden, welche die Materie gewinnt.

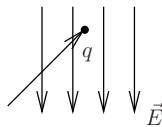


Abbildung 6.14: Punktladung im elektrischen Feld

Aus Kapitel 2.1.1 ist die Definition der Kraft eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld bekannt:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (6.6-58)$$

Aus der Physik ist die Definition der Arbeit bekannt: Arbeit = Kraft · Weg

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = q\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \quad (6.6-59)$$

Außerdem ist aus der Physik die Definition der Leistung bekannt: Leistung = $\frac{\text{Kraft} \cdot \text{Weg}}{\text{Zeit}}$

$$\frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = q\vec{E} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (6.6-60)$$

Die Leistung die ein einzelnes geladenes Teilchen aufnimmt ist damit definiert durch:

$$q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (6.6-61)$$

Für N freie Punktladungen können die Ladungsdichte und die Stromdichte notiert werden:

$$\rho_f(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \equiv \rho_f \quad (6.6-62)$$

$$\vec{j}_f(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \equiv \vec{j}_f \quad (6.6-63)$$

Man kann zeigen, daß die Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} &= \sum_{k=1}^N q_k \left[\frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N q_k \left[-\nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}_k + \frac{d}{dt} \vec{r}_k \cdot \nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.6-64)$$

Wertet man die Leistungsdichte $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ die dem System entnommen wird aus, so erhält man mit dem lokalen Energiesatz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.6-65)$$

Durch Integration über den gesamten Raum erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \text{Oberflächenterme} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r \quad (6.6-66)$$

Damit läßt sich vermuten, daß der Term $-\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r$ die Energie darstellt, welche das Feld verliert. Diese Energie muß natürlich als Energie der Teilchen wieder auftauchen:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_k \right)^2 \quad (6.6-67)$$

Wertet man den Energiegewinn aus, so sieht man:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d^3r &= \int_V \underbrace{\sum_{k=1}^N q_k \vec{v}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k)}_{\text{Stromdichte}} \cdot \vec{E}(\vec{r}_k) d^3r \\ &= \sum_{k=1}^N q_k \vec{v}_k \vec{E}(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (6.6-68)$$

Das gleiche Ergebnis kommt zustande, wenn man die Energie der Teilchen genauer betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_k \right)^2 &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \vec{r}_k \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \vec{r}_k \cdot q_k \left(\vec{E}(\vec{r}_k) + \frac{d}{dt} \vec{r}_k \times \vec{B}(\vec{r}_k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \vec{r}_k q_k \cdot \vec{E}(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (6.6-69)$$

Dies zeigt, daß $+\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3r$ die Leistung ist, die das Feld an den N Ladungen leistet, und $-\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3r$ die Leistung ist, die dem Feld entnommen wird. Der Term $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ ist somit die Leistungsdichte, die dem Feld entnommen wird. Die Vermutung von zuvor ist damit bestätigt.

Die Zeitableitungen der Energie und der Energiedichte ergeben sich damit zu:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \, d^3r = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3r \quad (6.6-70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.6-71)$$

6.7 Der Energiestrom, der Poynting-Vektor

Zuletzt wird nun der Anteil $\vec{E} \times \vec{B}$ der beiden Gleichungen 6.6-70 und 6.6-71 betrachtet. Abbildung 6.15 ist zu entnehmen, daß $\vec{E} \times \vec{B}$ eine plausible Richtung des Energiestroms ist. Außerdem ist die Verknüpfung der beiden Größen über das Kreuzprodukt die einzige Möglichkeit eine vektorielle Größe zu erhalten, woraus sich eine eindeutige Richtung des Energiestroms ableiten läßt.

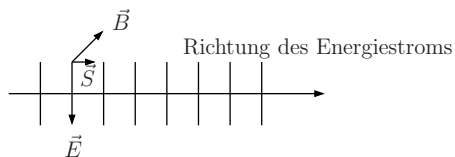


Abbildung 6.15: Veranschaulichung der Richtung des Energiestroms

Dimensionsbetrachtung:

$$\left[\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] = \frac{\text{A m Vs}}{\text{V m}^2} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Der Term $\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ hat die Einheit einer Energiedichte und wird im Allgemeinen als Poynting-Vektor \vec{S} bezeichnet:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (6.7-72)$$

Es beschreibt die Energieänderung des Systems durch Ausbreitung.

6.8 Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben alle bisher bearbeiteten Phänomene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \end{aligned} \quad (6.8-73)$$

Für Materialien, die nicht Vakuumeigenschaften zeigen gilt:

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \quad (6.8-74)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \nabla \times \vec{M} \quad (6.8-75)$$

In diesen Darstellungen taucht nun aus Konsequenz der Term $\frac{\partial}{\partial t} \vec{P}$ auf, der bisher noch nicht behandelt wurde. Für ein polarisierbares Material im elektrischen Feld kann man sich vorstellen, daß eine entsprechende Ladungsverteilung auftaucht. Natürlich muß mit $\rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$ und der Kontinuitätsgleichung gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6.8-76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) + \nabla \cdot (\vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \nabla \times \vec{M}) = 0 \quad (6.8-77)$$

Dabei wurde formal zunächst ein beliebiges $\vec{a}(t)$ eingeführt, welches die Eigenschaften der Polarisation allgemein darstellt. Es ist bekannt, daß $\nabla \cdot \nabla \times \vec{M} = 0$ sein muß. Mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_f + \nabla \cdot \vec{j}_f = 0 \quad (6.8-78)$$

bedeutet dies:

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \quad (6.8-79)$$

Die Maxwell-Gleichungen für beliebige Anordnung in beliebigen Materialien lauten damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \vec{j} = \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} + \nabla \times \vec{M} \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (6.8-80)$$

+Informationen über die Quellen

Ladungserhaltung wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6.8-81)$$

Energieerhaltung wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}_{\text{Energierostromdichte}} \right) = - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{Leistungsdichte}} \quad (6.8-82)$$

Kraftdichte:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (6.8-83)$$

Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im Feld:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = q \left(\vec{E}(\vec{r}(t)) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t)) \right) \quad (6.8-84)$$

Leistungsdichte:

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.8-85)$$

Aus der Definition der Fernkraft entsteht nach vielen Jahren der geschichtlichen Veränderung der Feldbegriff. Der Raum ist Träger von Eigenschaften und wird durch dynamische Gleichungen beschrieben, man spricht von dem Lokalisitätsprinzip.

Die Sonderfälle der Elektrostatik und Magnetostatik bleiben erhalten. Indem man den Grenzwert $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ bildet, erhält man die statischen Gleichungen. Weitere Sonderfälle sind dort zu erwarten, wo einzelne Terme der Gleichungen zu vernachlässigen sind. Zum Beispiel fällt bei vielen Anwendungen der Energietechnik der Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ weg. Auch in der Mikroelektronik kann man meistens Vereinfachungen annehmen. Die HF-Technik dagegen benutzt das volle System.

Lokalisitätsprinzip: Zeitliche Änderung von Feldgrößen wird bestimmt durch lokale Quellen und lokale Feldänderungen. $\nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

Die wichtigsten zusätzlichen Gleichungen sind dem zusammenfassenden Kapitel 5 zu entnehmen.

6.9 Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

Aus dem System der Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.9-86)$$

kann man einige wichtige Eigenschaften ableiten:

- Gleichungen koppeln Ströme und Ladungen $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ (Kontinuitätsgleichung) \rightarrow Ladungserhaltung
- koppeln an mechanische Systeme \rightarrow Energieerhaltung

Durch Umstellen können die Maxwell-Gleichungen auch in anderer Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.9-87)$$

Aus dieser 'Art', die Maxwell-Gleichungen zu schreiben, können weitere Eigenschaften abgelesen werden:

- E-Feld hat Quellen in den Ladungen
- E-Feld hat Wirbel in $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- B-Feld hat keine Quellen, es gibt keine magnetischen Monopole, zumindest so wenige, daß man bis heute keine nachweisen konnte
- B-Feld hat Wirbel in \vec{j} und $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Aus einer weiteren Umstellung der Gleichungen bezüglich zeitlichem Verhalten und vorhandener Quellen ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = c^2 \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} \quad (6.9-88)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} \quad (6.9-89)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (6.9-90)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.9-91)$$

In dieser Schreibweise erkennt man, daß die Maxwell-Gleichungen 6.9-90 und 6.9-91 als Zwangsbedingungen bezüglich des zeitlichen Verhaltens der elektrischen und magnetischen Felder aufgefaßt werden können, denn es gilt immer:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho) = 0 \quad (6.9-92)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (6.9-93)$$

Daraus leitet man das folgende Resultat ab:

Theorem:

Annahme: Zur Zeit $t = t_0$ sind im ganzen Raum die Felder \vec{E} und \vec{B} bekannt, und außerdem sind für alle Zeiten die Strom- und Ladungsdichten bekannt. Dann sind für alle Zeiten die \vec{E} und \vec{B} Felder berechenbar.

Das bedeutet, die elektromagnetischen Gleichungen sind deterministisch.

6.10 Lernziele Kapitel 6

1. Was bedeutet Elektrodynamik?
2. Den Zusammenhang der Begriffe "bewegte Ladung" und "Strom" verstehen
3. Wie bewegt sich ein geladenes Teilchen im elektrischen, im magnetischen und im kombinierten elektromagnetischen Feld?
4. Wissen, welchen Einfluß elektrische und magnetische Felder auf die Energie geladener Teilchen haben
5. Wissen, wie die Bewegungsgleichungen für geladene Teilchen im EM-Feld lauten!
6. Wissen, wie die (dynamischen) Maxwell-Gleichungen für beliebige Materialien lauten
7. Wissen wie die Kontinuitätsgleichung lautet
8. Die Energiebilanzgleichung für elektromagnetische Felder herleiten können
9. Was ist die Leistung des Feldes und wie ist sie definiert
10. Was ist der Energiestrom und wie ist er definiert

7 Feldenergie elektrischer und magnetischer Anordnungen

Bevor auf die Begriffe zur Beschreibung von Feldenergie eingegangen wird, ist es notwendig auf die Eigenschaften einiger häufig verwendeter Materialien kurz einzugehen.

7.1 Materialien

7.1.1 Vakuum

Im Vakuum gibt es nur freie Ladungen und Ströme (siehe auch Plasma)

$$\vec{P} = 0 \quad (7.1-1)$$

$$\vec{M} = 0 \quad (7.1-2)$$

7.1.2 Isolator

$$\rho_f = 0 \quad (7.1-3)$$

$$\vec{j}_f = 0 \quad (7.1-4)$$

$$\vec{P} \neq 0 \quad (7.1-5)$$

$$\vec{M} = 0 \quad (7.1-6)$$

Beispiele

- Glas
- Bernstein
- Diamant

7.1.3 Magnetisierbare Materialien

$$\vec{M} \neq 0 \quad (7.1-7)$$

Für lineare Medien gilt:

$$\vec{M} = \chi_{magn} \vec{B} \quad (7.1-8)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \mu_0 \mu_r \vec{B} \quad (7.1-9)$$

Beispiele

- Eisen
- Ferrite
- Nickel

7.1.4 Dielektrika, polarisierbare Materialien

Dielektrika sind polarisierte Medien

$$\vec{P} \neq 0 \tag{7.1-10}$$

Für lineare Medien gilt:

$$\vec{P} = \chi_{el} \vec{E} \tag{7.1-11}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{7.1-12}$$

χ_{el} : elektrische Suszeptibilität

$$\rho = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{7.1-13}$$

7.1.5 Leitfähige Materialien

Diese Materialien werden über die Leitfähigkeit $\kappa(\vec{r})$ beschrieben. Es gilt dann:

$$\vec{j} = -en_e \vec{v}_e \tag{7.1-14}$$

$$= en_e \mu_e \vec{E} \tag{7.1-15}$$

$$= \kappa(\vec{r}) \vec{E} \tag{7.1-16}$$

Der Strom in einem solchen Material wird durch die Elektronen getragen, der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der Geschwindigkeit der Elektronen im Material ist durch die Beweglichkeit μ_e gegeben. Materialien dieser Art werden als Ohm'sche Leiter bezeichnet.

7.1.6 Halbleiter

Beispiel Feldeffekttransistor:

Zur Vorstellung, wie die Felder bei Halbleiterbauelementen wirken, ist in [Abbildung 7.1\(a\)](#) die Feldstruktur eines Feldeffekttransistors dargestellt. Damit man sich dies für einen real

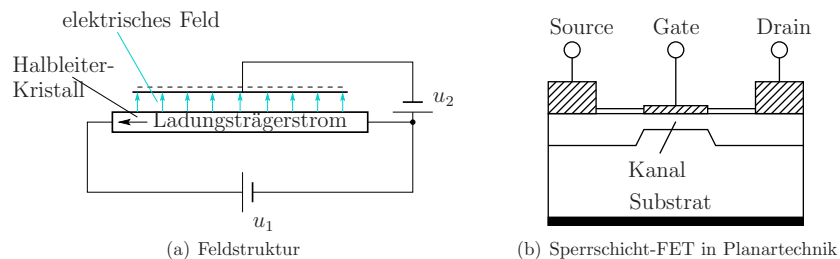


Abbildung 7.1: Feldeffekttransistor

existierenden Transistor vorstellen kann, ist in [Abbildung 7.1\(b\)](#) ein Schnitt durch einen Sperrschicht-FET in Planartechnik dargestellt.

7.1.7 Plasma

Ein Plasma besteht aus ionisiertem Gas und freien Elektronen. Dabei läßt sich sowohl für die Ionen, als auch die Elektronen eine Teilchendichte n_i respektive n_e angeben. Ebenso haben die Ionen wie auch die Elektronen eine Geschwindigkeit, diese wird mit v_i und v_e beschrieben. Damit ergibt sich für die Raumladungsdichte und die Stromdichte eines Plasmas:

$$\vec{P} = 0 \tag{7.1-17}$$

$$\vec{M} = 0 \tag{7.1-18}$$

$$\rho = -en_e + en_i \tag{7.1-19}$$

$$\vec{j} = -en_e \vec{v}_e + en_i \vec{v}_i \tag{7.1-20}$$

7.2 Der Begriff der Kapazität

Ausgehend von einer beliebigen Situation stellt sich die Frage: Welche Feldverteilung stellt sich in Abhängigkeit von der Ladung der Körper ein (siehe [Abbildung 7.2](#))?

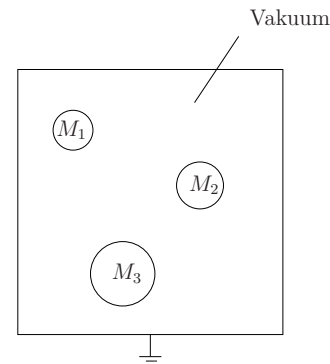


Abbildung 7.2: geerdeter Kasten mit geladenen Metallkugeln M_k

Das in [Abbildung 7.2](#) gezeigte Beispiel kann mathematisch wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi|_{\text{Rand}} &= 0 \\ \phi_{M_\alpha} &= V_\alpha \end{aligned} \tag{7.2-21}$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz besagt, daß das Problem lösbar ist, mit der einzigen Lösung ϕ . Zur Charakterisierung der einzelnen Körper M_k wird dann der Begriff der Kapazität eingeführt. Als einführendes Beispiel wird dazu der Kugelkondensator betrachtet.

7.2.1 Das Potential und das elektrische Feld eines Kugelkondensators

Zur Veranschaulichung soll zuerst der konkrete Fall eines Kugelkondensators betrachtet werden. Dessen äußere Elektrode sei geerdet, die innere habe das Potential ϕ_0 und auf ihr befinde sich die Ladung Q . Der Zwischenraum sei raumladungsfrei.

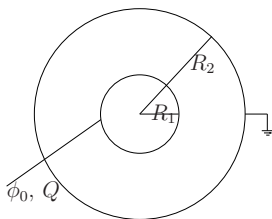


Abbildung 7.3: Kugelkondensator

Es bietet sich an, die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten zu lösen. Mit $\phi = \phi(r)$ gilt:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (7.2-22)$$

Es gelten die Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \phi(r = R_2) &= 0 \\ \phi(r = R_1) &= \phi_0 \end{aligned} \quad (7.2-23)$$

Die Lösung der Laplace-Gleichung kann auf einfache Weise berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0 \\ r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= c_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{c_1}{r^2} \\ \phi &= -\frac{c_1}{r} + c_2. \end{aligned} \quad (7.2-24)$$

Durch das Auswerten der Randbedingungen erhält man

$$\begin{aligned} \phi(r = R_2) = 0 &= -\frac{c_1}{R_2} + c_2 \\ \phi(r = R_1) = \phi_0 &= -\frac{c_1}{R_1} + c_2 \end{aligned} \quad (7.2-25)$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, so erhält man:

$$\phi_0 = -\frac{c_1}{R_1} + \frac{c_1}{R_2}$$

Für c_1 und c_2 ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \\ c_2 &= \frac{\phi_0}{1 - \frac{R_2}{R_1}} = \frac{c_1}{R_2} \end{aligned} \quad (7.2-26)$$

Der Potentialverlauf des Kugelkondensators genügt damit der Gleichung

$$\phi = -\frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{r} + \frac{\phi_0}{1 - \frac{R_2}{R_1}} \quad (7.2-27)$$

oder

$$\phi = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) \quad (7.2-28)$$

Zur Berechnung der Oberflächenladungsdichte der beider Elektroden wird die Maxwell-Gleichung

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (7.2-29)$$

an den Kanten der Elektrode ausgewertet (siehe auch Kapitel 2.7.6). Abbildung 7.4 zeigt einen entsprechenden Ausschnitt. Mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß und der Tatsache,

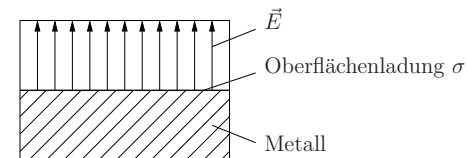


Abbildung 7.4: Ausschnitt aus dem Kugelkondensator

che, daß nur auf den Elektrodenoberflächen Ladungen sitzen, kann die zuvor genannte Maxwell-Gleichung ausgewertet werden:

$$\int_V \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \, d^3r = \int_V \rho \, d^3r = Q \equiv \sigma_f A \quad (7.2-30)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \varepsilon_0 E_r A = \sigma_f A \quad (7.2-31)$$

Dies führt auf die Bestimmungsgleichung für die Oberflächenladungsdichte an einer Metallelektrode:

$$\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} = \sigma_f \quad (7.2-32)$$

Für den Spezialfall des Kugelkondensators gilt:

$$\varepsilon_0 E_r = \sigma_f \quad (7.2-33)$$

Diese Überlegungen sollen nun noch einmal zeigen, wie die Randbedingungen mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen berechnet werden können. Allgemein empfiehlt es sich, die Formulierung

$$\sigma_f = \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)$$

zu verwenden, wobei der Normalenvektor \vec{n} in dieser Darstellung von Medium 2 nach Medium 1 zeigt. Da sich im Kondensator ein Vakuum befindet, lautet die Gleichung:

$$\sigma_f = \vec{n} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_2)$$

Zur Berechnung ist deshalb das elektrische Feld \vec{E} notwendig, welches wie folgt berechnet werden kann:

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{r^2} \quad (7.2-34)$$

Bei dieser Berechnung wurde Kugelsymmetrie ausgenutzt, wodurch sich der Zusammenhang des elektrischen Feldes mit dem Potential auf die radiale Komponente reduziert (siehe Abbildung 7.5):

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r = -\nabla \phi = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \phi$$

E_r berechnet sich damit an den beiden Elektroden zu:

$$E_r|_{r=R_1} = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{R_1^2} > 0 \quad (7.2-35)$$

$$E_r|_{r=R_2} = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{R_2^2} > 0 \quad (7.2-36)$$

Für die Innenelektrode wird Abbildung 7.6(a) zu Hilfe genommen. Daraus liest man ab,

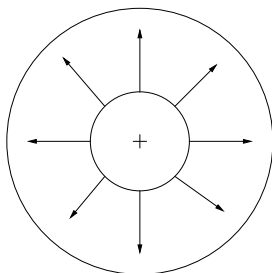


Abbildung 7.5: Feldverlauf des Kugelkondensators

daß der Normalenvektor in radialer Richtung zeigt

$$\vec{n} = \vec{e}_r \quad (7.2-37)$$

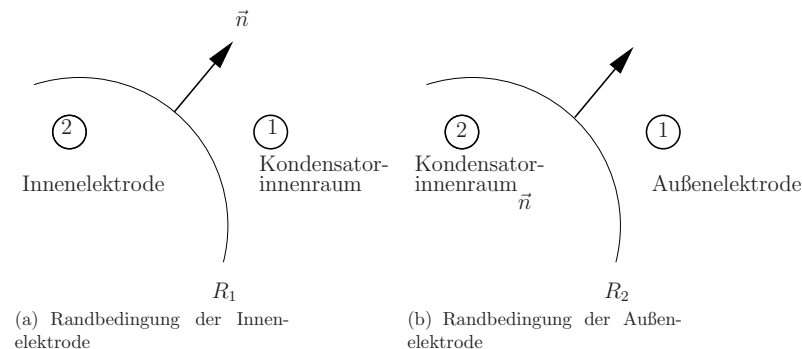


Abbildung 7.6: Randbedingungen des Kugelkondensators

und daß das elektrische Feld \vec{E}_2 im Metall gleich Null sein muß, daher gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{f,R_1} &= \vec{n} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_2) \\ &= \vec{e}_r \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}_1) \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}_r|_{r=R_1} \\ &= \varepsilon_0 \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{R_1^2} \end{aligned} \quad (7.2-38)$$

Die Gesamtladung auf der Innenelektrode beträgt damit

$$Q_{R_1} = 4\pi R_1^2 \sigma_{F|1} = 4\pi \varepsilon_0 \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (7.2-39)$$

welche in der Aufgabenstellung mit Q bezeichnet wurde. Auf der äußeren Kugel ist $\vec{n} = -\vec{e}_r$ nach innen gerichtet. Das bedeutet, daß analog zur Abbildung bezüglich der Innenelektrode für die Außenelektrode Abbildung 7.6(b) zu Hilfe genommen wird.

Entsprechend berechnet sich die Oberflächenladungsdichte auf der Außenelektrode zu:

$$\sigma_{F|R_2} = -\varepsilon_0 \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{R_2^2} \quad (7.2-40)$$

Die Gesamtladung der Außenelektrode beträgt damit:

$$Q_2 = -4\pi R_2^2 \sigma_{F|2} = -4\pi \varepsilon_0 \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = -Q$$

Die Ladung des Kondensators ist demnach:

$$Q = 4\pi \varepsilon_0 \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (7.2-41)$$

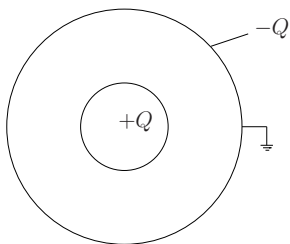


Abbildung 7.7: Ladungsverteilung beim Kugelkondensator

7.2.2 Die Kapazität eines Kugelkondensators

Mit Hilfe der Gleichung

$$Q = CU \quad (7.2-42)$$

kann die Kapazität eines Kondensators berechnet werden. Die Ladung Q entspricht jener auf der positiven Elektrode. Für den Kugelkondensator aus Kapitel 7.2.1 ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} C &= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ &= \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \end{aligned} \quad (7.2-43)$$

Die Beschreibung des Kondensators mit einem effektivem Abstand d und einer effektiven

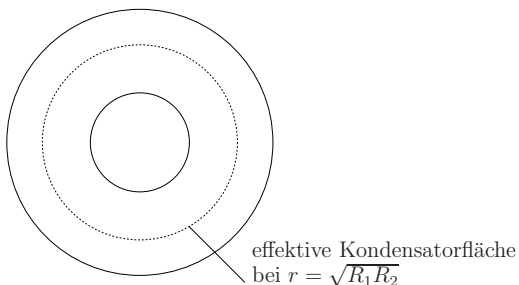


Abbildung 7.8: Kugelkondensator mit effektiver Kondensatorfläche

Oberfläche A führt zu den Größen (siehe Abbildung 7.8):

$$\begin{aligned} d &= R_2 - R_1 \\ A &= 4\pi R_1 R_2 \end{aligned} \quad (7.2-44)$$

Damit sind von einem Kugelkondensator die Kapazität, das Potential und das elektrische Feld bekannt:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (7.2-45)$$

$$\phi = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) \quad (7.2-46)$$

$$\vec{E} = \frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (7.2-47)$$

Die im Kugelkondensator gespeicherte Energie berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 d^3r \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \int_{R_1}^{R_2} E_r^2 r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \left(\frac{\phi_0}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 4\pi \frac{\phi_0^2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \\ &= \frac{1}{2} C \phi_0^2 \end{aligned} \quad (7.2-48)$$

7.2.3 Verallgemeinerung der Kapazität

Als Beispiel wird hier ein metallisch abgeschlossener Raum betrachtet, in dem N weitere Raumgebiete durch eine abgeschlossene metallische Oberfläche eingebracht sind (siehe Abbildung 7.9). Die folgenden Überlegungen betrachten die Kapazitäten und die Ladungen auf den einzelnen Objekten in diesem Raum. Aus den vorherigen Kapiteln weiß man, daß eine Gesamtlösung für das elektrostatische Potential existiert. Definiere N Funktionen Ψ_k $k = 1, 2, \dots, N$, wobei jede dieser Funktionen die Laplace-Gleichung und die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \Psi_k &= 0 \quad \text{im ganzen Raum} \\ \Psi_k|_{\text{Fläche } k} &= 1 \\ \Psi_k|_{\text{andere Oberflächen}} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2-49)$$

Aufgrund des Beweises der Existenz und der Eindeutigkeit der Poisson-Gleichung und damit auch der Laplace-Gleichung (Kapitel 5.5) weiß man, daß eine Lösung der Form

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N U_k \Psi_k(\vec{r}) \quad (7.2-50)$$

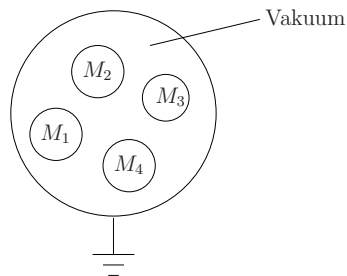


Abbildung 7.9: Körper in einem abgeschlossenen Raum

existieren muß, welche wiederum die Laplace-Gleichung erfüllt:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0 \quad (7.2-51)$$

Die Randbedingung der Fläche l kann wie folgt definiert werden:

$$\phi(\vec{r})|_{\vec{r} \in F_l} = \sum_{k=1}^N U_k \underbrace{\psi_k(\vec{r}) \varepsilon F_l}_{\delta_{k,l}} = U_l \quad (7.2-52)$$

Aufgabe: Berechnung der Ladung auf der Fläche F_l

$$\begin{aligned} Q_l &= \int_{\text{Fläche } F_l} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{f} \\ &= - \int_{\text{Fläche } F_l} \varepsilon_0 \sum_{k=1}^N U_k \nabla \psi_k \cdot d\vec{f} \\ &= \sum_{k=1}^N U_k \left(-\varepsilon_0 \int_{\text{Fläche } F_l} \nabla \psi_k \cdot d\vec{f} \right) \end{aligned} \quad (7.2-53)$$

Aus dem Zusammenhang der Ladung Q und dem Potential ϕ weiß man, daß $Q = C U$ gilt. Aus diesem Grund wird der Ausdruck in Klammern in der letzten Zeile von Gleichung 7.2-53 als Kapazitätskoeffizient $C_{k,l}$ bezeichnet:

$$Q_l = \sum_{k=1}^N C_{k,l} U_k \quad (7.2-54)$$

Anwendungsbeispiele:

- Halbleiter-Produktion
- Internetconnect -Problem
- Minimierung der parasitären Kapazitäten

Nun sei noch die Energie dieser Elektrodenkonfiguration betrachtet. Das Potential und das elektrische Feld sind wie zuvor gegeben mit:

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{k=1}^N U_k \psi_k(\vec{r}) \\ \vec{E} &= - \sum_{k=1}^N U_k \nabla \psi_k(\vec{r}) \end{aligned}$$

Daher kann die Energie im System wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} W_{el} &= \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 d^3 r \\ &= \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{k=1}^N U_k \nabla \psi_k(\vec{r}) \cdot \sum_{l=1}^N U_l \nabla \psi_l(\vec{r}) d^3 r \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{k=1, l=1}^N U_k U_l \int_V \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_l d^3 r \end{aligned}$$

Das Volumenintegral auf der rechten Seite kann als Oberflächenintegral geschrieben werden:

$$\int_V \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_l d^3 r = \int_V \left[\nabla \cdot ((\nabla \psi_k) \psi_l) - \underbrace{(\nabla^2 \psi_k) \psi_l}_{\rightarrow 0} \right] d^3 r = \int_{\partial V} (\nabla \psi_k) \psi_l d^2 r$$

Da es sich bei der betrachteten Oberfläche um metallische Oberflächen handelt, sind die ψ_k Schalterfunktionen, und es gilt:

$$\int_V \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_l d^3 r = \int_{\text{Fläche } F_l} \nabla \psi_k \cdot d^2 r$$

Für das betrachtete System gilt für die Kapazitätskoeffizienten

$$C_{k,l} \equiv C_{l,k}$$

Damit erhält man für die Energie des betrachteten Systems:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} c_{k,l} U_k U_l \quad (7.2-55)$$

Mit der Ladung $Q_l = \sum_{k=1}^N C_{k,l} U_k$ auf der Elektrode l ergibt sich weiterhin:

$$\begin{aligned} C_{k,l} &= \int_V \nabla \psi_k \cdot \nabla \psi_l d^3 r = \int_{\text{Fläche } F_l} \nabla \psi_k \cdot d^2 f \\ W_{el} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_{k,l} U_k U_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N U_k Q_k \end{aligned} \quad (7.2-56)$$

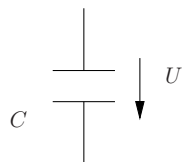
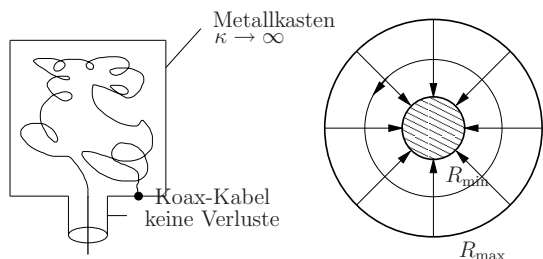


Abbildung 7.10: Kondensator



(a) System

(b) Schnitt durch das Koax-Kabel

Abbildung 7.11: Beispiel zur Induktivität

Die Energiebilanzgleichung ergibt sich damit zu:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N C_{k,l} Q_k Q_l = - \sum_{k=1}^N U_k I_k \quad (7.2-57)$$

Der einfachste Fall dieser Verallgemeinerung ist wiederum der Kondensator. Für diesen erhält man die Ladung und die Energie mit

$$Q = C V \quad W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (7.2-58)$$

7.3 Der Begriff der Induktivität

7.3.1 Herleitung der Induktivität

An einem relativ komplexen Beispiel soll der Begriff Induktivität eingeführt werden (siehe Abbildung 7.11). Dieses System ist durch einen idealen metallischen Kasten abgeschlossen. Mit der "Außenwelt" ist dieser Kasten über ein Koax-Kabel zugänglich.

Aus der Bilanzgleichung der Energie folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r \quad (7.3-59)$$

Das Oberflächenintegral hat nur einen Beitrag an der Stirnfläche des Koax-Kabels, daher

erhält man:

$$\int_{\text{Stirnfläche}} \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{E} \times \vec{B}}_{\vec{e}_z} \cdot \underbrace{d^2\vec{r}}_{\vec{e}_z} \equiv \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{1}{\mu_0} E_r B_\varphi 2\pi r dr \quad (7.3-60)$$

Mit dem allgemeinen Zusammenhang

$$\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} E_r dr = U \quad (7.3-61)$$

erhält man für das Integral über die Energieflußdichte:

$$\int_{\text{Stirnfläche}} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \cdot d^2\vec{r} \equiv UI \quad (7.3-62)$$

Aus den Berechnungen in Kapitel 3.6 ist bekannt, daß das Magnetfeld eines Koaxialleiters mit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad \text{für } R_{\min} < R < R_{\max} \quad (7.3-63)$$

berechnet werden kann. Wie man in Kapitel 7.4 noch sehen wird, kann das elektrische Feld mit

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}} \frac{1}{r} \vec{e}_r \quad (7.3-64)$$

angegeben werden.

Der Integrand des Integrals (7.3-62) ergibt sich damit zu:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi \mu_0} I \frac{U}{\ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}} \frac{1}{r^2} \vec{e}_z = \frac{IU}{2\pi \ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}} \frac{1}{r^2} \vec{e}_z \quad (7.3-65)$$

Deshalb ergibt sich das Integral zu:

$$\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \cdot d^2r = \frac{IU}{2\pi \ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr = UI \quad (7.3-66)$$

Dieses Ergebnis deckt sich also mit der Gleichung 7.3-62. Das bedeutet bezüglich der Energiebilanzgleichung, daß noch auf den 1. Term auf der linken Seite eingegangen werden muß:

- Betrachtung eines statischen Falls oder eines quasistatischen Falls
→ zeitliche Änderungen sind sehr langsam
- \vec{B} : hervorgerufen durch Ströme $\Rightarrow \vec{B} \neq 0$
- \vec{E} : hervorgerufen durch Induktion \Rightarrow zeitliche Änderung ≈ 0

Daher muß lediglich auf die magnetische Energie im System eingegangen werden. Für die magnetische Feldstärke des Leiters im metallischen Kasten (siehe Abbildung 7.11(b)) gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Stromfäden}} \frac{d\vec{r}(s) \times (\vec{r} - \vec{r}(s))}{|\vec{r} - \vec{r}(s)|^3} ds \quad (7.3-67)$$

Diese Gleichung ist für den gezeigten Fall jedoch etwas zu komplex zu lösen, deshalb überlegt man sich, daß das \vec{B} -Feld linear vom Strom abhängt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = I \hat{B}(\vec{r}) \quad (7.3-68)$$

Damit erhält man für die magnetische Energie:

$$W_{\text{magn}} = \int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3r = \frac{1}{2} I^2 \int_V \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2 d^3r \quad (7.3-69)$$

Das Integral auf der rechten Seite bekommt nun einen Namen:

$$L = \int_V \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2 d^3r \quad (7.3-70)$$

Allgemein wird L als Induktivität bezeichnet und die magnetische Energie lautet:

$$\int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3r = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.3-71)$$

Daran kann man erkennen, daß nun die magnetische Energie unabhängig der geometrischen Eigenschaften des Beispiels berechnet werden kann, sofern natürlich L zum Beispiel durch eine Messung bekannt ist.

Die Induktivität ist das Verhältnis der magnetischen Energie zum Quadrat des Stromes:

$$L := \frac{\int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3r}{\frac{1}{2} I^2} \quad (7.3-72)$$

Leitet man die Gleichung für die magnetische Energie nach der Zeit ab, so erhält man wegen der Verlustfreiheit des Systems:

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r = 0 \quad (7.3-73)$$

und damit als Endergebnis der Energiebilanzgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) &= -U \cdot I \\ L I \frac{d}{dt} I &= -U \cdot I \\ L \frac{d}{dt} I &= -U \end{aligned} \quad (7.3-74)$$

Das Vorzeichen hängt in diesem Fall von der Betrachtung der Spannung ab.

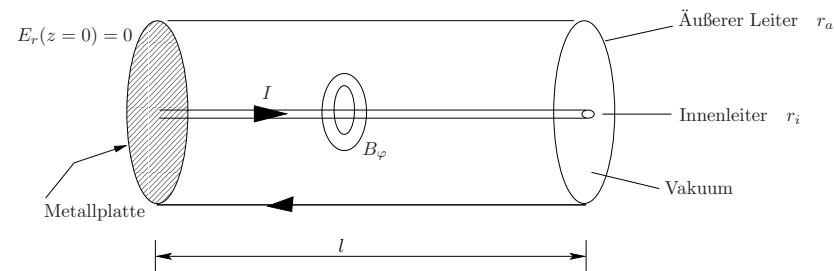


Abbildung 7.12: Koaxialleiter

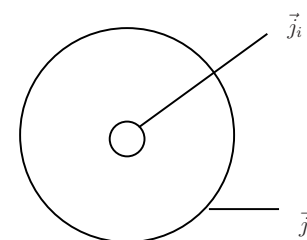


Abbildung 7.13: Schnitt durch Koaxialleiter

7.3.2 Induktivität eines Koaxialleiters

Im Falle langsam veränderlicher Felder wird das kapazitive Verhalten des Koaxialleiters vernachlässigt. Für die Berechnung wird ein konstanter Strom angenommen. Das Innenmaterial des Koaxialleiters sei außerdem nichtleitend.

Durch Betrachtung von Abbildung 7.13 erhält man für die Stromdichten:

$$\vec{j}_i = \frac{I}{2\pi r_i} \vec{e}_z \delta(r - r_i) \quad (7.3-75)$$

$$\vec{j}_a = -\frac{I}{2\pi r_a} \vec{e}_z \delta(r - r_a) \quad (7.3-76)$$

Das Magnetfeld eines geradlinigen Stromes ist bekannt aus Kapitel 3.6:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.3-77)$$

Daher gilt für den Koaxialleiter:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi & r_i < r < r_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.3-78)$$

Die magnetische Energie des Systems lautet damit:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3r &= \int_0^l \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0} B_\varphi^2 r dr d\varphi dz \\ &= \int_0^l \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\varphi dz \\ &= l 2\pi \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \right)^2 I^2 \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) l I^2 \end{aligned} \quad (7.3-79)$$

Der Energiegehalt des Systems ist daher gegeben mit:

$$W_{\text{magn}} = \frac{l}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{r_a}{r_i} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.3-80)$$

Dabei wurde L als Induktivität des Koaxialleiters identifiziert.

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) l \quad (7.3-81)$$

7.3.3 Verallgemeinerung der Induktivität

Ein einfaches Beispiel für eine Induktivität ist die ideale Spule der diskreten Bauelemente (siehe Abbildung 7.14). Aus den Kapiteln vorher ist bekannt, daß für dieses Bauteil die Spannung und der Strom wie folgt gekoppelt sind:

$$U = L \frac{dI}{dt} \quad (7.3-82)$$

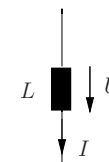


Abbildung 7.14: ideale Spule

Die in der Spule gespeicherte Energie wird dabei über die Induktivität L berechnet (siehe Kapitel 7.2.1 und 7.2.2):

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.3-83)$$

Mit diesen Zusammenhängen können dann z.B. Einschaltvorgänge von Schaltkreisen, wie in Abbildung 7.15, berechnet werden.

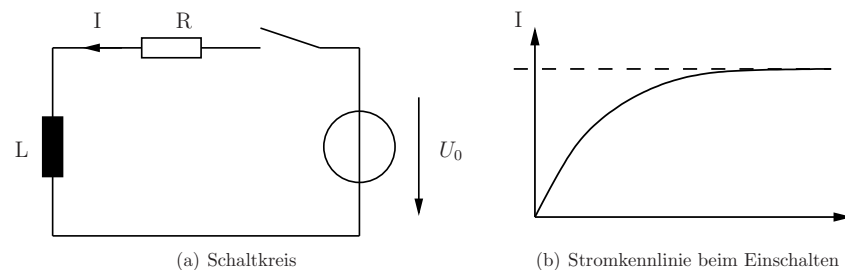


Abbildung 7.15: Einschaltvorgang diskreter Bauelemente

Bezüglich komplexerer Spulenarrangierungen (siehe Abbildung 7.16) wird nun der allgemeine Begriff der Induktivitätskoeffizienten eingeführt. Für eine beliebige Stromschleife, z.B. I_1 , gilt:

- Feld: linear in Stromdichte $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\tilde{B}}(\vec{r}) I$
- Energiedichte: quadratisch in \vec{B}
- Energie W : quadratisch in I

Für beliebig viele Schleifen gilt aufgrund der zuvor genannten Linearität des Feldes bezüglich der Ströme:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N I_k \vec{\tilde{B}}_k(\vec{r}) \quad (7.3-84)$$

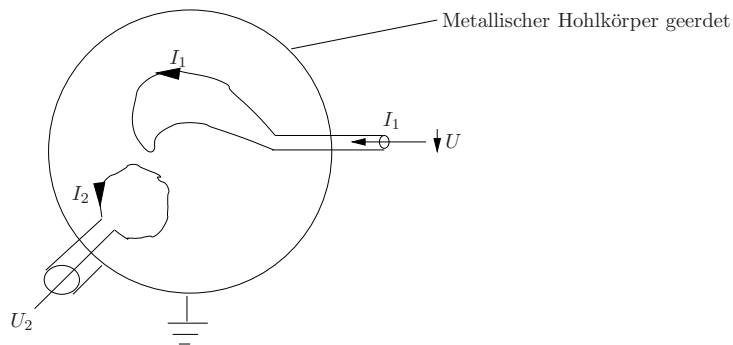


Abbildung 7.16: Induktionsschleifen im Raum

Wie zuvor erwähnt, ist die Energiedichte quadratische in \vec{B} :

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N I_k I_l \vec{B}_k(\vec{r}) \vec{B}_l(\vec{r}) \quad (7.3-85)$$

Damit ergibt sich die Form der Gesamtenergie zu:

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N I_k I_l \int_V \frac{1}{\mu_0} \hat{B}_k(\vec{r}) \hat{B}_l(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N L_{k,l} I_k I_l \quad (7.3-86)$$

Der integrale Ausdruck wird dabei als Induktivitätskoeffizient $L_{k,l}$ bezeichnet. Ein sinnvolles Beispiel ist der Transformator (siehe Abbildung 7.17. In der in Gleichung 7.3-86

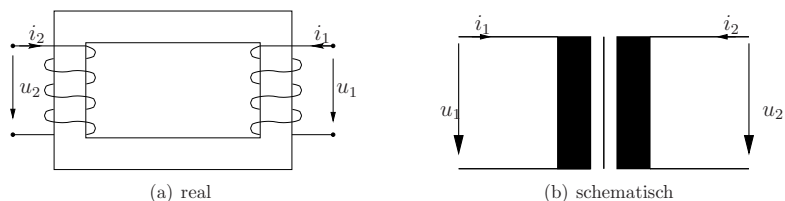


Abbildung 7.17: Transformator

beschriebenen Form der magnetischen Energie ergibt sich für den Transformator:

$$W = \frac{1}{2} (I_1 I_2) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (7.3-87)$$

$$L_{12} = L_{21} \quad (7.3-88)$$

Die Energiebilanz ergibt sich damit für den Transformator zu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 \right) = -(U_1 I_1 + U_2 I_2) \quad (7.3-89)$$

Allgemein gilt daher für die Energiebilanz:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \sum_{l=1}^N L_{k,l} I_k I_l = - \sum_{K=1}^N U_k I_k \quad (7.3-90)$$

7.4 Die Energiestromdichte eines Koaxialleiters mit einem leitenden Innenmaterial

In diesem Kapitel wird die Energiesituation in einem Koaxialleiter beschrieben. Der unterschied zu Kapitel 7.3.2 ist, daß das Innenmaterial leitfähig ist, der Leiter durch einen Isolator abgeschlossen ist und eine Spannung U angelegt wurde. Zunächst wendet man

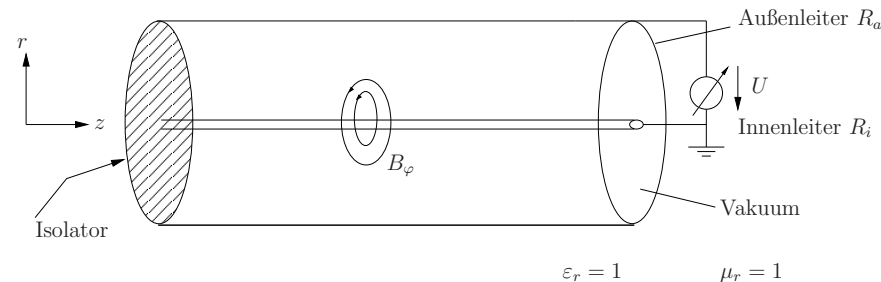


Abbildung 7.18: Koaxialleiter

die Eigenschaften, die in Abbildung 7.18 skizziert sind auf die vollständigen Maxwell-Gleichungen an:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4-91)$$

Da $\vec{M} = 0$ gegeben ist, da außerdem alle Zeitableitungen verschwinden müssen und hier ein statisches Problem betrachtet wird, ergeben sich die vereinfachten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_f \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (7.4-92)$$

Für den Energiesatz ergibt sich im statischen Fall:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j}_f \cdot \vec{E} \quad (7.4-93)$$

Da der Koaxialleiter durch ein reales Material gefüllt sein soll, gilt die Gleichung

$$\vec{j}_f = \kappa(\vec{r})\vec{E} \quad (7.4-94)$$

für den Ohm'schen Leiter. Außerdem gilt mit $\nabla \times \vec{E} = 0$, daß das elektrische Feld durch ein Skalarpotential dargestellt werden kann:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (7.4-95)$$

Aus Symmetriegründen kann man zusätzlich erkennen, daß das Potential und das elektrische Feld nur von R abhängen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_R(R)\vec{e}_R \\ \phi &= \phi(R) \end{aligned} \quad (7.4-96)$$

Damit ergibt sich außerdem für die Stromdichte:

$$\vec{j}_f = j_R(R)\vec{e}_R \quad (7.4-97)$$

Wendet man auf die Maxwell-Gleichung $\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f$ die Divergenz an, so erhält man aufgrund der Eigenschaft $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$, daß die Stromdichte die Bedingung $\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$ erfüllen muß. Deshalb lauten die bestimmenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j}_f &= 0 \\ \vec{j}_f &= \kappa \cdot \vec{E} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi \end{aligned} \quad (7.4-98)$$

Dementsprechend erhält man durch Einsetzen:

$$\nabla \cdot (\kappa(\vec{r})\nabla\phi) = 0 \quad (7.4-99)$$

Für den Koaxialleiter bedeutet das:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R\kappa(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial R} \phi \right) &= 0 \\ R\kappa(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial R} \phi &= c_1 \\ \frac{\partial}{\partial R} \phi &= \frac{c_1}{R\kappa(\vec{r})} \end{aligned} \quad (7.4-100)$$

Für ein konstantes $\kappa(\vec{r}) = \kappa$ gilt:

$$\phi(R) = \frac{c_1}{\kappa} \ln R + c_2 \quad (7.4-101)$$

Da der Koaxialleiter bei R_i auf Masse liegt ergibt sich

$$\phi(R) = \frac{c_1}{\kappa} \ln \frac{R}{R_i} \quad (7.4-102)$$

Mit der angelegten Spannung U bei R_a erhält man:

$$\phi(R) = U \frac{\ln \frac{R}{R_i}}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \quad (7.4-103)$$

Das elektrische Feld erhält man mit:

$$\vec{E}(R) = - \left(\frac{\partial}{\partial R} \phi(R) \right) \vec{e}_R = - \frac{U}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R} \vec{e}_R \quad (7.4-104)$$

Der Strom im Innenleiter muß demnach durch die Stromdichte

$$\vec{j} = \kappa \vec{E} = - \frac{\kappa U}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R} \vec{e}_R = j_R \vec{e}_R \quad (7.4-105)$$

berechnet werden:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\text{Oberfläche}} \vec{j} \cdot d\vec{f} = \int_0^z \int_0^{2\pi} j_R R d\varphi dz' \\ &= - \int_0^z \frac{\kappa U}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R} 2\pi R dz' \\ &= - \frac{2\pi\kappa U}{\ln \frac{R_a}{R_i}} z \end{aligned} \quad (7.4-106)$$

Da sich die Koordinatenabhängigkeit bei der Integration wegekürzt ist formal jede Mantelfläche im Zwischenraum als Referenzfläche bezüglich der Stromdichte wählbar.

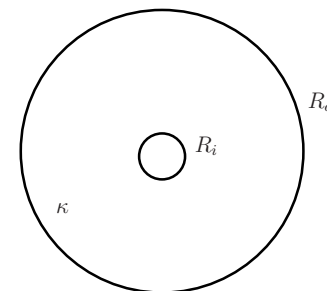


Abbildung 7.19: Schnitt durch Koaxialleiter

Das Magnetfeld Koaxialleiters ist bekannt aus Kapitel 7.3.2:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi & R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.4-107)$$

Das Produkt $\vec{j} \cdot \vec{E}$ lautet damit:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \kappa \vec{E}^2 = \kappa \frac{U^2}{\ln^2 \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R^2} \quad (7.4-108)$$

Der Poynting-Vektor ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{U}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_z \\ &= -\frac{U}{2\pi R^2 \ln \frac{R_a}{R_i}} \frac{2\pi \kappa U z}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \vec{e}_z \\ &= -\kappa \frac{U^2}{\ln^2 \frac{R_a}{R_i}} \frac{1}{R^2} z \vec{e}_z\end{aligned}\quad (7.4-109)$$

Das Ergebnis für die Energiediskussion lautet damit:

$$\int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{f} = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3r \quad (7.4-110)$$

oder

$$\nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (7.4-111)$$

Durch Einsetzen erkennt man, daß diese Gleichungen erfüllt sind.

Als Endergebnis kann festgehalten werden, daß im Zwischenraum des Leiters die Energie $\vec{j} \cdot \vec{E}$ umgesetzt wird. Der so entstandene Energiestrom fließt in negativer z -Richtung und ist größer je weiter man sich vom Leiterende bei $z=0$ entfernt.

7.5 Lernziele Kapitel 7

1. Welche Arten von Materialien gibt es und welche Eigenschaften besitzen diese?
2. Den Zusammenhang der Begriffe Ladung, Kapazität, Potential und elektrisches Feld verstehen
3. Wie kann man die Ladung und die Energie verschiedener Anordnungen berechnen?
4. Die Definition des Begriffes Induktivität wissen
5. Die Induktivität und die Energiestromdichte einfacher Anordnungen berechnen können

8 Regime elektromagnetischer Probleme

Zur Beschreibung sämtlicher elektromagnetischer Phänomene werden die vollständigen Maxwell-Gleichungen verwendet:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (8.1)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (8.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.4)$$

Zusätzlich ist die Betrachtung der Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (8.5)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.6)$$

immer von Bedeutung.

Die verwendeten Materialien werden beschrieben durch Materialgleichungen, welche mit den Termen auf den rechten Seiten der Gleichungen 8.1 und 8.2 in den Maxwell-Gleichungen enthalten sind. Die Materialien und das betrachtete System müssen dann Informationen zu $\rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$ und $\vec{j} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ liefern. Folgende Materialien werden häufig in diesem Zusammenhang betrachtet:

- Vakuum
- Ideale Leiter
- nicht ideale Leiter
- Ohm'scher Leiter
- Halbleiter
- Dielektrika
- Ferrite (magnetisierbare Materialien)
- Supraleiter
- Plasma

Auf die Eigenschaften dieser Materialien wurde bereits in Kapitel 7.1 kurz eingegangen.

8.1 Einteilung der Regime

Verschiedene Regime werden durch Modifikation (Vereinfachung) der Maxwell-Gleichungen dargestellt. Zur Beschreibung bestimmter elektrotechnischer Phänomene muß nicht immer der volle Satz Maxwell-Gleichungen verwendet werden. Zur konsistenten Beschreibung solcher Phänomene reichen oft vereinfachte oder genäherte Modelle aus, um die Vorgänge zu verstehen und mathematisch korrekt formulieren zu können. Erhält man durch eine Verwendung der vollen Maxwell-Gleichungen keinerlei Verbesserungen gegenüber einer Vereinfachung, so macht eine Verwendung einer komplizierteren Beschreibung auch keinen Sinn.

Einige der anschließend diskutierten Regime werden mit bestimmten Namen bezeichnet. Jedoch ist zu beachten, daß diese Namen in der Geschichte oftmals unglücklich gewählt wurden, sie sind aber allgemein anerkannt und somit Standard.

Im Folgenden wird auf einige dieser Regime eingegangen. Die entsprechenden Vereinfachungen werden dazu erläutert und hinterleuchtet.

8.1.1 Stationäre Regime

Dazu wird als Vereinfachung die folgende Näherung verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$$

Das bedeutet, daß alle Zeitableitungen in den Maxwell-Gleichungen entfallen. Das führt zu den in den Kapiteln 2 und 3 behandelten Problemen der Elektrostatik und Magnetostatik. Entsprechende Anwendungsbeispiele sind in den Kapiteln 2, 3 und 5 zu finden.

8.1.2 Langsam veränderliche Felder

Mit langsam veränderlichen Feldern sind solche gemeint, welche sich langsam gegen die Lichtgeschwindigkeit verändern. Ein wichtiges Regime ist in diesem Zusammenhang durch die Vernachlässigung des Verschiebungsstromes $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ gegeben. Diese Vereinfachung gegenüber den vollständigen Maxwell-Gleichungen wird zum Beispiel in der Energie- und Antriebstechnik verwendet. In fast allen Fällen ist dort der Verschiebungsstrom gegenüber von Stromdichten und Strömen zu vernachlässigen. In der Elektrodynamik wird diese Vereinfachung Quasistationäre Näherung genannt. In der Plasmaphysik hat sich hierfür der Begriff der magnetostatischen Näherung etabliert. Dieser Begriff darf jedoch nicht mit dem Begriff der Magnetostatik verwechselt werden, denn in der Magnetostatik sind die elektrischen und magnetischen Felder entkoppelt und nicht zeitabhängig, im Falle der magnetostatischen Näherung wird lediglich ein Term der Maxwell-Gleichungen vernachlässigt.

Ein weiterer wichtiger Sonderfall langsam veränderlicher Felder ist durch die Vernachlässigung von Induktionseffekten $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ gegeben. Hier sind die durch Induktion erzeugten elektrischen Felder gegenüber den durch die Quellen erzeugten Felder vernachlässigbar. Eines der wichtigsten Anwendungsfelder dieses Regimes ist die Halbleitertechnik, denn in den meisten Fällen können Induktionseffekte in Halbleitern vernachlässigt werden. Ei-

ne spezielle Begriffsbildung bezüglich dieses Regimes hat in der Elektrodynamik nicht stattgefunden, man findet dieses Modell tatsächlich unter dem allgemeinen Begriff der langsam veränderlichen Felder. In der Plasmaphysik wird für dieses Regime der Begriff der elektrostatischen Näherung verwendet. Aber auch hier gilt, daß dieser Begriff nicht mit dem der Elektrostatik verwechselt werden darf.

Im weitesten Sinne umfassen die langsam veränderlichen Felder jedoch auch die Elektrostatik und Magnetostatik. Aufgrund der völligen Unabhängigkeit von der Zeit, werden diese Regime dann als stationär bezeichnet (siehe Kapitel 2, 3 und 8.1.1).

Auf einige wichtige Eigenschaften und die vorher skizzierten Spezialregime wird in Kapitel 8.4 eingegangen.

8.1.3 Halbleitertechnik

Im Bereich der Halbleitertechnik (HT) wird typischerweise die folgende Näherung verwendet.

$$\left. \begin{array}{l} \text{„Elektrostatische Näherung“} \\ \text{Materialien : Vakuum, Dielektrika, Leiter, Halbleiter} \end{array} \right\} \text{Spezialgebiet HT}$$

Kapitel 8.4.4 erläutert die elektrostatische Näherung.

8.1.4 Antennentheorie und Wellenausbreitung

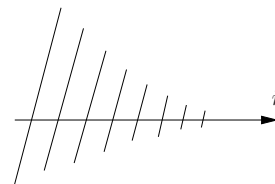


Abbildung 8.1: Wellenausbreitung

Dieses Gebiet beschäftigt sich mit den folgenden Themenbereichen:

- Wellenabstrahlung
- volle Maxwell-Gleichungen müssen verwendet werden
- Materialien: Vakuum, ideale Leiter

8.1.5 Strömungsfeldprobleme

Für häufig verwendete Materialien sind die Charakteristika meist bekannt. Zum Beispiel gilt für das Vakuum:

- keine Ladungen
- keine Ströme
- keine Magnetisierung
- keine Polarisierung

Für einen idealen Leiter sind die wichtigsten Eigenschaften:

- keine Felder im Inneren
- keine Ladungen im Inneren,
- E-Feld auf Oberfläche senkrecht, evtl. Oberflächenladungen

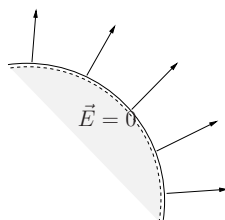


Abbildung 8.2: Randbedingungen des idealen Leiters

Betrachtet man aber keinen idealen, sondern einen realen Leiter (Ohm'scher Leiter), so müssen auf die speziellen Eigenschaften des Materials eingegangen werden. Dazu geht man zuerst auf die Grundlagen der Körper und Materialien ein. Festkörper sind Kristallgitter, die aus Ionenrümpfen und beweglichen Elektronen bestehen. Deshalb führt man eine Leitfähigkeit κ ein, die das Material adäquat beschreibt. Zur Berechnung der elektrischen Problemstellungen wird dann eine Stromdichte proportional zum Feld angesetzt, \vec{j} und \vec{E} sind dann über das Ohmsche Gesetz miteinander verknüpft (siehe auch Kapitel 7.1.5):

$$\vec{j} = \kappa \vec{E} \quad (8.1-7)$$

Verschiedene Materialien haben unterschiedlich "gute" Leitfähigkeiten, z.B.:

- $\kappa_{Cu} = \dots$ groß
- $\kappa_{Pb} = \dots$ klein

8.2 Phasoren-Rechnung

In den folgenden Kapiteln werden die Maxwell-Gleichungen häufig nur für zeitharmonische Fälle ausgewertet. Das bedeutet, daß das elektrische und das magnetische Feld Sinus- oder Cosinus-förmig angenommen werden.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird dazu die komplexwertige Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ in der folgenden Weise verwendet:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &= \operatorname{Re} \left[\vec{B}(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi_0)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\vec{B}(\vec{r}) e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (8.2-8)$$

Der zeitabhängige Anteil wird demnach mit Hilfe der Euler'schen Formel

$$e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad (8.2-9)$$

und der zuvor genannten komplexwertigen Funktion $e^{j\omega t}$ dargestellt. Über die Berechnung des Realteils erhält man dann die gewünschte Lösung.

Faßt man die ortsabhängige Feldgröße und die Phasenabhängigkeit zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\vec{B}(\vec{r}) e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (8.2-10)$$

$\underline{\vec{B}}(\vec{r})$ wird dann als komplexe Amplitude oder Phasor bezeichnet.

Setzt man diesen Ansatz in eine beliebige Differentialgleichung ein (z.B. Diffusionsgleichung), so erhält man eine vereinfachte neue Gleichung (Herleitung der Wellengleichung siehe Kapitel 8.5.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left[\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] - \frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla^2 \operatorname{Re} \left[\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right) - \frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla^2 \left(\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right) &= 0 \\ \Rightarrow j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) - \frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla^2 \underline{\vec{B}}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Das gesuchte Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ kann dann über die Vorschrift 8.2-10 berechnet werden.

8.3 Anwendung Strömungsfeldprobleme

Beispiel: Es soll ein stationärer Fall ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$) eines Strömungsfeldes berechnet werden. Dazu werden die vollen Maxwell-Gleichungen verwendet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (8.3-11)$$

Da $\vec{M} = 0$ gegeben sein soll und außerdem alle Zeitableitungen verschwinden müssen, ergeben sich die reduzierten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_f \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (8.3-12)$$

Wie bereits oben erwähnt, gilt für alle realen Leiter:

$$\vec{j}_f = \kappa \vec{E} \quad (8.3-13)$$

Für alle idealen Leiter gilt

$$\vec{E} = 0 \quad (8.3-14)$$

und auf der Oberfläche eines idealen Leiters steht das elektrische Feld senkrecht:

$$\vec{n} \times \vec{E}|_{\text{Rand}} = 0 \quad (8.3-15)$$

Als konkrete Situation wird der Kasten in Abbildung 8.3, mit idealen Leitern als Wände, betrachtet. Im Inneren herrscht die Leitfähigkeit κ .

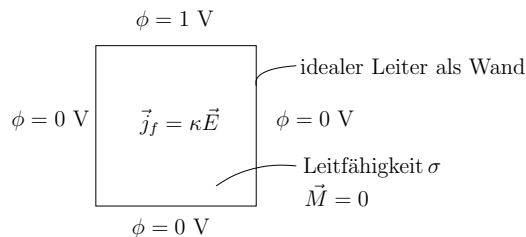


Abbildung 8.3: 2-dimensionales quadratisches Strömungsfeld

Die Potentiale auf den Rändern sind in der Abbildung angegeben. Das Potential ist statisch und mit dem Zusammenhang zwischen \vec{j}_f und \vec{E} stehen die folgenden Gleichungen zur Berechnung zur Verfügung:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (8.3-16)$$

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0 \quad (8.3-17)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f \quad (8.3-18)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.3-19)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (8.3-20)$$

$$\vec{j}_f = \kappa \vec{E} \quad (8.3-21)$$

Die Herleitung der Gleichung 8.3-17 kann wie folgt durchgeführt werden. Wendet man auf Gleichung 8.3-18 die Divergenz an, so ergibt sich für die Stromdichte

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) = \nabla \cdot \vec{j}_f = 0$$

da die Divergenz der Rotation immer Null ist. Daher erhält man für das stationäre Strömungsfeld:

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = \nabla \cdot (\kappa \vec{E}) = -\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = 0$$

Im Allgemeinen muß also die folgende Gleichung für Strömungsfeldprobleme gelöst werden:

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = 0 \quad (8.3-22)$$

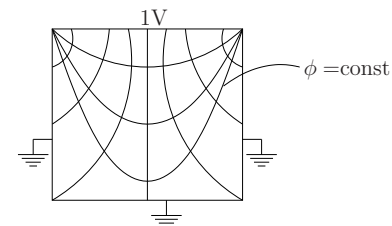


Abbildung 8.4: Potentiallinien und Feldlinien eines Strömungsfeldes

Für den Fall einer konstanten Leitfähigkeit gilt

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8.3-23)$$

mit der Randbedingung

$$\phi|_{\text{Rand}} = \phi_{\text{Rand}} \quad (8.3-24)$$

Es muß in diesem Spezialfall also die Laplace-Gleichung für das Potential gelöst werden. Für den Fall des Potentialkastens in Abbildung 8.4, welcher mit einem Medium der Leitfähigkeit κ gefüllt ist, kann eine entsprechende Lösung berechnet werden. In Abbildung 8.4 ist dazu die zu erwartende Lösung abgebildet.

Bezüglich Gleichung 8.3-23 kann man festhalten:

- Problemstellung ist mathematisch bekannt
- es ist nicht die Poisson-Gleichung, auch wenn ein Sonderfall der Poisson-Gleichung identisch aussieht

Grundsätzlich ist ein Strömungsfeld nicht mit der Poisson-Gleichung lösbar, denn die Ladungsverteilung, die im Leiter ausgebildet wird, ist nicht von Anfang an bekannt. Für beliebig ortsabhängige Leitfähigkeiten $\kappa(\vec{r})$ muß eine der beiden folgenden Gleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa(\vec{r}) \nabla \phi) &= 0 \\ \kappa(\vec{r}) \nabla^2 \phi + \nabla \kappa(\vec{r}) \cdot \nabla \phi &= 0 \end{aligned} \tag{8.3-25}$$

Die Randbedingungen von vorher sind dabei immer noch gültig:

$$\phi|_{\text{Rand}} = \phi_{\text{Rand}} \tag{8.3-26}$$

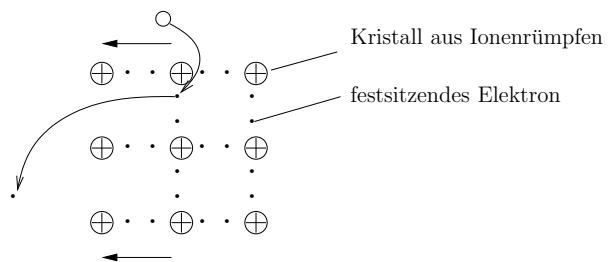


Abbildung 8.5: Kristallaufbau eines Halbleiters

Als Beispiel zur Berechnung dient ein Halbleiter aus Silizium, GaAs oder Germanium. Von diesen Materialien ist bekannt, daß sie zwei Sorten Ladungsträger besitzen:

- freie Elektronen: Dichte n
- freie Löcher: Dichte p

Die Ladungsdichte ergibt sich damit zu:

$$\rho = -en + ep = e(p - n)$$

Die Stromdichte berechnet sich zu

$$\vec{j} = -en\vec{v}_n + ep\vec{v}_p$$

Dabei stellen \vec{v}_n und \vec{v}_p die mittleren Geschwindigkeiten der Ladungsträger dar. Man nimmt nun an, daß die mittlere Geschwindigkeit vom elektrischen Feld abhängt, daher wird angesetzt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_p &= \mu_p \vec{E} \\ \vec{v}_n &= -\mu_n \vec{E} \end{aligned} \tag{8.3-27}$$

Entsprechend erhält man für die Stromdichte

$$\vec{j} = en\mu_n \vec{E} + ep\mu_p \vec{E} \equiv e(n\mu_n + p\mu_p) \vec{E} \tag{8.3-28}$$

Die Variablen μ_n und μ_p können in diesen Gleichungen als Beweglichkeit der Ladungsträger identifiziert werden und besitzen die Einheit:

$$[\mu_n] = [\mu_p] = \frac{[\vec{v}]}{[\vec{E}]} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{V}{m}} = \frac{m^2}{Vs}$$

Die Leitfähigkeit κ eines Halbleiters beträgt demnach

$$\kappa = e(n\mu_n + p\mu_p) \tag{8.3-29}$$

mit geeigneten Randbedingungen kann ein entsprechendes Problem gelöst werden.

Ein interessantes anderes Beispiel eines Strömungsfeldproblems wurde bereits in Kapitel 7.4 berechnet.

8.4 Anwendung Langsam veränderliche Felder

8.4.1 Die Maxwell-Gleichungen und deren Abschätzung

Um eine geeignete Darstellung für die langsam veränderlichen Felder zu finden, werden zuerst einige Skalenüberlegungen angestellt.

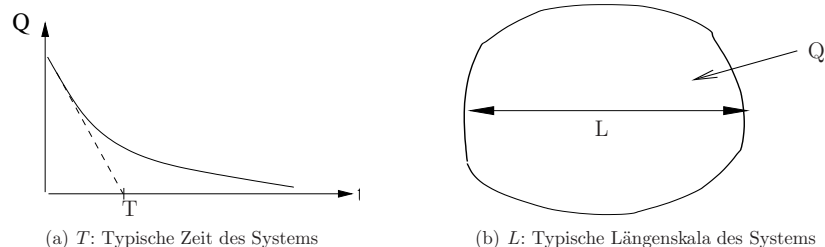


Abbildung 8.6: Skalenbetrachtung

Für die Praxis bedeuten solche Skalenüberlegungen unter anderem, die Größenordnung von Ableitungen zu betrachten. Zum Beispiel erkennt man mit Hilfe von Abbildung 8.6 für die Ableitungen des Ortes und der Zeit die folgende Skalenabschätzung:

$$|\nabla Q| \approx \frac{|Q|}{L} \quad (8.4-30)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} Q \right| \approx \frac{|Q|}{T} \quad (8.4-31)$$

Die Maxwell-Gleichungen

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (8.4-32)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (8.4-33)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.4-34)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (8.4-35)$$

die Energieerhaltungsgleichung,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (8.4-36)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.4-37)$$

sollten in diesem Zusammenhang etwas genauer betrachtet werden. Es ist bekannt, daß gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \text{Lichtgeschwindigkeit} \approx 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (8.4-38)$$

Die Idee ist es nun, die typische Geschwindigkeit $\frac{L}{T}$ des betrachteten Systems mit der Lichtgeschwindigkeit c zu vergleichen. Dabei erhält man grundsätzlich drei verschiedene Fälle:

- $\frac{L}{T} \approx 0 \implies$ statischer Fall \rightarrow Elektrostatik, Magnetostatik
- $\frac{L}{T} \ll c \implies$ langsam veränderl. \rightarrow Vernachlässigungen mögl. \rightarrow A,B (siehe später)
- $\frac{L}{T} \approx c \implies$ schnell veränderlich \rightarrow die vollen Maxwell-Gleichungen werden benötigt

Als Beispiel für langsam veränderliche Felder dient der Transformator in Abbildung 8.7. Die typischen Größen sind wie folgt gegeben:

$$T \approx \frac{1}{50 \text{ Hz}}$$

$$L \approx 10 \text{ m}$$

Daraus kann man ableiten, daß das System bedeutend langsamer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

$$\frac{L}{T} = \frac{10 \text{ m}}{10^{-2} \text{ s}} = 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ll 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv c$$

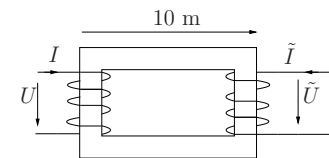


Abbildung 8.7: Transformator

8.4.2 Quasistationäre Näherung

Wiederum werden im Folgenden Größenordnungen durch die typische Längenskala L und die typische Zeitskala T des betrachteten Systems abgeschätzt. Ausgangspunkt sei ein System, bei dem ein typischer Strom I mit der typischen Stromdichte

$$j_{f,\text{typ}} = \frac{I}{L^2} \quad (8.4-39)$$

die bestimmende Größe darstellt (Transformator, Motor, etc.).

Betrachtet man also ein System, bei dem das Magnetfeld durch einen Strom I oder allgemein durch eine Stromdichte \vec{j}_f erzeugt wird, so ergibt sich die Größenordnung des magnetischen Feldes durch diesen Strom oder diese Stromdichte. Zur Darstellung dieses Zusammenhangs wird die Maxwell-Gleichung

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \quad (8.4-40)$$

verwendet (es befindet sich im Trafo typischerweise kein polarisierbares Material, deshalb gilt $\vec{P} = 0$). Führt man jetzt aus mathematischen Gründen die Größe \vec{H} ein, so erhält man die vereinfachte Gleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.4-41)$$

mit dem Zusammenhang

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \quad (8.4-42)$$

und die Skalenabschätzung für B_{typ} kann hergeleitet werden. Da der Strom I in diesem System das Magnetfeld erzeugt, gilt der folgende Zusammenhang der typischen Größen von \vec{j}_f und \vec{H} :

$$\frac{1}{L} H_{\text{typ}} = j_{f,\text{typ}} \quad (8.4-43)$$

Diese Gleichung sollte wie folgt gelesen werden: 'Das Magnetfeld ist von gleicher Ordnung wie der Strom'. Das bedeutet aber nicht, daß $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ vernachlässigt werden kann, der Verschiebungsstrom kann durchaus genauso großen Einfluß wie das Magnetfeld haben, und trotzdem wären die Ordnungen von \vec{j}_f und \vec{H} wie oben gegeben. Dieses hängt alleine von den gegebenen Systemgrößen L und T ab. Erst für Extrembeispiele, wenn

zum Beispiel der Verschiebungsstrom um Größenordnungen ($10^2 \dots$) größer wäre, gilt die Annahme von zuvor nicht mehr. Ein entsprechendes Beispiel ist ein Radioempfänger, dieser benötigt einen kleinen Strom zum Betrieb der Antenne, das relevante Magnetfeld stammt aber vom Radiosender.

Für das betrachtete Regime eines Transformators ist die Annahme, der Strom erzeuge das relevante Magnetfeld und dieses Magnetfeld erzeuge ein zugehöriges elektrisches Feld aber gerechtfertigt. Man kann aus dieser Überlegung dann im Folgenden sogar zeigen, daß der Verschiebungsstrom deutlich kleiner ist und daher vernachlässigt werden kann. Es fehlt dazu nur noch die Größenordnung des elektrischen Feldes.

Zunächst muß aber noch der Zusammenhang zwischen \vec{H} und \vec{B} zu Ende diskutiert werden. Mit der Materialeigenschaft μ_r des Trafokerns für ein lineares, isotropes, homogenes Material erhält man den Zusammenhang zwischen H_{typ} und B_{typ} :

$$H_{\text{typ}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{\text{typ}} \quad (8.4-44)$$

Damit ergibt sich für das betrachtete System eines Transformators die typische Größenordnung des Magnetfeldes zu:

$$B_{\text{typ}} = \mu_0 \mu_r L j_{f,\text{typ}} \quad (8.4-45)$$

Da das elektrische Feld aufgrund des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes entsteht, muß die Größenordnung über die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (8.4-46)$$

ermittelt werden. Der Zusammenhang der typischen Größe des elektrischen Feldes E_{typ} mit der Größe des typischen magnetischen Feldes B_{typ} ist daher wie folgt gegeben:

$$\frac{1}{L} E_{\text{typ}} = \frac{1}{T} B_{\text{typ}} \quad (8.4-47)$$

Nun können die beiden Terme \vec{j}_f und $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$ ins Verhältnis gesetzt werden. Bei einer typischen Länge L des Systems von einigen Zentimetern ($L = 0.1\text{m}$), einem typischen Zeitverhalten im Bereich $T = 10^{-4}\text{s}$ ($= 10\text{kHz}$) und einem Trafo-Kernmaterial mit $\mu_r = 100$ erhält man:

$$\frac{\left| \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right|}{\left| \vec{j}_f \right|} \approx \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{T} E_{\text{typ}}}{j_{f,\text{typ}}} = \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{T} \frac{L}{T} B_{\text{typ}}}{j_{f,\text{typ}}} = \frac{\varepsilon_0 \frac{1}{T} \frac{L}{T} \mu_0 \mu_r L j_{f,\text{typ}}}{j_{f,\text{typ}}} = \mu_r \frac{L^2}{c^2 T^2} \approx \frac{(10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \approx 10^{-9} \ll 1$$

Man sieht, daß es aufgrund des erheblichen Unterschiedes der Größenordnungen gerechtfertigt ist, $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$ gegenüber \vec{j}_f zu vernachlässigen. Dabei wurde lediglich die physikalische Einsicht genutzt, daß ein zeitabhängiger Strom ein zeitabhängiges Magnetfeld erzeugt und dieses dann ein zeitabhängiges elektrisches Feld. An den Skalenzusammenhängen erkennt man dann, daß das auf diese Weise erzeugte elektrische Feld kaum mehr einen Einfluß auf das magnetische Feld hat und deshalb vernachlässigt werden kann.

Als nächstes werden die Energiedichten des elektrischen und magnetischen Feldes verglichen:

$$\frac{\left| \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right|}{\left| \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}^2 \right|} \approx \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{\text{typ}}^2}{\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{\text{typ}}^2} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{L^2}{T^2} B_{\text{typ}}^2}{\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{\text{typ}}^2} = \mu_r \frac{L^2}{c^2 T^2} \approx 10^{-9} \ll 1$$

Das bedeutet, daß die Energiedichte des elektrischen Feldes gegenüber der Energiedichte des magnetischen Feldes vernachlässigbar ist. Vergleicht man nun noch die beiden Terme der Kontinuitätsgleichung, indem man zunächst einen Zusammenhang zwischen E_{typ} und $\rho_{f,\text{typ}}$ über die Maxwell-Gleichung $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f$ herleitet, so ergibt sich:

$$\frac{\left| \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \right|}{\left| \nabla \cdot \vec{j}_f \right|} \approx \frac{\frac{1}{T} \varepsilon_0 \frac{E_{\text{typ}}}{L}}{\frac{L}{T} j_{f,\text{typ}}} = \frac{\frac{1}{T} \varepsilon_0 \frac{L}{T} B_{\text{typ}}}{j_{f,\text{typ}}} = \frac{\frac{1}{T} \varepsilon_0 \frac{L}{T} \mu_0 \mu_r L j_{f,\text{typ}}}{j_{f,\text{typ}}} = \mu_r \frac{L^2}{c^2 T^2} \approx 10^{-9}$$

Das bedeutet, daß $\frac{\partial}{\partial t} \rho_f$ gegenüber $\nabla \cdot \vec{j}_f$ vernachlässigt werden kann.

Mit dieser Tatsache erkennt man aber auch, daß in dieser Art von Regimen Ladungen keine Rolle spielen, deshalb kann die Gleichung $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f$ vernachlässigt werden. Somit erhält man die Maxwell-Gleichungen in reduzierter Form für langsam veränderliche Felder:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \nabla \times \vec{M} \quad (8.4-48)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.4-49)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (8.4-50)$$

$$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0 \quad (8.4-51)$$

Bezüglich der Energiebilanzgleichung erhält man mit der Abschätzung oben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0 \mu_r} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j}_f \cdot \vec{E} \quad (8.4-52)$$

So lange also die typische Größenordnung L/T deutlich langsamer ist, als die Lichtgeschwindigkeit c , können die oben gezeigten Vereinfachungen verwendet werden.

In der Elektrodynamik wird dieses Regime quasistationäre Näherung genannt. Sie findet vor allem in der Energietechnik Anwendung (Motoren, Transformatoren, etc.). Als Merkgel gilt, sofern man die zugehörige Interpretation nicht vergißt, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ führt auf das gesuchte Gleichungssystem.

8.4.3 Energieinhalt der quasistationären Näherung

Dazu stellt man sich konkret die Frage: Wie ändert sich der Energieinhalt mit der Zeit, wenn sich der Strom ändert?

Im weiteren Verlauf dieses Unterkapitels wird dazu auf die Ergebnisse bezüglich des Koaxialleiters zurückgegriffen (Kapitel 7.3.2), welcher mit einem konstanten Strom betrieben

wird. Es wird nun die Annahme gemacht, der Strom I sei zeitabhängig:

$$I = I(t) \quad (8.4-53)$$

Damit erhält man für das Magnetfeld des Koaxialleiters:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi R} I(t) \vec{e}_\varphi & \text{für } R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.4-54)$$

Da das Magnetfeld zeitabhängig ist, muß das zugehörige elektrische Feld berechnet werden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} E_R - \underbrace{\frac{\partial}{\partial R} E_z + \frac{\partial}{\partial t} B_\varphi}_{=0} &= 0 \end{aligned} \quad (8.4-55)$$

Dabei ist der Term bezüglich E_z gleich Null, denn die angelegte Quelle wird zwischen R_i und R_a angelegt. Dies führt zu einer reinen R -Abhängigkeit des Feldes. Damit lautet die Differentialgleichung für E_R

$$\frac{\partial}{\partial z} E_R + \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{dI}{dt} = 0 \quad (8.4-56)$$

Unter Verwendung der Randbedingungen in Abbildung 7.12 (Kapitel 7.3.2) erhält man:

$$E_R = -\frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{dI}{dt} l \quad (8.4-57)$$

Das elektrische Feld lautet dann:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{dI}{dt} l \vec{e}_R & \text{für } R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.4-58)$$

Integriert man das elektrische Feld entlang der Richtung \vec{e}_R , so erhält man die angelegte

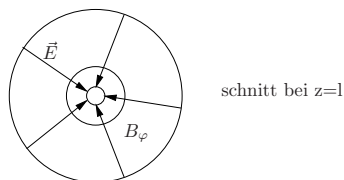


Abbildung 8.8: Schnitt durch den Koaxialleiter

Spannung U :

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} l \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR = U \quad (8.4-59)$$

Demnach ergibt sich die folgende Differentialgleichung für U und I bezüglich der Induktivität L :

$$U = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{R_a}{R_i} \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (8.4-60)$$

Aus dem Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi R} I(t) \vec{e}_\varphi & R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.4-61)$$

und dem elektrischen Feld des Koaxialleiters

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi R} l \frac{dI}{dt} \vec{e}_R & R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.4-62)$$

kann nun der Poynting-Vektor berechnet werden:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} l I \frac{dI}{dt} \vec{e}_z & R_i < R < R_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.4-63)$$

Energiebetrachtung: Im Folgenden wird die Energiebilanz des Systems ausgewertet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3r + \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} d^2\vec{r} &= \int_V \underbrace{-\vec{j} \cdot \vec{E}}_{=0} d^3r = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} W_{\text{magn}} + \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{2\pi} -\frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} l \vec{e}_z R d\varphi dR \vec{e}_z I \frac{dI}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (8.4-64)$$

Aus den Kapiteln vorher ist bekannt, daß für die magnetische Energie des Systems gilt:

$$\frac{d}{dt} W_{\text{magn}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) \quad (8.4-65)$$

Wertet man dies aus, so ergibt sich die Gleichung zu Null:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) - \frac{\mu_0}{2\pi} l I \frac{dI}{dt} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR = 0 \quad (8.4-66)$$

Es ergibt sich also:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) - L I \frac{dI}{dt} = 0 \quad (8.4-67)$$

Der Energiesatz ist demnach korrekt, er ist Konsequenz der Feldberechnung.

8.4.4 Elektrostatische Näherung

Wiederum wird von den Maxwell-Gleichungen

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.4-68)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.4-69)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (8.4-70)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (8.4-71)$$

von der Ladungserhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.4-72)$$

und von der Energiebilanzgleichung ausgegangen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (8.4-73)$$

Bezüglich der elektrostatischen Näherung stellt man Überlegungen mit der folgenden Argumentation an:

- es gibt Ladungen
- Ladungen erzeugen Felder
- Felder lassen Ströme fließen
- Ströme erzeugen B -Felder
- B -Feld -Änderung erzeugt ein E -Feld, aber klein, dann gilt: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ist vernachlässigbar

Damit erhält man das reduzierte Gleichungssystem zur Beschreibung:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (8.4-74)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (8.4-75)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.4-76)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (8.4-77)$$

Faßt man diese zusammen, so erkennt man, daß die Poisson-Gleichung und die Ladungserhaltungsgleichung ausreichen, um Problemstellungen dieser Art zu lösen:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho \quad (8.4-78)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.4-79)$$

Die gezeigte elektrostatische Näherung kommt vor allem in den folgenden technischen Bereichen zur Anwendung:

- Halbleitertechnik, Mikroelektronik
- Nanotechnik
- Plasmatechnik

Diese Art der Näherung wird in der Plasma-Physik elektrostatische Näherung genannt, aus der Elektrodynamik ist kein spezifischer Begriff bekannt. Als Merkregel gilt, sofern man die zugehörige Interpretation nicht vergißt, $\mu_0 \rightarrow 0$ führt auf das gesuchte Gleichungssystem. Es sei zusätzlich darauf hingewiesen, daß die Begriffe der elektrostatischen Näherung und der Elektrostatik unterschiedliche Regime beschreiben.

8.4.5 Diffusion

Dringen zum Beispiel langsam veränderliche Felder in ein leitfähiges Medium ein, so spricht man von Diffusion. Bereits in Kapitel 7.1.5 wurde erläutert, daß für einen realen Leiter mit der Leitfähigkeit κ gilt:

$$\vec{j} = \kappa \vec{E} \quad (8.4-80)$$

Für die Maxwell-Gleichungen ergibt sich damit durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \kappa \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla \times \vec{B} \right) = 0 \quad (8.4-81)$$

Der Term $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ist im Falle langsam veränderlicher Felder unwichtig, da er gegenüber \vec{j} kaum einen Beitrag liefert.

Mit der vektoranalytischen Eigenschaft

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (8.4-82)$$

kann der Ausdruck vereinfacht werden, denn es gilt $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ für magnetische Felder.

Für den Fall, daß $\kappa = \text{const.}$ gilt, erhält man dann die Diffusionsgleichung für das magn. Feld:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \kappa} \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (8.4-83)$$

Als Beispiel ist in Abbildung 8.9 ein Diffusionsprozeß eines Gases dargestellt. Mathematisch gesehen gehorcht dieses Problem auch Gleichung 8.4-83.

Zur Erläuterung des Diffusionsprozesses sei nun Abbildung 8.10 betrachtet. Dort ist für ein entsprechendes Beispiel das magnetische Feld aufgezeichnet. Das Magnetfeld wird dabei mit

$$\vec{B} = \vec{B}_y(x) \vec{e}_y \quad (8.4-84)$$

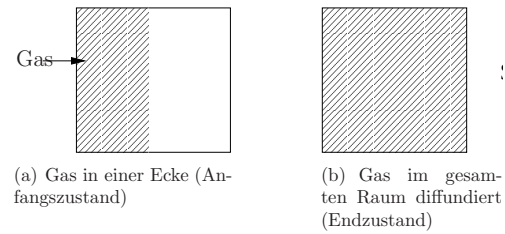


Abbildung 8.9: Diffusionsprozeß eines Gases

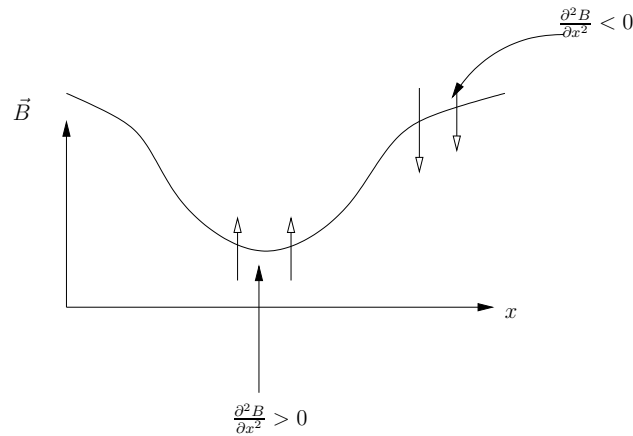


Abbildung 8.10: Magnetfeld-Diffusion

angenommen und gehorcht damit der folgenden Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_y = \frac{1}{\mu_0 \kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_y \quad (8.4-85)$$

Die Pfeile deuten an, in welcher Richtung sich das Magnetfeld mit der Zeit aufgrund der Diffusion hinbewegt. Zur Verdeutlichung ist deshalb in Abbildung 8.11 eine zusätzliche Momentaufnahme zum Zeitpunkt $t > t_0$ gezeigt.

8.4.6 Skineffekt leitfähiger Materialien

Zur Berechnung des Skineffektes bezüglich leitfähiger Materialien lautet das adäquate Gleichungssystem, ausgegangen von Maxwell-Gleichungen, um die Materialeigenschaften

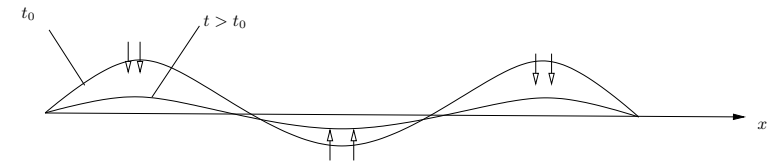


Abbildung 8.11: Momentaufnahmen der Magnetfeld-Diffusion

erweitert:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} = \kappa \vec{E} \quad (8.4-86)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.4-87)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (8.4-88)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.4-89)$$

Das Gleichungssystem soll demnach den Skineffekt an einem elektrisch leitfähigen Material demonstrieren.

In Abbildung 8.12 ist für verschiedene Zeitpunkte das Magnetfeld als Ortsfunktion aufgezeigt. Es wurde dabei angenommen, daß das B-Feld einer Sprungfunktion entspricht (siehe auch Abbildung 8.12(b)). Besitzt das B-Feld nur eine Richtungskomponente, z.B.

$$\vec{B} = B(\vec{r}, t) \vec{e}_y$$

kann eine Auswertung auf folgende Weise erfolgen.

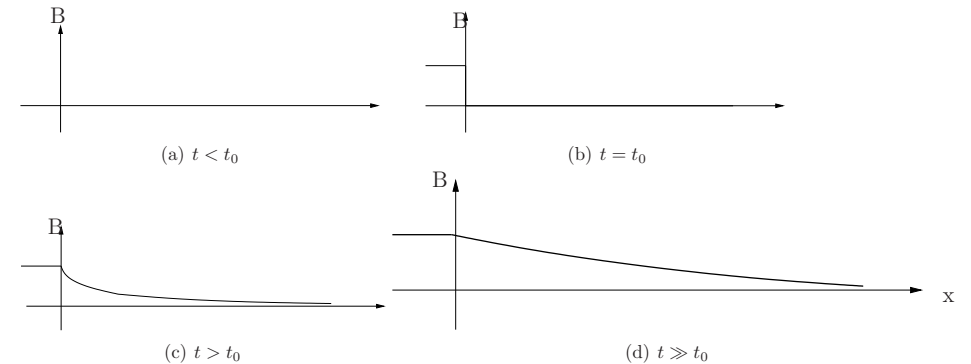


Abbildung 8.12: Zeitschritte des Skineffektes eines Magnetfeldproblems

Für den Fall, daß das magnetische Feld Sinus- oder Cosinus-förmig ist, stellt Abbildung 8.13 die entsprechende Ortsfunktion dar, und eine Berechnung mit Hilfe der Phasoren vereinfacht das Problem erheblich. Beispielsweise könnte das B-Feld wie folgt lauten:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{B}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y \quad (8.4-90)$$

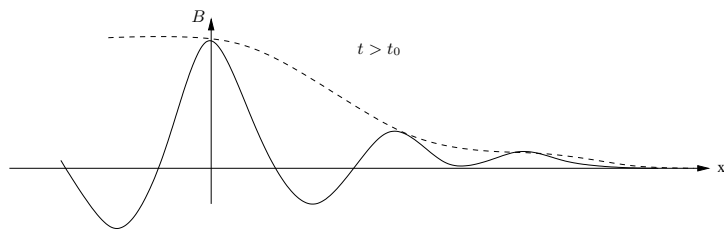


Abbildung 8.13: Skineffekt einer harmonischen magnetischen Welle

Da für einen guten Leiter das Feld auf oberflächennahe Zonen beschränkt ist, wurde der Begriff Skineffekt definiert (skin= engl. für Haut). Eine mögliche Vorstellung ist in Abbildung 8.14 skizziert.

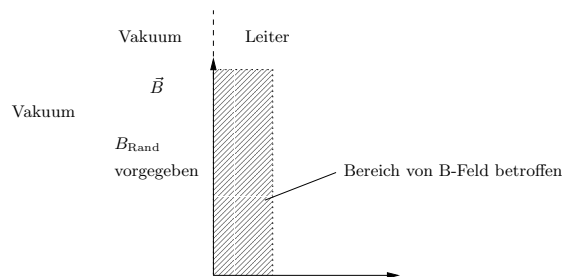


Abbildung 8.14: schematischer Skineffekt am Leiter

Nach all den graphischen Vorüberlegungen soll nun aber der Skineffekt mathematisch berechnet werden. Wie zuvor bereits erläutert, nimmt man an, daß die betrachtete Welle (das Feld) harmonisch ist. Falls dies nicht der Fall sein sollte, kann die betrachtete Welle in ihre Fourier-Komponenten zerlegt werden. Dann gilt für eine ausgewählte Fourier-Komponente des magnetischen Feldes:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{B}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (8.4-91)$$

$$\omega : \text{Kreis Frequenz } \omega = 2\pi f$$

Für das elektrische Feld nimmt man analog an:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (8.4-92)$$

Für den Spezialfall, der hier berechnet werden soll, nimmt man an, daß die Felder jeweils nur eine Richtungskomponente haben:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \underline{B}_y(x) \vec{e}_y \\ \vec{E} &= \underline{E}_z(x) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (8.4-93)$$

Setzt man dies in die Gleichungen 8.4-86 und 8.4-88 ein, so erhält man:

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} = \kappa \vec{E}_z \quad (8.4-94)$$

$$-\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} + j\omega \vec{B}_y = 0 \quad (8.4-95)$$

Setzt man dann die Gleichung 8.4-95 in Gleichung 8.4-94 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 \vec{B}_y}{\partial x^2} &= \kappa \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} \\ &= j\omega \kappa \vec{B}_y \end{aligned} \quad (8.4-96)$$

Es handelt sich dabei um eine homogene DGL zweiter Ordnung, die mit dem folgenden Ansatz gelöst werden kann:

$$\vec{B}_y = \vec{B} e^{kx} \quad (8.4-97)$$

Für die Variable k erhält man:

$$\begin{aligned} k^2 &= j\omega \mu_0 \kappa \\ k &= \pm \sqrt{j\omega \mu_0 \kappa} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} \end{aligned} \quad (8.4-98)$$

Für die Lösung des magnetischen Feldes bezüglich des Beispiels in 8.4-93 erhält man damit:

$$\vec{B}_y = B_0 e^{+\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x} + B_1 e^{-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x} \quad (8.4-99)$$

Aufgrund der Tatsache, daß das Magnetfeld nicht stärker werden kann verschwindet der erste Term und man erhält als Lösung:

$$\vec{B} = B e^{-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x} \vec{e}_y \quad (8.4-100)$$

Aufgrund der Definition der Phasoren kann nun die Zeitfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[B e^{-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x + j\omega t} \vec{e}_y \right] \\ &= B e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x} \cos(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \kappa} x) \end{aligned} \quad (8.4-101)$$

Betrachtet man die Einheit des Wurzelausdruck $\sqrt{\omega \mu_0 \kappa}$ so ergibt sich: $[\sqrt{\omega \mu_0 \kappa}] = \sqrt{\frac{1}{s} \frac{Vs}{Am} \frac{A}{Vm}} = \sqrt{\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{m}$. Da die Einheit 1/Länge ist, ordnet man dem Kehrwert den Begriff der Skintiefe zu:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega \mu_0 \kappa}} \equiv \text{Skintiefe } \lambda_s \quad (8.4-102)$$

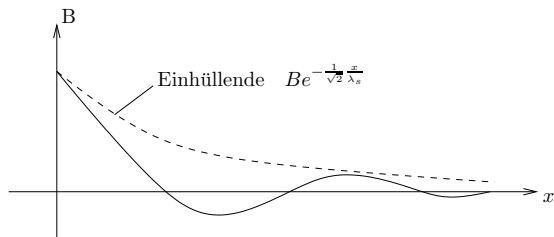


Abbildung 8.15: Einengung eines magnetischen Feldes

Aus diesem Grund wird das Magnetfeld für das betrachtete Medium oft auch wie folgt geschrieben:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\lambda_s}} \cos\left(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\lambda_s}\right) \quad (8.4-103)$$

Beispiel: realer Kupferdraht

Der Strom in einem Kupferdraht fließt lediglich in einer dünnen "Haut" auf der Oberfläche ($\approx \lambda_s$) und nicht im gesamten Volumen des Drahtes.

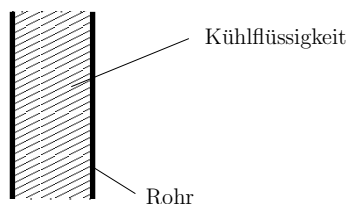


Abbildung 8.16: Leitungsrohr mit Kühlung

Zur Vermeidung von zu starker Wärmeentwicklung kann deshalb

- anstelle eines Kupferdrahtes ein Rohr verwendet werden
- und im Inneren ein Kühlmittel eingebracht werden (siehe Abbildung 8.16)

Weitere Verbesserungsmöglichkeiten sind:

- Überzug aus Silber
- Oberfläche polieren

Bei der Herstellung guter HF-Spulen kommen diese Techniken zur Anwendung.

Konsistenz des Modells der Skintiefe:

Dazu wird die Phasengeschwindigkeit der Welle betrachtet:

$$\text{Phasengeschwindigkeit der Welle} = \frac{\lambda}{T} \approx \omega \lambda \approx \omega \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \kappa \omega}} = \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0 \kappa}} \quad (8.4-104)$$

Man stellt sich die Frage: Ist die Phasengeschwindigkeit klein gegenüber c ? Vergleicht man diese beiden Größen, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{\omega}{\mu_0 \kappa}} \ll \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (8.4-105)$$

Das bedeutet für einen Leiter mit der Leitfähigkeit κ ist die Phasengeschwindigkeit deutlich langsamer als die Lichtgeschwindigkeit, wenn es sich um langsam veränderliche Felder handelt.

Für einen Leiter ist damit gegeben:

$$\frac{j_{\text{Verschiebung}}}{j_{\text{Leitung}}} = \frac{\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{\kappa E} \approx \frac{\epsilon_0 \omega}{\kappa} \ll 1 \quad (8.4-106)$$

Bei einem sehr guten Leiter kann damit der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden, wenn es sich um langsam veränderliche Felder handelt.

8.5 Anwendung Wellenausbreitung

8.5.1 Herleitung der Wellengleichung

Mit Hilfe eines einfachen Beispiels wird zunächst die Wellengleichung für das Vakuum hergeleitet. Wendet man auf die erste der Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (8.5-107)$$

die Rotation an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) &= \nabla \times \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Setzt man dann die zweite Maxwell-Gleichung ein, so erhält man:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Mit dem vektoranalytischen Zusammenhang

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (8.5-108)$$

und der vierten Gleichung erhält man die Wellengleichung für das magnetische Feld:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (8.5-109)$$

Analog ergibt sich die Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (8.5-110)$$

Sucht man die Wellengleichung für beliebige Fälle, also ohne Beschränkung auf reines Vakuum, so leitet man einfach die Wellengleichungen mit Hilfe der vollständigen Maxwell-Gleichungen her.

8.5.2 Allgemeine Behandlung von Wellenfeld-Problemen

Ein Beispiel für eine Wellenausbreitung ist in Abbildung 8.17 gegeben.

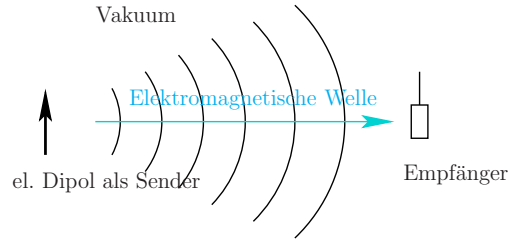


Abbildung 8.17: Wellenausbreitung

Befindet sich der Empfänger weit genug vom Sender entfernt, so können die vom Sender abgestrahlten (Kugel-)Wellen als ebene Wellen genähert werden. Aus diesem Grund sind ebene Wellen ein gutes Beispiel für die Anwendung der vollen Maxwell-Gleichung (siehe Abbildung 8.18). Dabei wird oftmals mit dem Ansatz von Phasoren bzw. Doppelphasoren

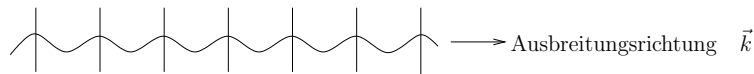


Abbildung 8.18: Wellenausbreitung einer ebenen Welle

$e^{j\omega t}$, $e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ an die Probleme herangegangen.

Wellenausbreitungsphänomene finden in Medien statt, in welchen Ladungen und Ströme nicht existieren. Deshalb können die Maxwell-Gleichungen wie folgt reduziert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (8.5-111)$$

Für die Energiebilanzgleichung gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (8.5-112)$$

Für das elektrische und das magnetische Feld werden Phasoren angesetzt:

$$\vec{E} = \text{Re}[\underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j(\omega t)}] \quad (8.5-113)$$

$$\vec{B} = \text{Re}[\underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j(\omega t)}] \quad (8.5-114)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Maxwell-Gleichung ein und führt die Zeitableitungen aus, so erkennt man, daß gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

Als Endergebnis erhält man für die vier Maxwell-Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{\vec{B}}(\vec{r}) - j\omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-115)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-116)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-117)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-118)$$

Wendet man auf Gleichung 8.5-115 die Divergenz an, so erhält man Gleichung 8.5-118.

Wendet man auf Gleichung 8.5-117 die Divergenz an, so erhält man Gleichung 8.5-116.

Aus diesem Grund reduzieren sich die relevanten Gleichungen zu

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{\vec{B}}(\vec{r}) - j\omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-119)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) + j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-120)$$

sie sind ausreichend zur Lösung entsprechender Probleme.

Behandelt man nur den Sonderfall ebener Wellen, so setzt man anstelle von den Phasoren 8.5-113 und 8.5-114 Doppelphasoren an (gekennzeichnet dadurch, daß die Phasoren doppelt unterstrichen sind):

$$\vec{E} = \text{Re}[\underline{\underline{\vec{E}}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}] \quad (8.5-121)$$

$$\vec{B} = \text{Re}[\underline{\underline{\vec{B}}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}] \quad (8.5-122)$$

Man setzt diese Ausdrücke wiederum in die Maxwell-Gleichung ein und führt die Ableitungsoperatoren aus, so erkennt man, daß für die beiden vorhandenen Operatoren gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow j\omega \\ \nabla &\rightarrow -j\vec{k}\end{aligned}$$

Als Endergebnis für ebene Wellen erhält man für die vier Maxwell-Gleichungen:

$$-\frac{1}{\mu_0}j\vec{k} \times \underline{\underline{\vec{B}}} = j\omega\varepsilon_0\underline{\underline{\vec{E}}}\quad (8.5-123)$$

$$j\omega\underline{\underline{\vec{B}}} - j\vec{k} \times \underline{\underline{\vec{E}}} = 0\quad (8.5-124)$$

$$-\varepsilon_0j\vec{k} \cdot \underline{\underline{\vec{E}}} = 0\quad (8.5-125)$$

$$j\vec{k} \cdot \underline{\underline{\vec{B}}} = 0\quad (8.5-126)$$

Relevant für die weiteren Berechnungen sind vor allem die Gleichungen 8.5-123 und 8.5-124. Diese lauten vereinfacht:

$$-c^2\vec{k} \times \underline{\underline{\vec{B}}} = \omega\underline{\underline{\vec{E}}}\quad (8.5-127)$$

$$\omega\underline{\underline{\vec{B}}} = \vec{k} \times \underline{\underline{\vec{E}}}\quad (8.5-128)$$

Die beiden anderen Gleichungen sind wiederum über die Divergenz mit den Gleichungen 8.5-127 und 8.5-128 verknüpft.



Abbildung 8.19: ebene Wellen

In vielen technischen Anlagen werden Ebene Wellen betrachtet. Oftmals weil Kugelwellen in sehr großer Entfernung als ebene Wellen genähert werden können. In Abbildung 8.19 ist eine mögliche Situation dargestellt.

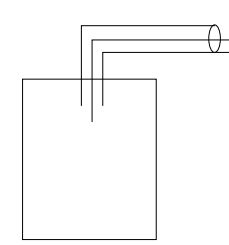
Aus dem Ansatz für das elektrische oder magnetische Feld (Gleichungen 8.5-121 und 8.5-122) erkennt man die Form der Welle. Für eine ausgewählte Ausbreitungsrichtung, z.B. die x -Richtung sieht dann die Welle Sinus-förmig aus:

$$\sin(\omega t - kx) = \sin(ckt - kx) = \sin(k(ct - x))\quad (8.5-129)$$

8.5.3 Ausbreitung und Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Zur Erzeugung von elektromagnetischen Wellen wird die Antenne als zeitabhängiger elektrischer Dipol modelliert. Das bedeutet, daß die Raumladungsdichte dieses Dipols mit

$$\rho(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot \vec{p}(t)\delta^{(3)}(\vec{r})\quad (8.5-130)$$



Radiosender

Abbildung 8.20: Dipolstrahler als Radiosender

und die Stromdichte entsprechend mit

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{p}(t)\delta^{(3)}(\vec{r})\quad (8.5-131)$$

angenommen wird. Für das elektrische und magnetische Feld setzt man nun wiederum Phasoren der folgenden Form an (siehe auch Kapitel 8.5.2):

$$\underline{\underline{\vec{E}}} = \text{Re}[\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$\underline{\underline{\vec{B}}} = \text{Re}[\underline{\underline{\vec{B}}}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

Nimmt man auch den Dipol zeitabhängig mit

$$\vec{p}(t) = \text{Re}(\vec{p}e^{j\omega t}) = \vec{p}\text{Re}(e^{j\omega t}) = \vec{p}\cos(\omega t)$$

an, so erhält man durch Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \underline{\underline{\vec{B}}} - j\omega\varepsilon_0\underline{\underline{\vec{E}}} = j\omega\vec{p}\delta^{(3)}(\vec{r})\quad (8.5-132)$$

$$j\omega\underline{\underline{\vec{B}}} + \nabla \times \underline{\underline{\vec{E}}} = 0\quad (8.5-133)$$

Über die Anordnung der Divergenz auf diese beiden Gleichungen erhält man die beiden Gleichungen

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\vec{B}}} = 0$$

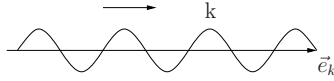
$$\varepsilon_0\nabla \cdot \underline{\underline{\vec{E}}} = -\nabla \cdot \vec{p}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

automatisch.

Für die Welle wird nun weiterhin ein harmonischer Ansatz der Form $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ gewählt, da man davon ausgeht, daß man ausreichend weit vom Sender entfernt ist. Die am Sender eintreffenden Wellen entsprechen dann ebenen Wellen. Damit kann man ansetzen:

$$\underline{\underline{\vec{E}}}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left(\underline{\underline{\vec{E}}}\underline{\underline{e}}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right)\quad (8.5-134)$$

$$\underline{\underline{\vec{B}}}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left(\underline{\underline{\vec{B}}}\underline{\underline{e}}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right)\quad (8.5-135)$$



Dabei stellen $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_k$ die Ortsfrequenz des Wellenvektors dar.

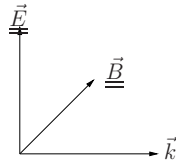
Mit diesem Ansatz gilt für ebene Wellen im Vakuum:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}j\vec{k} \times \underline{\underline{B}} + \varepsilon_0 j\omega \underline{\underline{E}} &= 0 \\ j\vec{k} \times \underline{\underline{E}} - j\omega \underline{\underline{B}} &= 0\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Divergenz auf diese Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \underline{\underline{B}} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \underline{\underline{E}} &= 0\end{aligned}$$

Das bedeutet \vec{k} , $\underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{E}}$ sind zueinander orthogonal, sie stehen also aufeinander senkrecht.



Besitzt das magnetische Feld nur eine y -Komponente und das elektrische Feld nur eine z -Komponente, so geht der Wellenzahlvektor \vec{k} in x -Richtung. Entsprechend erhält man:

$$\begin{aligned}k\underline{\underline{E}}_z &= \omega\underline{\underline{B}}_y \\ \frac{1}{\mu_0}kB_y &= \varepsilon_0\omega E_z\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned}k\underline{\underline{E}}_z &= \omega\varepsilon_0\mu_0\omega\frac{1}{k}\underline{\underline{E}}_z \\ \Rightarrow k^2 &= \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2}\end{aligned}$$

Das bedeutet die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Maxwell-Gleichungen enthalten demnach Wellenlängen, hier speziell ebene Wellen, der Form:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{Re}\left(\underline{\underline{E}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) \\ \vec{B} &= \text{Re}\left(\underline{\underline{B}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right)\end{aligned}$$

Der Wellenanteil der Felder kann dabei auch anders formuliert werden

$$e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = e^{j\omega\left(t - \frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\vec{r}\right)} = e^{j\omega\left(t - \frac{1}{c}x\right)} e^{jk(ct-x)}$$

für den zuvor beschriebenen Fall, die Welle breite sich in x -Richtung aus.

8.5.4 Energieausbreitung von elektromagnetischen Wellen

Die Energieausbreitung der Welle kann mit Hilfe der Energiebilanzgleichung dargestellt werden. Für periodische Vorgänge sind vor allem Mittelwerte interessant:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \right) \right\rangle + \left\langle \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \right) \right\rangle = -\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$$

Es gilt zum Beispiel im Vakuum ($\vec{j} = 0$)

$$\nabla \cdot \left\langle \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \right) \right\rangle = \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

Berechnung des Poynting-Vektors \vec{S} :

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \left\langle \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\underline{E}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right) \times \text{Re} \left(\underline{\underline{B}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left\langle \left(\underline{\underline{E}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \underline{\underline{E}}^*e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right) \times \left(\underline{\underline{B}}e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \underline{\underline{B}}^*e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{B}}^* + \underline{\underline{E}}^* \times \underline{\underline{B}} \right) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{B}}^* + \left(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{B}}^* \right)^* \right)\end{aligned}$$

Das bedeutet für eine ebene Welle, die Energie breitet sich in Wellenrichtung aus: $\sim \vec{k}$

Zum Beispiel für den Fall einer elektromagnetischen Kugelwelle (siehe Abbildung 8.17) gilt:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}(t)\delta^{(3)}(\vec{r}) \\ \vec{r} &= r\vec{e}_r\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Maxwell-Gleichungen unter der Annahme harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \underline{\underline{B}} - j\varepsilon_0\omega \underline{\underline{E}} = j\omega\vec{p}\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (8.5-136)$$

$$\nabla \times \underline{\underline{E}} + j\omega \underline{\underline{B}} = 0 \quad (8.5-137)$$

Die Ortsabhängigkeit muß nun bestimmt werden, sie kann nicht harmonisch angesetzt werden, wie dies der Fall war, für ebene Wellen.

8.5.5 Lösung von Wellenausbreitungsproblemen mit dem Hertz'schen Vektor

Mit dem Ansatz

$$\underline{\underline{E}} = \nabla\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\underline{\underline{\Pi}} \quad (8.5-138)$$

$$\underline{\underline{B}} = j\omega\varepsilon_0\mu_0\nabla \times \underline{\underline{\Pi}} \quad (8.5-139)$$

kann gezeigt werden, daß Gleichung 8.5-137

$$\nabla \times \vec{E} + j\omega \vec{B} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \vec{\Pi} + j\omega j\omega \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \vec{\Pi} = 0$$

identisch erfüllt ist. Gleichung 8.5-136 muß noch näher betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (j\omega \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \vec{\Pi}) - j\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} (\nabla \nabla \cdot \vec{\Pi} + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{\Pi}) &= \frac{j\omega}{\varepsilon_0} \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}) - \nabla (\nabla \cdot \vec{\Pi}) - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{\Pi} &= \frac{\vec{p}}{\varepsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (8.5-140)$$

Durch Anwendung der vektoranalytischen Formel

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

und der Darstellung der Lichtgeschwindigkeit mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

erhält man:

$$-\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\Pi} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{p} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (8.5-141)$$

Diese Gleichung ist von der mathematische Struktur her gesehen eine Helmholtz-Gleichung. Als Vergleich sei dazu die Poisson-Gleichung betrachtet

$$-\nabla^2 \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r})$$

mit der Lösung

$$\phi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Die Lösung des Hertz'schen Problems ist mit

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} e^{-j\frac{\omega}{c}r} \frac{\vec{p}}{r} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-jkr} \vec{p} \quad (8.5-142)$$

von ganz ähnlicher Struktur.

Aus der Lösung für $\vec{\Pi}$ ergeben sich damit die Felder ($k = \frac{\omega}{c}$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} e^{-jkr} \left(\frac{3(\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} (1 + jkr) + \frac{k^2 (\vec{p} - (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \vec{e}_r)}{r} \right) \quad (8.5-143)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} e^{-jkr} (1 + jkr) \vec{e}_r \times \vec{p} \quad (8.5-144)$$

Als Test dieser Lösung kann die Frequenz ω gleich Null gesetzt werden. Dies bedeutet, daß auch $k=0$ gilt und man erhält

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{3(\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \quad (8.5-145)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (8.5-146)$$

das Feld des elektrischen Dipols im Ursprung (siehe Vergleich mit Poisson-Gleichung).

8.5.6 Fernfeldbetrachtung des Hertz'schen Dipolstrahlers

Bei der Fernfeldbetrachtung von Wellenausbreitungsphänomenen werden die elektrischen und magnetischen Felder für große r betrachtet. Nur die Terme $\sim \frac{1}{r}$ spielen dann eine Rolle, alle anderen Terme sind unwichtig. Für die Lösung des zeitharmonischen elektrischen Dipols mittels des Hertz'schen Vektors ergibt sich damit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} e^{-jkr} \frac{k^2}{r} (\vec{p} - (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \vec{e}_r) \quad (8.5-147)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} e^{-jkr} \frac{k^3}{\omega r} \vec{e}_r \times \vec{p} \quad (8.5-148)$$

Damit ist klar, daß sich der Poynting-Vektor mit $\frac{1}{r^2}$ verhält. Das bedeutet, für genau diese Fernfeldbetrachtung sehen die Felder des Hertz'schen Dipols wie ebene Wellen aus. Der Poynting-Vektor im zeitlichen Mittel lautet:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{4\mu_0} (\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= \frac{k^5}{32\mu_0 \varepsilon_0^2 \pi^2 \omega} (\vec{p}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{e}_r)^2) \end{aligned} \quad (8.5-149)$$

Mit dem Zusammenhang

$$\vec{p}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{e}_r)^2 = \vec{p}^2 - \vec{p}^2 \cos^2 \vartheta = \vec{p}^2 \sin^2 \vartheta$$

erhält man ein Maß für die abgestrahlte Energie:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{k^5 \vec{p}^2}{32\mu_0 \varepsilon_0^2 \pi^2 \omega} \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{ck^4 \vec{p}^2}{32\varepsilon_0 \pi^2} \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (8.5-150)$$

Durch Auswerten des Winkels ϑ erhält man die Richtcharakteristik (siehe Abbildung 8.21).

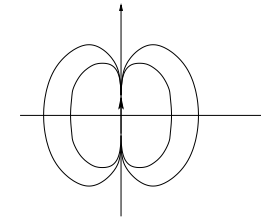


Abbildung 8.21: Richtcharakteristik des Hertz'schen Dipolstrahlers

Da das Flächenelement der Kugel mit $d^2r = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ gegeben ist, ist die Leistung,

die abgestrahlt wird

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d^2\vec{r} = \frac{ck^4 \vec{p}^2}{32\epsilon_0\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\
 &= \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 \vec{p}^2}{c^3}
 \end{aligned} \tag{8.5-151}$$

unabhängig von r .

Das bedeutet, die Energie geht bei der Ausbreitung nicht verloren, lediglich das am Empfänger ankommende Signal wird mit der Entfernung immer schwächer.

8.6 Lernziele Kapitel 8

1. Die Regime statischer Felder, das Regime langsam veränderlicher Felder, speziell die elektrostatische und magnetostatische Näherung, das Regime der Strömungsfelder und das der Wellenausbreitung kennen und die zugehörigen Maxwell-Gleichungen herleiten können
2. Wissen, wie ein Phasor definiert ist und wie man mit Phasoren rechnet
3. Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in Phasorschreibweise?
4. Strömungsfeldprobleme berechnen können
5. Wissen, was Diffusion bedeutet
6. Die Diffusionsgleichung herleiten können
7. Was ist der Skin-Effekt?
8. Wie lassen sich Wellenfeld-Probleme mit den Maxwell Gleichungen beschreiben?
9. Die Herleitung der Wellengleichungen kennen
10. Die Abstrahlung und die Energieausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreiben können
11. Die Idee des Hertz'schen Vektors verstanden haben
12. Was ist ein Dipolstrahler?
13. Was versteht man unter einer Fernfeldbetrachtung?

A Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel ist eine Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Konzepte die zur Berechnung elektrischer und magnetischer Felder grundlegend sind. Es handelt sich dabei um keine eigenständige Darstellung der mathematischen Zusammenhänge an sich, vielmehr soll dieses Kapitel eine Erinnerung an die Mathematik-Vorlesungen des Grundstudiums sein.

In den Kapiteln dieses Skriptes werden fast ausschließlich sogenannte "gutmütige" Funktionen betrachtet. Das bedeutet unter anderem, daß diese Funktionen immer genügend oft differenzierbar sind oder daß Ableitungen dieser Funktionen beliebig vertauscht werden können und ähnliches. Ausnahmen von dieser Regel sind in den folgenden Kapiteln immer deutlich gekennzeichnet und werden explizit diskutiert.

A.1 Der physikalische Raum

In Stichpunkten sind die wichtigsten Eigenschaften des von uns betrachteten Raumes aufgeführt:

- wir befinden uns in einem 3+1-dimensionalen Euklidischen Raum, x , y , z und t , also 3 Raumdimensionen und 1 Zeitdimension beschreiben den Raum
- die Ereignisse sind geordnet
- zwischen zwei Richtungen werden Winkel definiert
- die Begriffe senkrecht und parallel sind definiert
- es gibt 3 senkrechte Richtungen
- im Raum sind die Begriffe links und rechts wohl definiert
- Definition von Punkten, diese sind die Träger des 3-dimensionalen Vektorraumes
- zur Festlegung der Punkte im Raum wird meist ein willkürlicher Nullpunkt (Ursprung) festgelegt
- Vektoren verbinden Punkte
- Verschiebung von Vektoren \rightarrow die Eigenschaften des Vektors bleiben erhalten, d.h. die Verschiebung ist wegunabhängig
Gegenbeispiel: Die Oberfläche einer Kugel ist kein Euklidischer Raum, z.B. das Endergebnis einer Vektorverschiebung ist abhängig vom Weg

A.2 Der Vektorraum

Da es sich bei dem von uns betrachteten physikalischen Raum um einen Euklidischen Raum handelt und wir deshalb Vektoren definieren, müssen einige mathematische Eigenschaften der Vektoren betrachtet werden.

A.2.1 Vektoralgebra

Für eine skalare Variable gilt:

$$\text{Variable} = \text{Zahlenwert} \bullet \text{Einheit} \tag{A.2-1}$$

allgemein: $a = (a)[a]$
 Beispiel: $M = 3\text{kg} = 6,37\text{lb}$

Für einen beliebigen Vektor gilt:

$$\text{Vektor} = \text{Zahlenwert} \bullet \text{Einheit} \bullet \text{Richtung} \tag{A.2-2}$$

allgemein: $\vec{a} = (a)[a]\vec{e}_a$
 Beispiel: $\vec{v} = 30\frac{\text{km}}{\text{h}}\vec{e}_v$

Die Definitionen der Vektoraddition, der Skalarmultiplikation und sonstige Rechenregeln werden als bekannt vorausgesetzt. Aus Gründen der Konvention folgen aber nun einige Definitionen von Vektorprodukten zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

Das Skalarprodukt ist definiert durch:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{A.2-3}$$

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) ist definiert durch:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{A.2-4}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht
 die Richtung ist festgelegt durch die Rechte-Hand-Regel

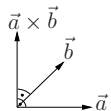


Abbildung A.1: Vektorprodukt

Das Vektorprodukt steht senkrecht auf den beiden vektormultiplizierten Vektoren (siehe Abbildung A.1).

Für diese Vektorprodukte gibt es einige Regeln die bei der Rechnung beachtet werden müssen:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \tag{A.2-5}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \tag{A.2-6}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \text{ (nicht assoziativ)} \tag{A.2-7}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \text{ (nicht kommutativ)} \tag{A.2-8}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{A.2-9}$$

Für Produkte mit drei verschiedenen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ergeben sich die folgenden Regeln:

Das Spatprodukt ist definiert durch:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} &= -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} &= -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} \end{aligned} \right\} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \text{Skalar} \tag{A.2-10}$$

Die Gleichungen in A.2-10 zeigen, daß das Spatprodukt zyklisch vertauschbar ist.

A.2.2 Komponentenerlegung und Basistransformation

Vektoren werden in ihre Einzelkomponenten zerlegt. Sie werden also in den Komponenten der Einheitsvektoren dargestellt.

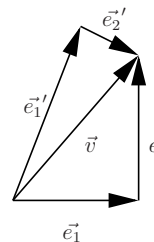


Abbildung A.2: Vektor \vec{v} und die Einheitsvektoren der Systeme S und S' (2-Dim.)

Das bedeutet ein Vektor \vec{a} kann in die Anteile der Einheitsvektoren zerlegt werden, also

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{A.2-11}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} a_1 &= \vec{a} \cdot \vec{e}_1 \\ a_2 &= \vec{a} \cdot \vec{e}_2 \\ a_3 &= \vec{a} \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{A.2-12}$$

Oftmals werden Vektoren in der Form $(a_1 \ a_2 \ a_3)^T$ dargestellt, dabei besteht aber das Problem, daß Informationen über Einheiten, Koordinatensystem etc. nicht ersichtlich sind. Diese Darstellung macht deshalb nur im Rahmen eines Orthonormalsystems Sinn.

Bei einer Basistransformation wird ein Vektor ausgehend von den ursprünglichen Einheitsvektoren mit einem neuen, anderen Satz von Einheitsvektoren dargestellt. Zum Beispiel kann der Vektor \vec{a} wie folgt in verschiedene Einheitsvektoren zerlegt werden.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Basistransformation}} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-13})$$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a'_1\vec{e}'_1 + a'_2\vec{e}'_2 + a'_3\vec{e}'_3$$

Die Einzelkomponente a'_1 wird durch folgende Operation berechnet.

$$\begin{aligned} a'_1 &= \vec{a} \cdot \vec{e}'_1 = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot \vec{e}'_1 \\ &= \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1 a_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_1 a_2 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_1 a_3 \end{aligned} \quad (\text{A.2-14})$$

Für die gesamte Basistransformation ergibt sich damit

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_3 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_3 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2-15})$$

Die Norm eines Einheitsvektors ist:

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = 1 = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| \quad (\text{A.2-16})$$

Skalarprodukte verschiedener Einheitsvektoren ergeben sich zu Null, d.h.:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad (\text{A.2-17})$$

Eine Basis von Einheitsvektoren bildet ein Orthonormalsystem. Allgemein gilt für jedes Orthonormalsystem:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (\text{A.2-18})$$

mit:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad (\text{A.2-19})$$

Das heißt, alle Einheitsvektoren eines Orthonormalsystems stehen aufeinander senkrecht.

A.3 Der Raum

A.3.1 Raumpunkte

Punkte können im Raum eindeutig beschrieben werden:

- koordinatengebundene Beschreibung
→ Koordinatensysteme (siehe Kapitel A.3.3)
- koordinatenfreie Beschreibung
→ Ortsvektoren (siehe Kapitel A.3.2)

A.3.2 Ortsvektoren

- Vektoren verbinden zwei Punkte P_1 und P_2 → Vektor $\vec{P_1P_2}$
- zu jedem Punkt P gehört der Vektor \vec{OP}
- zu jedem Vektor gehört ein Punkt
- jeder Ortsvektor \vec{r} beschreibt einen Aufpunkt

Die zu den in der Feldtheorie am häufigsten verwendeten Koordinatensystemen gehörenden Ortsvektoren werden am Ende des nächsten Kapitels angegeben.

A.3.3 Koordinaten

Beliebige Vektoren können in andere Vektoren zerlegt werden (siehe auch Kapitel A.2.2). Dies führt in den meisten Fällen zu speziellen Koordinatensystemen. Die am häufigsten verwendeten Koordinatensysteme sind:

- Kartesische Koordinaten (x, y, z) mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
- Zylinderkoordinaten (R, φ, z) mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_R, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$
- Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

Eine Koordinatentransformation z.B. von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x_c &= R_z \cos \varphi_z \\ y_c &= R_z \sin \varphi_z \\ z_c &= z_z \end{aligned} \quad (\text{A.3-20})$$

Dabei soll der Index c auf kartesische Koordinaten und der Index z auf Zylinderkoordinaten hinweisen. Grundsätzlich ist es wichtig sich einzuprägen, daß nur im kartesischen

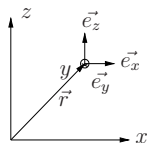


Abbildung A.3: Darstellung des Ortsvektors \vec{r} und der Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten

Koordinatensystem die Einheitsvektoren ortsunabhängig sind.

Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten lautet in Komponentenschreibweise:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{A.3-21}$$

Im Zylinderkoordinatensystem und im Kugelkoordinatensystem sind die Ortsvektoren ortsabhängig, z.B. im Zylinderkoordinaten gilt für den Richtungsvektor \vec{e}_R :

$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(\varphi) \tag{A.3-22}$$

Der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z \tag{A.3-23}$$

In Kugelkoordinaten gilt für den Richtungsvektor \vec{e}_r :

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\vartheta, \varphi) \tag{A.3-24}$$

Der Ortsvektor in Kugelkoordinaten lautet:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{A.3-25}$$

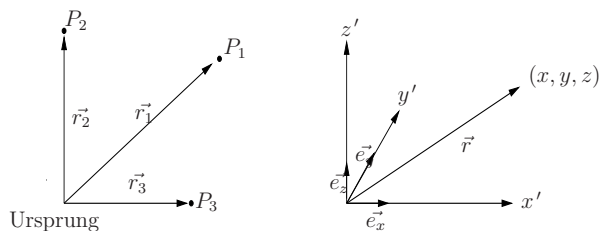


Abbildung A.4: koordinatenunabhängige/ -abhängige Darstellung

Bei Berechnungen ist also konsequent darauf zu achten, ob eine koordinatenabhängige oder eine koordinatenunabhängige Darstellung gewählt wird. Ein Beispiel ist in Abbildung A.4 zu sehen. Im linken Bild wird jeder Punkt P_i durch einen koordinatenunabhängigen Ortsvektor \vec{r}_i dargestellt. Im rechten Bild wird der Punkt (x, y, z) durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ dargestellt. Durch die Festlegung dieser Einheitsvektoren hat man sich an ein Koordinatensystem gebunden.

A.4 Objekte im Raum

In der Vektor-Analyse und in der Differential- und Integralrechnung sind Objekte exakt definiert.

Bei der Differential- und Integralrechnung einer reellen Veränderlichen gilt:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

Bei der Differential- und Integralrechnung mehrerer reeller Veränderlicher gilt:

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$$

In der Vektor-Analyse gilt: Bildraum oder Urbildraum werden mit dem Ortsraum identifiziert

- Bildraum ist der Ortsraum: Objekte im Raum, Funktionen in den Raum

Beispiel:

$$\mathbb{R} \mapsto \text{Ortsraum}, s \mapsto \vec{r}(s)$$

- Urbildraum ist der Ortsraum: Felder, Funktionen des Raumes

Beispiel:

$$\text{Ortsraum} \mapsto \mathbb{R}_0^+, \vec{r} \mapsto T(s)$$

Zur weiteren Vertiefung der Vektor-Analyse werden nun zuerst verschiedene Objekte im Raum besprochen.

A.4.1 Punkte

Jeder Punkt wird durch einen Ortsvektor bezüglich eines beliebig gewählten Ursprungs beschrieben. Für 3 Punkte ergeben sich somit 3 Aufpunkte $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ im Raum (siehe Abbildung A.5).

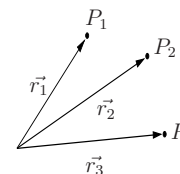


Abbildung A.5: 3 Punkte im Raum

Punkte werden also durch einen Index numeriert. Das heißt eine Ansammlung von k Punkten mit einer physikalischen Eigenschaft (z.B. Ladung q_k) kann z.B. durchlaufen

werden, indem die vorher genannten Ladungen q_k aufaddiert werden:

$$Q = \sum_{k=1}^3 q_k \tag{A.4-26}$$

Bei Punkten handelt es sich um eine Abbildung von \mathbb{N} oder einer Teilmenge davon auf den Ortsraum.

A.4.2 Linien

Linien werden durch einen Parameter parametrisiert: $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$

Linienelement:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha = \vec{t} d\alpha \tag{A.4-27}$$

Es handelt sich um eine Abbildung von \mathbb{R} oder einer Teilmenge davon auf den Ortsraum. Das heißt : $\mathbb{R} \mapsto$ Ortsraum $\alpha \mapsto \vec{r}(\alpha)$

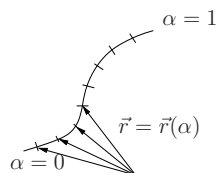


Abbildung A.6: Parametrisierung einer Linie mit dem Parameter α

Dabei bezeichnet der Parameter α bei der oben verwendeten Definition (Gleichung A.4-27) die Bogenlänge der Linie, oder man bezeichnet α allgemein als den Parameter der Kurve.

Linien L haben Endpunkte ∂L

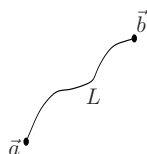


Abbildung A.7: beliebige Linie mit Endpunkten \vec{a} und \vec{b}

Beispiele für Integrale über Linien:

$$\int_{\text{Linie}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1} \vec{A}(\vec{r}_L(\alpha)) \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1} \vec{A}(\vec{r}_L(\alpha)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\int_{\text{Linie}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \vec{A}(\vec{r}(\alpha)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha \equiv \int_{\beta_0}^{\beta_1} \vec{A}(\vec{r}(\beta)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta$$

Tangentenvektor

Der Tangentenvektor bezüglich des Parameters α ist definiert durch :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} \tag{A.4-28}$$

Man bezeichnet ihn auch als den Einheitsvektor in Richtung der Tangente. Dabei gilt

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} \equiv \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \vec{r}(\alpha)}{\Delta\alpha} \tag{A.4-29}$$

wobei diese Definition abhängig von der Parametrisierung ist.

Wenn der Tangentenvektor durch die Bogenlänge parametrisiert wird gilt:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\alpha} \right| = 1$$

A.4.3 Flächen

Flächen werden durch zwei Parameter parametrisiert:

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) \tag{A.4-30}$$

Es handelt sich dabei um eine Abbildung von \mathbb{R}^2 oder einer Teilmenge davon auf den Ortsraum.

Das heißt: $\mathbb{R}^2 \mapsto$ Ortsraum, $(\alpha, \beta) \mapsto \vec{r}(\alpha, \beta)$

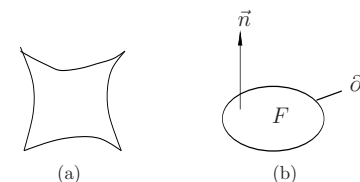


Abbildung A.8: beliebige Flächen

Definitionen:

- Flächen F haben eine geschlossene Randkurve ∂F
- Der Normalenvektor \vec{n} steht senkrecht auf der Fläche F (siehe Abbildung A.8(b))
Es gilt:

$$|\vec{n}| = 1$$

- der Normalenvektor wird berechnet durch

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right|} \tag{A.4-31}$$

- Flächenelement skalar:

$$df = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta \tag{A.4-32}$$

- Flächenelement vektoriell:

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta = \vec{n} df \tag{A.4-33}$$

Beispiele für Flächenintegrale:

$$\begin{aligned} \int_{\text{Fläche}} \vec{A} \cdot d\vec{f} &\equiv \int_{\beta} \int_{\alpha} \vec{A}(\vec{r}(\alpha, \beta)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta \\ \int_{\text{Fläche}} \phi df &\equiv \int_{\beta} \int_{\alpha} \phi(\vec{r}(\alpha, \beta)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta \\ \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int_F \vec{A} \cdot \vec{n} df \end{aligned}$$

A.4.4 Körper / Gebiete

Körper werden durch drei Parameter parametrisiert:

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta, \gamma) \tag{A.4-34}$$

Es handelt sich dabei um eine Abbildung von \mathbb{R}^3 oder einer Teilmenge davon auf den Ortsraum.

Das heißt: $\mathbb{R}^3 \mapsto$ Ortsraum, $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \vec{r}(\alpha, \beta, \gamma)$

Volumenelement:

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right) \right| d\alpha d\beta d\gamma \tag{A.4-35}$$

Körper im Raum V haben eine geschlossene Oberfläche ∂V .

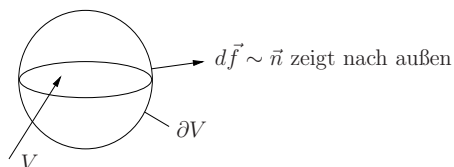


Abbildung A.9: beliebiger Körper

Beispiel für Volumenintegral (Integration über Gebiete, Körper, Volumen)

$$\begin{aligned} \int_V \phi(\vec{r}) d^3r &= \int_V \phi(\vec{r}) dV \\ &= \int_V \phi(\vec{r}) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right) \right| d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \int_{\gamma} \int_{\beta} \int_{\alpha} \phi(\vec{r}) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right) \right| d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned} \tag{A.4-36}$$

A.5 Felder im Raum und auf Objekten

Es handelt sich dabei um eine Abbildung des Ortsraumes nach \mathbb{R}_0^+ . In diesem Sinne wird in der Vektor-Analyse von Feldern gesprochen. Als Beispiel zeigt Abbildung A.10 ein beliebiges Temperaturfeld $T(\vec{r})$ im Ortsraum.

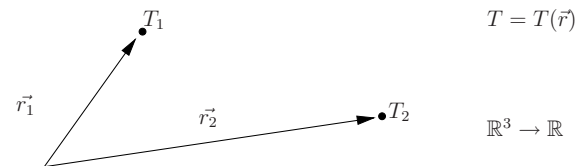


Abbildung A.10: Beispiel eines Temperaturfeldes

Im Sinne der Vektor-Analyse gilt für ein Feld: Jedem Ortspunkt wird eine Größe (z.B. Skalar oder Vektor) zugeordnet:

Skalarfelder: $\psi = \psi(\vec{r})$, jedem Raumpunkt wird ein Skalar zugeordnet, Ortsraum \mapsto Skalar

Vektorfelder: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, jedem Raumpunkt wird ein Vektor zugeordnet, Ortsraum \mapsto Vektor

Tensorfelder: $P = P(\vec{r})$, jedem Raumpunkt wird ein Tensor zugeordnet, Ortsraum \mapsto Tensor

Zusätzlich gibt es Felder auf Flächen, Linien oder Punkten

\rightarrow Beispiele: Vektorfeld auf Punkten, Temperatur einer Oberfläche

Zur Darstellung von Feldern müssen geeignete Möglichkeiten gefunden werden, um diese angemessen darzustellen. Folgendes Beispiel soll eine solche Möglichkeit verdeutlichen.

Aufgabe: Darstellung eines Magnetfeldes $\vec{B}(\vec{r})$

\rightarrow Richtungsinformation aus Tangentenverlauf

\rightarrow Betragsinformation aus Feldliniendichte

Weitere Möglichkeiten zur Darstellung von Feldern:

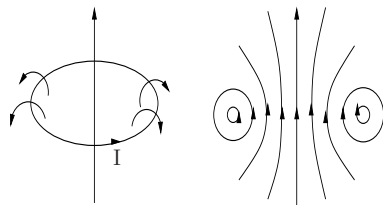


Abbildung A.11: Feldlinien eines Magnetfeldes

- Höhenlinienbild
- Farbcodierung
- Feldlinienbild: Lösung der DGL $\frac{d}{ds}\vec{r}_L = k \cdot \vec{E}(\vec{r}(s))$, siehe Abbildung A.11
- Vektorpfeile an definierten diskreten Punkten

Die von uns am häufigsten betrachteten Felder befinden sich meist im 3-dimensionalen Raum. Auf Felder bezüglich Flächen, Linien oder Punkten wird daher nicht weiter eingegangen.

A.6 Differentialoperatoren

A.6.1 Einführende Beispiele

Einige Eigenschaften von Differentialoperatoren sollen anhand von reellen Variablen dargestellt werden. Für die folgenden Beispiele gilt für die Funktionen F und G :

$$F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$$

$$G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto G(x)$$

Beispiel eines Differentialoperators im 1-Dimensionalen (Ableitungs-Operator):

$$\frac{d}{dx}$$

Bei Anwendung auf die Funktion F wird mit

$$F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto F'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \frac{1}{2}\varepsilon) - F(x - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{A.6-37}$$

definiert:

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) \tag{A.6-38}$$

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie linear approximiert werden kann, die Ableitung vermittelt dann die Approximation. Der Ableitungs-Operator ist damit ein linearer Operator:

$$\frac{d}{dx} (\alpha F) = \alpha \frac{d}{dx} F \tag{A.6-39}$$

$$\frac{d}{dx} (F + G) = \frac{d}{dx} F + \frac{d}{dx} G \tag{A.6-40}$$

Es gilt außerdem die Produktregel:

$$\frac{d}{dx} (FG) = F \left(\frac{dG}{dx} \right) + \left(\frac{dF}{dx} \right) G \tag{A.6-41}$$

Die Ableitung hat eine Inversion, nämlich die Integration:

$$\frac{d}{dx} \int \dots = \text{'Identität'} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f \tag{A.6-42}$$

$$\int \frac{d}{dx} \dots = \text{Identität} \quad \rightarrow \quad \text{HS} \tag{A.6-43}$$

Der Hauptsatz (HS) der Differential- und Integralrechnung lautet im 1-Dimensionalen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dx} dx = F(x_2) - F(x_1) \tag{A.6-44}$$

Aus der Differentialrechnung ist außerdem bekannt:

$$df = \frac{df}{dx} dx; \quad \Delta f \sim \frac{df}{dx} \Delta x$$

Auf diese Zusammenhänge wird in den folgenden Kapiteln zurückgegriffen. Dabei werden hier Differentialoperatoren betrachtet, die den Ableitungscharakter mit einem Vektorcharakter verbinden.

A.6.2 Definition des Nabla

∇ ist Vektor und Ableitung zugleich. In der Literatur ist auch manchmal die Schreibweise $\vec{\nabla}$ zu finden, jedoch sind die mathematischen Eigenschaften identisch. Am Beispiel der Produktregel soll die Verwendung verdeutlicht werden:

$$\text{grad}(\phi\psi) = \phi (\text{grad}\psi) + (\text{grad}\phi) \psi$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi (\nabla\psi) + (\nabla\phi) \psi \tag{A.6-45}$$

Bei der Anwendung des Nabla-Operators ergeben sich z. B. folgende Möglichkeiten:

- $\text{grad}\phi = \nabla\phi$ "Multiplikation Vektor mit Skalar", ist ein Vektor
- $\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ "Vektormultiplikation, Kreuzprodukt" ist ein Vektor
- $\text{div}\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B}$ "Skalarprodukt", ist ein Skalar

Genauso wie ein beliebiger Vektor \vec{A} in seine kartesischen Komponenten zerlegt werden kann

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

kann der Nabla-Operator zerlegt werden. In kartesischen Koordinaten lautet der Nabla-Operator:

$$\nabla \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.6-46}$$

Zur weiteren Veranschaulichung soll hier ein Beispiel für die Nabla-Schreibweise studiert werden. Bei dieser Schreibweise soll der Index c bedeuten, daß der entsprechende Term konstant gehalten wird:

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi_c \text{div} \vec{A} + \vec{A}_c \cdot \text{grad} \phi \tag{A.6-47}$$

1) Ersetzen durch Nabla-Schreibweise:

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \nabla \cdot (\phi \vec{A})$$

2) Produktregel (für beide Schreibweisen):

$$\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi_c \text{div} \vec{A} + \vec{A}_c \cdot \text{grad} \phi \equiv \nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi_c \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \phi \cdot \vec{A}_c$$

3) Das Ergebnis lautet in der neuen Schreibweise:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \phi_c \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \phi \cdot \vec{A}_c \\ &= \phi \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \phi \cdot \vec{A} \end{aligned} \tag{A.6-48}$$

A.6.3 Gradient

Der Gradient ist wie folgt definiert:

Gegeben sei ein skalares Feld ϕ , zugeordnet sei ein Vektorfeld, damit gilt für

$$\nabla \phi \equiv \text{grad} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi \end{pmatrix} \tag{A.6-49}$$

Diese Darstellung ist allerdings koordinatenabhängig. Gesucht ist nun eine koordinatenunabhängige Definition:

- $\phi = \phi(\vec{r})$ sei ein skalares Feld des Ortes
- $\nabla \phi \equiv \text{grad} \phi$ ein Vektorfeld
- Vorschrift: Jedem Raumpunkt wird Richtung und Stärke des Anstiegs der Funktion ϕ zugeordnet

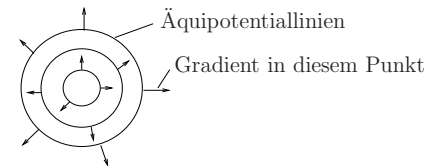


Abbildung A.12: Darstellung eines Skalarfeldes

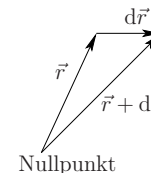


Abbildung A.13: Darstellung zur Definition des Gradienten

- Wegschritt $\Delta \vec{s}$ von \vec{r} auf $\vec{r} + \Delta \vec{s}$ ändert den Wert des Feldes von $\phi(\vec{r})$ auf $\phi(\vec{r} + \Delta \vec{s})$ (siehe Abbildung 3.14):

$$\Delta \phi = \phi(\vec{r} + \Delta \vec{s}) - \phi(\vec{r}) \equiv \nabla \phi \cdot \Delta \vec{s} \tag{A.6-50}$$

- Der Gradient steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen. Er vermittelt einen Transport in Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} \phi d\vec{f} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \phi + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi \end{pmatrix} \tag{A.6-51}$$

- Es gilt folgende Eigenschaft:

$$\text{Gradient: } d\phi = \text{grad} \phi \cdot d\vec{s} \tag{A.6-52}$$

A.6.4 Rotation

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$, zugeordnet ist ein Vektorfeld $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{r})$

Die Rotation mißt die Wirbelstärke und gibt die Wirbelrichtung an. Sie ist durch folgende Definitionsgleichung beschreibbar:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \int_{\partial \Delta F} \vec{B} \cdot d\vec{r} \equiv \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \tag{A.6-53}$$

Der Vektor \vec{n} bezeichnet dabei den Normalenvektor der Fläche ΔF .

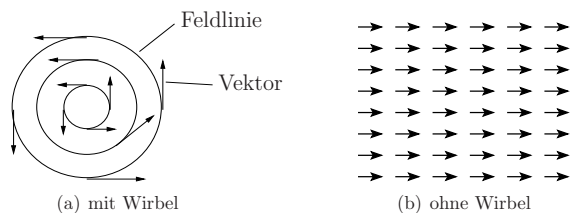


Abbildung A.14: Vektorfeld

Eine andere mögliche Definition ist über das Volumen ΔV möglich:

$$\text{rot } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} d\vec{f} \times \vec{B} \quad (\text{A.6-54})$$

Jedoch geht bei dieser Darstellung der unmittelbare Zusammenhang zum Integralsatz von Stokes (siehe später) verloren.

Definition der Rotation über differentielle Größen:

$$\int_{\partial \Delta F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \Delta \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (\text{A.6-55})$$

$$\Delta \vec{F} = \Delta F \vec{n}$$

In kartesischen Koordinaten wird die Rotation wie folgt angewendet:

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z)$$

$$= \vec{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) + \vec{e}_x \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \quad (\text{A.6-56})$$

Es gilt folgender Integralsatz (siehe Kapitel A.8-80):

$$\text{Rotation: } \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad (\text{A.6-57})$$

Ein Vektorfeld, das keine Wirbel hat, heißt wirbelfrei (unter Umständen Beschränkung auf das Gebiet V):

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \text{ ist wirbelfrei} \quad (\text{A.6-58})$$

Für solche Felder gibt es (wenn z.B. einfach zusammenhängend) die Darstellung über ein Skalar-Potential:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \nabla \phi \quad (\text{A.6-59})$$

Aber:

- Das Potential ist nicht eindeutig, sondern bis auf eine Konstante bestimmt $\phi \rightarrow \phi + C$ (Umeichung möglich)
- Häufig ist der Zusammenhang mit einem negativen Vorzeichen definiert. Dabei handelt es sich um eine Konvention, die aus historischen Gründen entstanden ist. Zum Beispiel ist im Falle eines wirbelfreien elektrischen Feldes folgende Definition üblich:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi \quad (\text{A.6-60})$$

Bezüglich der Konstante C wird typischerweise ein Bezugspunkt gewählt und das Potential kann dann in jedem Punkt angegeben werden:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{\text{Bezug}} - \int_{\vec{r}_{\text{Bezug}}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A.6-61})$$

A.6.5 Divergenz

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, zugeordnet ist ein Skalarfeld $\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$

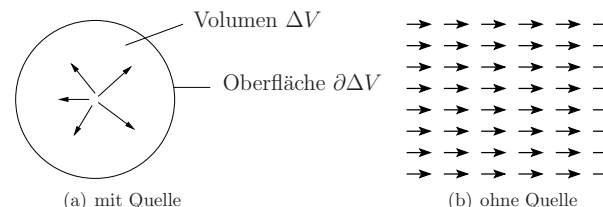


Abbildung A.15: Vektorfeld

Die Divergenz beschreibt die Existenz von Quellen in einem Vektorfeld. Ein Vektorfeld besitzt keine Quellen, wenn in einem abgeschlossenen Volumen ΔV genauso viele Feldlinien austreten, wie eintreten. Ist also die Anzahl der eintretenden Feldlinien in einem abgeschlossenen Volumen ungleich der Anzahl der austretenden Feldlinien, so befindet sich in dem betrachteten Volumen eine Quelle. Die Divergenz ist durch folgende Definitionsgleichung bestimmt:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} \vec{A} \cdot d\vec{f} \equiv \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{A.6-62})$$

Differentiell:

$$\int_{\partial \Delta V} \vec{A} \cdot d\vec{f} \equiv \nabla \cdot \vec{A} \Delta V \quad (\text{A.6-63})$$

In kartesischen Koordinaten wird die Divergenz wie folgt angewendet:

$$\text{div } \vec{B} \equiv \nabla \cdot \vec{B} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \quad (\text{A.6-64})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \quad (\text{A.6-65})$$

Es gilt folgender Integralsatz nach Gauß(siehe Kapitel A.8-82):

$$\text{Divergenz: } \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV \tag{A.6-66}$$

Ein Vektorfeld, das keine Quellen hat, heißt quellenfrei (unter Umständen Beschränkung auf das Gebiet V):

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \text{ ist quellenfrei} \tag{A.6-67}$$

Für solche Felder gibt es im Allgemeinen (wenn z.B. einfach zusammenhängend) die Darstellung über ein Vektor-Potential:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \nabla \times \vec{\psi} \tag{A.6-68}$$

Aber:

- Das Vektor-Potential ist nicht eindeutig, sondern bis auf einen Gradienten bestimmt $\vec{\psi} \rightarrow \vec{\psi} + \nabla\phi$ (Umeichung möglich)

Zum Beispiel ist das \vec{B} -Feld immer quellenfrei und deshalb durch ein Vektorpotential darstellbar:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{A.6-69}$$

A.7 Exakte Sequenz, Vergleich der Dimensionen, Reihenfolge der Operatoren

Die in Kapitel A.4 besprochenen Objekte leben in verschiedenen Dimensionen. Entsprechend erfolgt nun eine Sortierung nach diesen Dimensionen:

0	1	2	3
Punkte	Linien	Flächen	Körper
Skalar	Vektor	Vektor	Skalar

Das Pascal'sche Dreieck (Tabelle 2) dient an dieser Stelle zur Veranschaulichung der Zusammenhänge. Zwischen den Dimensionen sind Differentialoperatoren und Integraloperatoren definiert (\leftrightarrow). Da elektromagnetische Felder im 3-Dimensionalen betrachtet werden, wird hier nur auf die Differentialoperatoren im 3-Dimensionalen eingegangen.

Die Differentialoperatoren im 3-Dimensionalen sind:

- Gradient (siehe Kapitel A.6.3): Skalarfeld \rightarrow Vektorfeld, 1 \rightarrow 3
- Rotation (siehe Kapitel A.6.4): Vektorfeld \rightarrow Vektorfeld, 3 \rightarrow 3
- Divergenz (siehe Kapitel A.6.5): Vektorfeld \rightarrow Skalarfeld, 3 \rightarrow 1

Integralsätze beschreiben die Funktion der Differentialoperatoren. Auf diese Integralsätze wird in Kapitel A.8 genauer eingegangen:

	1				0D
	$\frac{\partial}{\partial x}$				
	1	\leftrightarrow	1		\leftarrow gewöhnliche Differential- und Integralrechnung, 1D
	∇		$\nabla \cdot$		
	1	\leftrightarrow	2	\leftrightarrow	1
					\leftarrow 2D
	∇		$\nabla \times$		$\nabla \cdot$
1	\leftrightarrow	3	\leftrightarrow	3	\leftrightarrow
					1
					\leftarrow unser physikalischer Raum, 3D

Tabelle 2: Pascal'sches Dreieck

- Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (siehe A.6-44 oder A.8-76 HS)
- Satz von Stokes (siehe Gleichung A.8-80)
- Satz von Gauß (siehe Gleichung A.8-82)

Nach erneuter Betrachtung der Zusammenhänge der Differentialoperatoren im 3-Dimensionalen mit den Objekten im Raum ergibt sich der Zusammenhang in Abbildung A.16. Diese Graphik entspricht der untersten Zeile des Pascal'schen Dreiecks in Tabelle 2 und ist um die Zusammenhänge zu den Differentialoperatoren, zu den Integralsätzen und zu den Raumobjekten erweitert. Zusätzlich kann eine weitere wichtige Eigenschaft festgehalten werden.

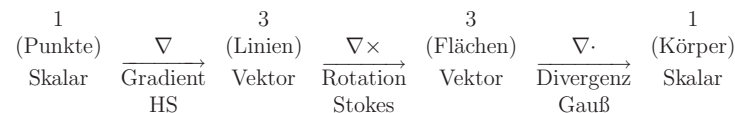


Abbildung A.16: Zusammenhang Differentialoperatoren und Objekte im Raum

Wendet man 2 Differentialoperatoren welche in Abbildung A.16 direkt nacheinander folgen auf einen Skalar oder Vektor an, so wird das Ergebnis einiger dieser Kombinationen zu Null. Im speziellen sind das die beiden folgenden Sequenzen, die sich damit immer zu Null ergeben:

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad \text{für alle Felder } \phi \tag{A.7-70}$$

$$\text{div rot } \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \text{für alle Felder } \vec{A} \tag{A.7-71}$$

Die Tatsache, daß die 3 Differentialoperatoren diese Eigenschaft besitzen heißt: 'sie bilden eine exakte Sequenz'.

Zum besseren Verständnis sollen nun die 2 vorher beschriebenen Eigenschaften graphisch erläutert werden.

Warum ist $\nabla \times \nabla \phi = 0$?

Durch einfaches Ausrechnen erhält man:

$$\nabla \times \nabla \phi = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\vec{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.7-72})$$

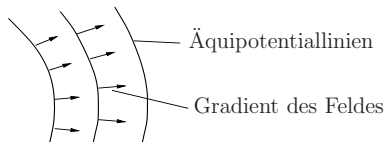


Abbildung A.17: Gradientenfeld eines skalaren Feldes, gekennzeichnet durch Äquipotentiallinien

In Abb. A.17 ist zu erkennen, daß das Gradientenfeld eines skalaren Feldes keine Wirbel besitzt und somit die Rotation Null sein muß.

Warum ist $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$?

Durch einfaches Ausrechnen erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[\vec{e}_x \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7-73})$$

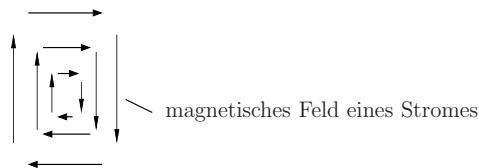


Abbildung A.18: Magnetfeldlinien eines lokalisierten Stromes

Betrachtet man Abb. A.18, so erkennt man auch hier, daß in dem gezeigten Wirbelfeld keine Quelle vorhanden ist und damit ist die Rotation quellenfrei.

Weitere sinnvolle Kombinationen von Differentialoperatoren sind:

- grad div (selten)
- rot rot (häufig → Vektoralgebra-Formel)
- div grad = ∇^2 (Laplace-Operator)

Die Anwendung der Kombination $\text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \text{Laplace-Operator}$ ist besonders interessant. Dieser Operator bildet ein Skalarfeld wiederum auf einem Skalarfeld ab. In kartesischen Koordinaten ergibt sich der Laplace-Operator zu:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \end{aligned} \quad (\text{A.7-74})$$

Manchmal wird der Laplace-Operator auch mit $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ beschrieben. Diese Schreibweise soll hier aber nicht verwendet werden, um eine Verwechslung zum Beispiel mit $\Delta x = x_1 - x_2$ zu vermeiden.

A.8 Integralsätze

A.8.1 Einführendes Beispiel

Im Reellen (in der Theorie der reellen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) gibt es die Integration als die Umkehrung der Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &: \text{bildet Funktion auf Funktion ab} \\ \int &: \text{bildet Funktion auf Funktion ab} \end{aligned}$$

Die Stammfunktion einer gegebenen Funktion ist z.B. definiert über:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x') dx' = f(x)$$

Weiterhin gibt es als Integralsatz den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a) \quad (\text{A.8-75})$$

Im Folgenden wird nun genauer auf die Integralsätze eingegangen, welche die Differentialoperatoren $\nabla, \nabla \times, \nabla \cdot$ in ihren Eigenschaften ausnutzen.

A.8.2 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (HS)

Dabei handelt es sich um den Integralsatz bezüglich des Gradienten:

$$\int_{c(\vec{a})}^{c(\vec{b})} (\nabla \phi) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \quad (\text{A.8-76})$$

Die Punkte \vec{a} und \vec{b} sind der Anfangs- und Endpunkt der Linie c (siehe auch Abbildung A.19).

Beweis des Hauptsatzes

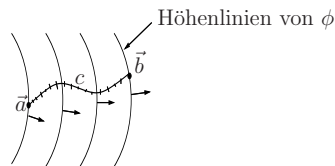


Abbildung A.19: Höhenlinien eines Potentials

Bei konkreter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich :

$$\int_{c(\vec{r}_0)}^{c(\vec{r}_1)} \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{Wegelemente}} \int_{\Delta s} \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{Wegelemente}} \Delta \phi = \sum_{\text{Wegelemente}} \phi(\vec{r}_k + \Delta \vec{s}) = \sum_{k=AP,EP} \phi(\vec{r}_k) = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_0) \tag{A.8-77}$$

Zusammenfassend erhält man:

$$\int_{c(\vec{r}_0)}^{c(\vec{r}_1)} \nabla \phi \cdot d\vec{r} = [\phi]_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_0) \tag{A.8-78}$$

Das Ergebnis dieses Integrals ist damit eine Funktion, die nur von den Randpunkten abhängig ist.

Aus Gleichung A.8-77 erkennt man, daß das Gradientenintegral wegunabhängig ist. Umgekehrt gilt aber auch, wenn ein Integral über ein Vektorfeld vom Weg unabhängig ist, dann ist das Vektorfeld ein Gradientenfeld, d.h. es ist wirbelfrei:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\text{Weg}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \text{wegunabhängig} \\ \oint_{\text{Weg}} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi \tag{A.8-79}$$

A.8.3 Satz von Stokes

Dabei handelt es sich um den Integralsatz bezüglich der Rotation eines Vektorfeldes:

$$\int_F (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{A.8-80}$$

Beweis des Satzes von Stokes

Bei konkreter Anwendung des Satzes von Stokes ergibt sich durch die Bildung der Summe aller Umlaufintegrale über die Teilflächen (siehe Abbildung A.20) ein Umlaufintegral über

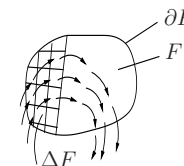


Abbildung A.20: Einteilung einer Fläche in kleine Flächenelemente Delta F

die Gesamtfläche (siehe Definition der Rotation in Kapitel A.6.4):

$$\begin{aligned} \int_F \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \sum_{\text{Flächenelemente}} \int_{\Delta F} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{f} \\ &= \sum_{\text{Außenstrecken}} \int_{\partial \Delta F} \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} \end{aligned} \tag{A.8-81}$$

A.8.4 Satz von Gauß

Dabei handelt es sich um den Integralsatz bezüglich der Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f} \tag{A.8-82}$$

Veranschaulichung des Satzes von Gauß

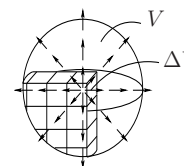


Abbildung A.21: Einteilung des Volumens in kleine Volumenelemente Delta V

Bei konkreter Anwendung des Satzes von Gauß ergibt sich durch die Bildung der Summe aller Oberflächenintegrale aller Teilvolumina (siehe Abbildung A.21) ein Oberflächenintegral über das Gesamtvolumen:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV &= \sum_{\text{Volumenelemente}} \int_{\Delta V} \nabla \cdot \vec{B} dV \\ &= \sum_{\text{Oberflächenanteile}} \int_{\partial \Delta V} \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \tag{A.8-83}$$

Aus diesen Integralsätzen ergeben sich weitere wichtige Theoreme, die im Folgenden behandelt werden.

A.8.5 Green'sche Theoreme

Die Green'schen Theoreme sind zusammengesetzte Integralsätze.

1. Green'sches Theorem:

Ausgehend vom Satz von Gauß

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f}$$

wird $\vec{A} = \phi \nabla \psi$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV &= \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot d\vec{f} \\ \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi dV &= \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot d\vec{f} \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Produktregel erhält man als Ergebnis das 1. Green'sche Theorem:

$$\int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi dV = \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot d\vec{f} \tag{A.8-84}$$

2. Green'sches Theorem:

Ausgehend vom Satz von Gauß wird nun

$$\vec{A} = \phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \phi$$

eingesetzt und man erhält das 2. Green'sche Theorem:

$$\begin{aligned} \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \Psi \nabla^2 \phi) dV &= \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{f} \\ &= \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} df \\ &= \int_{\partial V} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) df \end{aligned} \tag{A.8-85}$$

Mit dem Ergebnis des 1. Green'sche Theorems erhält man also das 2. Green'sche Theorem. Der Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial n}$ ist dabei die Ableitung in Normalenrichtung. Wenn zusätzlich das Oberflächenintegral verschwindet gilt:

$$\int_V \phi (\nabla^2 \psi) dV = \int_V (\nabla^2 \phi) \psi dV \tag{A.8-86}$$

Dieser Zusammenhang führt auf die Theorie der selbstadjungierten oder hermiteschen Differentialoperatoren, worauf hier nicht weiter eingegangen wird.

A.9 Delta-Funktion

Betrachtet man zum Beispiel in der Himmelsmechanik Körper, die um eine zentrale Sonne kreisen, so werden diese betrachteten Körper oft als Punktkörper aufgefaßt. Da der Radius der Körper um Größenordnungen kleiner ist, als der Abstand der Körper zueinander, ist diese Überlegung gerechtfertigt.

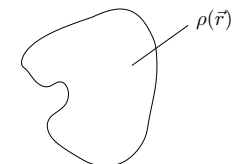


Abbildung A.22: beliebiger Körper

Allgemein ist von einem endlich großen Körper (siehe Abbildung A.22) mit einer spezifischen Massendichte ρ_m bekannt, daß die Gesamtmasse m wie folgt berechnet werden kann:

$$m = \int_V \rho_m dV' \quad [\rho_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{A.9-87}$$

Diese Definition der Gesamtmasse soll nun auch für punktförmige Objekte gelten. Da man aber weiß, daß das Integral über eine Funktion die bis auf in einem einzigen Punkt überall null ist, als Wert eine Null liefert (dieser eine Ort muß dabei im Endlichen liegen!), muß eine geeignete Darstellung für Punktoobjekte hergeleitet werden, damit Gleichungen wie A.9-87 einen endlichen Wert liefern.

Genauso verhält es sich mit den in der Feldtheorie betrachteten Punktoobjekten. Zum Beispiel bei der Betrachtung von Elektronen oder Ionen macht es auch Sinn von Punktladungen zu sprechen, denn diese Objekte sind im Vergleich zu den von uns betrachteten Objekten (zum Beispiel Kondensator) sehr klein. Identisch zur Berechnung der Gesamtmasse in A.9-87 soll später die Gesamtladung eines punktförmig gedachten Elektrons mit

$$e = \int_V \rho_e dV' \quad [\rho_e] = \frac{\text{As}}{\text{m}^3}$$

möglich sein.

Diese physikalisch logische Einsicht, oder dieses physikalische Konzept, daß Objekte auf einer Skala konzentriert sein können, die "genügend klein" ist gegenüber allen anderen betrachteten Skalen leuchtet argumentativ und aus praktischen Gründen sofort ein.

Trotzdem macht es Sinn, über ein mathematisches Konzept nachzudenken, welches die Argumente von vorher in mathematisch korrekte Definitionen und Beschreibungen überführt. Danach kann man nämlich auf eine Beweiskette zurückgreifen und mathematisch argumentieren und nicht nur intuitiv.

A.9.1 Das mathematische Konzept der δ -Distribution

Zur Erläuterung, was nun eine Distribution ist, sollte aus mathematischer Sicht zuerst eine klare Trennung der Begriffe Funktion und Funktional vorgenommen werden. Dazu wird auf jeden dieser Begriffe ausreichend eingegangen, so daß ähnliche Eigenschaften und Unterschiede klar werden:

- Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Jedem Argument – eine Zahl aus dem zulässigen Definitionsbereich – ist eindeutig, genau eine Zahl zugeordnet:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

Beispiele sind natürlich alle bekannten Funktionen wie e^x , $\sin x$, x^2 , usw. Spezielle Funktionen sind zum Beispiel die linearen Funktionen. Für diese gilt allgemein:

$$f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$$

Dabei ist bekannt, daß es für alle linearen Funktionen eine Konstante c gibt, so daß gilt:

$$f(x) = cx$$

Man kann zeigen, daß $f(x)$ die von der Konstanten c erzeugte lineare Funktion ist.

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x = cx$$

Betrachtet man Funktionen, welche von mehreren Argumenten abhängen, so läßt sich ein ähnlicher Zusammenhang wie folgt darstellen.

- Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Jedem Argument, ein n -Tupel $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ aus dem zulässigen Definitionsbereich, ist eindeutig, genau eine Zahl zugeordnet:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

Spezielle Funktionen sind wiederum die linearen Funktionen. Für diese gilt allgemein:

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

Dabei ist bekannt, daß es für alle linearen Funktionen einen konstanten Vektor \vec{c} gibt, so daß gilt:

$$f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} = \sum_i c_i x_i$$

Man kann zeigen, daß $f(\vec{x})$ die von dem konstanten Vektor \vec{c} erzeugte lineare Funktion ist:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, 0, \dots, 1)) \\ &= x_1 f(1, 0, \dots, 0) + x_2 f(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n f(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n \\ &= \sum_i c_i x_i \end{aligned}$$

- Funktional

Jedem Argument, eine Funktion φ aus dem zulässigen Definitionsbereich, ist genau eine Zahl zugeordnet:

$$I : C(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto I(\varphi)$$

Beispiele hierfür sind:

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \int \varphi \, dx \\ I(\varphi) &= \sqrt{\int \varphi^2 \, dx} \\ I(\varphi) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Spezielle Funktionale sind die linearen Funktionale. Sie werden Distributionen genannt und es gilt allgemein:

$$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$$

Dabei sind φ und ψ Testfunktionen und α und β Skalare.

Es ist bekannt, daß viele dieser Distributionen durch eine Funktion (Gewichtsfunktion) g definiert werden können:

$$I(\varphi) = \int g(x) \varphi(x) \, dx$$

Diese nennt man durch die Funktion $g(x)$ erzeugte Distribution.

Es gibt allerdings auch lineare Funktionale oder Distributionen, die nicht durch eine Funktion erzeugt werden können, zum Beispiel:

$$I(\varphi) = \varphi(0)$$

Für diese Art der Distributionen wird die folgende Schreibweise vereinbart:

$$I(\varphi) = \int \delta(x) \varphi(x) \, dx \tag{A.9-88}$$

Hier wird zum ersten Mal die δ -Funktion als solche verwendet. Die Schreibweise der Definition ist identisch zu der Menge von Distributionen, die durch eine Funktion erzeugt werden können. Man darf allerdings hier dem Symbol δ keinen eigenständigen Funktionscharakter zuordnen, sondern man muß dieses Symbol im Zusammenhang mit dem linearen Funktional sehen.

Die Distributionen-Theorie liefert eine konkrete und mathematisch exakte Beschreibung für die δ -Distribution. Mit der speziellen Definition

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) \, dx \tag{A.9-89}$$

wird der Testfunktion φ ein Zahlenwert zugeordnet. Der in dieser Definition verwendete Ausdruck $\delta(x)$ soll dabei so gebaut sein, daß er die gewünschte Eigenschaft, nur an einem Punkt einen Wert zu besitzen und dem Integral einen endlichen Wert zuzuordnen, erfüllt.

Dieser spezielle Fall liefert dann als Ergebnis des Integrals einen ausgewählten Wert der Testfunktion φ und zwar genau in dem Punkt in dem die δ -Distribution den Wert ungleich null besitzt (hier bei $x = 0$):

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \tag{A.9-90}$$

A.9.2 Darstellung der δ -Distribution im 1-Dimensionalen

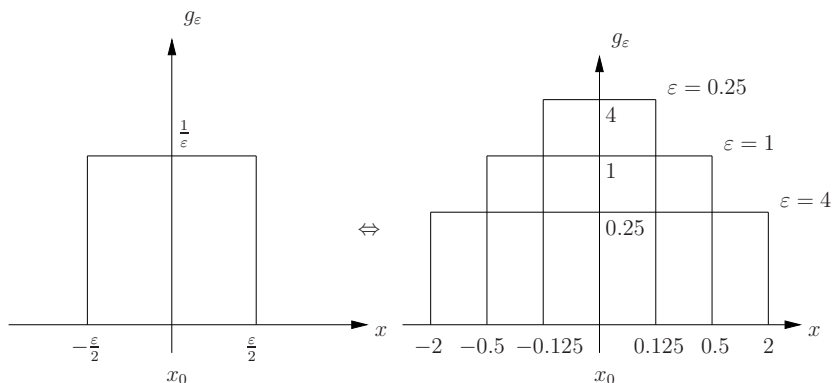


Abbildung A.23: Schar von Funktionen zur Veranschaulichung der Delta-Funktion

Man kann sich leicht überlegen, daß es keine Funktion $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \delta(x)$ gibt, die die δ -Distribution A.9-90 erzeugt. Man kann aber Funktionen $g_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g_\epsilon(x)$ finden, so daß

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \tag{A.9-91}$$

gilt, indem man beliebig genau approximiert.

Betrachtet man zum Beispiel anstelle des Funktionals in A.9-90 zunächst das folgende lineare Funktional

$$I_\epsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) \varphi(x) dx \tag{A.9-92}$$

und betrachtet als spezielle Funktion $g_\epsilon(x)$ (siehe Abbildung A.23)

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |x - x_0| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-93}$$

so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x - x_0) dx = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} dx = 1 \tag{A.9-94}$$

Die Funktion $g_\epsilon(x)$ hat die Eigenschaft, daß A.9-94 für beliebige ϵ gilt, auch für den Fall, daß der Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ betrachtet wird.

Betrachtet man nun die Zuordnung von Testfunktion φ zu ihren Zahlenwerten mit der Vorschrift g_ϵ , so erhält man:

$$I_\epsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x - x_0) \varphi(x) dx = \int_{x_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} \varphi(x) dx \tag{A.9-95}$$

Bildet man dann den Grenzwert, so ergibt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$I(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\epsilon}{2}} \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \tag{A.9-96}$$

Im Grenzfall stellt also die Definition in A.9-96 die Definition der δ -Distribution

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \tag{A.9-97}$$

dar. Da die δ -Distribution aber keine Funktion ist, kann der Limes nicht in das Integral hineingezogen und direkt auf $\delta(x)$ angewendet werden. Eine Auswertung ist immer nur mit Hilfe eines Funktionals möglich.

Abbildung A.24 entnimmt man, daß also der δ -Distribution ein unendlich großer Wert in einem speziellen Punkt zugeordnet ist, in allen anderen Punkten ist dieser Distribution der Wert Null zugeordnet. Die δ -Distribution ist also mit

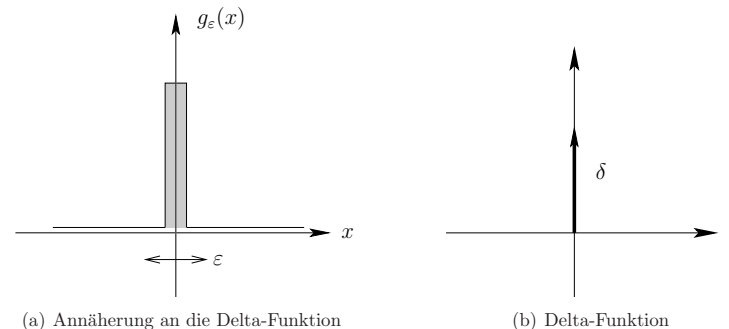


Abbildung A.24: Veranschaulichung der Delta-Funktion

$$\varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx \tag{A.9-98}$$

definiert und liefert für die spezielle Funktion $\varphi(x) = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \tag{A.9-99}$$

Die mathematische Beschreibung, die hier aufgezeigt wurde, ist die Legitimation der physikalischen Argumentation, daß man Punktobjekte definiert, die auf einer genügend kleinen Skala konzentriert sind. Ist man sich der Tatsache bewußt, daß der mathematische Ausdruck $\delta(x - x_0)$ alleine nicht ausgewertet werden kann, sondern erst, wenn ein entsprechendes Integral definiert wird, so ist es auch vertretbar diesen Ausdruck als δ -Funktion zu bezeichnen und sich die Funktion wie in Abbildung A.24 vorzustellen.

A.9.3 Interpretation der bisherigen Erkenntnisse

Aus den Erkenntnissen der Kapitel zuvor kann festgehalten werden, daß es also mehrere Einsichten bezüglich der δ -Distribution/-Funktion gibt. Der Umgang damit kann also in die folgenden Kategorien aufgeteilt werden.

- Pragmatische Verwendung der δ -Funktion:

- der Ausdruck $\delta(x - x_0)$ ist ein Symbol für eine Funktion, \Rightarrow einfach rechnen
- daran denken, daß die δ -Funktion erst durch ein Integral ausgewertet werden kann (Ausblendeigenschaft)

- Physikalische Verwendung der δ -Funktion:

- anstelle von $\delta(x - x_0)$ überall $g_\varepsilon(x - x_0)$ denken und ganz am Schluß den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen

- Mathematische Verwendung der δ -Distribution:

- überall $\int \dots d^3r$ dazudenken, auch wenn es nur im Endergebnis explizit geschrieben wird

Zusammenfassend kann noch einmal festgehalten werden. Obwohl die mathematisch korrekte Bezeichnung der in den Kapiteln A.9.1 und A.9.2 hergeleiteten "Mathematik" mit dem Begriff δ -Distribution beschrieben werden sollte, wird in den folgenden Kapiteln nun trotzdem von der δ -Funktion gesprochen. Dabei wird aber festgehalten, daß es sich um strengen mathematischen Sinne um keine richtige Funktion handelt. In Bezug auf elektromagnetische Felder oder physikalisch existente Körper kann man diese Ausnahme gut begründen.

Die Funktion $g_\varepsilon(x - x_0)$ wird im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ nun als Delta-Funktion $\delta(x - x_0)$ bezeichnet. Die δ -Funktion in Abbildung A.24(b) ist somit der Grenzwert der Abbildung A.24(a) mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \tag{A.9-100}$$

A.9.4 Die $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen

Bisher konnte das einführende Beispiel der Massendichte eines Punktkörpers noch nicht dargestellt werden, da die δ -Funktion nur im 1-Dimensionalen betrachtet wurde.

Für die Massendichte von Punktobjekten, einem Körper in einem 3-Dimensionalen Raum, bietet nun die $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen eine Darstellungsmöglichkeit. Auch dieses Objekt besitzt nur in einem einzigen Punkt $\vec{r}' = \vec{r}'_m$ einen Wert und ist formal zunächst wie folgt definiert:

$$\rho(\vec{r}') = m\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_m) \tag{A.9-101}$$

Setzt man dies in Gleichung A.9-87 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} m &= \int_V \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \int_V m\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_m) dV' \end{aligned} \tag{A.9-102}$$

Die hochgestellte ⁽³⁾ soll darauf hinweisen, daß die δ -Funktion im 3-Dimensionalen definiert und gemeint ist.

Mit Hilfe dieser Darstellung können nun Punktobjekte dargestellt werden. Die allgemeine Definition der $\delta^{(3)}$ -Funktion lautet wie folgt:

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_m) dV' = \begin{cases} 1 & \text{wenn der Punkt } \vec{r}'_m \text{ im Gebiet von } V \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-103}$$

A.9.5 Eigenschaften der $\delta^{(3)}$ -Funktion

Im Folgenden sind einige der wichtigsten Eigenschaften der $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen aufgeführt:

- Die Ausblendeigenschaft: Im mathematischen Sinne bedeutet das lediglich, daß das zugehörige Funktional ausgewertet werden muß:

$$\int_V \phi(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_0) d^3r' = \begin{cases} \phi(\vec{r}'_0) & \text{wenn } \vec{r}'_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-104}$$

- Man kann die $\delta^{(3)}$ - Funktion mit anderen Funktionen multiplizieren, addieren, differenzieren, integrieren, z.B.:

$$q_1\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_1) + 2q_2\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'_2) \tag{A.9-105}$$

- Die $\delta^{(3)}$ - Funktion hat die Dimension $\frac{1}{m^3}$ und hat den Bedarf an Vektoren mit der Dimension m (Längeneinheit, hier Meter).

- Die $\delta^{(3)}$ -Funktion kann in ihre kartesischen Komponenten zerlegt werden:

$$\delta^{(3)}(\vec{r}') = \frac{1}{L^3} \delta\left(\frac{x}{L}\right) \delta\left(\frac{y}{L}\right) \delta\left(\frac{z}{L}\right) \tag{A.9-106}$$

wobei hier L die Längeneinheit, z.B. Meter und $\delta(x)$ die δ -Funktion im 1-Dimensionalen darstellen soll. An dieser Stelle sieht man den Zusammenhang, daß die $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen ein Argument mit der Einheit Länge, aber im 1-Dimensionalen ein einheitenloses Argument erwartet.

- Äquivalenztheorem der δ -Funktion:

$$\delta(f(x)) \equiv \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \text{ mit } f'(x_i) \neq 0 \text{ und } x_i \text{ einfache Nullstelle von } f(x) \tag{A.9-107}$$

Mit dem Zusammenhang A.9-106 kann diese Eigenschaft auch auf die $\delta^{(3)}$ -Funktion übertragen werden.

A.9.6 Gradient der $\delta^{(3)}$ -Funktion

Der Gradient der $\delta^{(3)}$ -Funktion

$$\nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \int_V \phi(\vec{r}) [\nabla \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)] d^3r &= \int_V \underbrace{\nabla [\phi(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)]}_{\text{verschwindet}} d^3r - \int_V [\nabla \phi] \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r \\ &= - \nabla \phi|_{r=r_0} \end{aligned}$$

Der Gradient der $\delta^{(3)}$ -Funktion kann wie die $\delta^{(3)}$ -Funktion selbst nur dann ausgewertet werden, wenn über diesen integriert wird (Funktional) und dabei die Produktregel korrekt angewendet wird.

A.9.7 Darstellung der $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen

Wie in der 1-Dimensionalen Darstellung kann die $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen mit Hilfe einer speziellen Funktion in Kugelkoordinaten dargestellt werden:

$$\delta_R^{(3)}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} & \text{für } |\vec{r}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-108}$$

Betrachtet man dann den Grenzwert $R \rightarrow 0$ bezüglich des zugehörigen Funktionals, so erhält man als Ergebnis eine Definition der $\delta^{(3)}$ -Funktion im 3-Dimensionalen:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int \delta_R^{(3)}(\vec{r}) f(\vec{r}) d^3r = f(0) \tag{A.9-109}$$

Wie sich aber später herausstellen wird, ist bezüglich der elektrischen und magnetischen Felder folgende Darstellung deutlich eleganter:

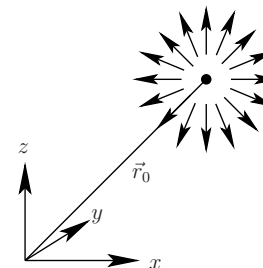


Abbildung A.25: Skizze zur Darstellung der δ -Funktion

Behauptung: Der Ausdruck (siehe auch Abbildung A.25)

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) \tag{A.9-110}$$

hat die gleichen Eigenschaften wie die $\delta^{(3)}$ -Funktion, es handelt sich dabei um keine "normale Funktion", sondern um eine singuläre Funktion.

Zu zeigen:

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) d^3r = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{r}_0 \text{ in } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-111}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird für die folgenden Berechnungen das Kugelkoordinatensystem mit dem Ursprung in \vec{r}_0 gewählt, oder anders gesagt, wähle $\vec{r}_0 \equiv \vec{0}$, dadurch kann der folgende Term vereinfacht dargestellt werden:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \rightarrow \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{r \cdot \vec{e}_r}{r^3} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

In Kugelkoordinaten gilt für die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes \vec{E}

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} E_\vartheta \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} E_\varphi \right) \tag{A.9-112}$$

Mit dem Volumenelement

$$d^3r = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi r^2 dr$$

erhält man daher

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \rightarrow 0 \tag{A.9-113}$$

Aber Fehler! Die Singularität der Kugelkoordinaten wurde nicht beachtet! Da der Definitionsbereich der Variablen r mit $r \in [0, \infty)$ gegeben ist, existiert bezüglich der Ableitung im Punkt $r = 0$ kein linksseitiger Grenzwert und die Ableitung in diesem Punkt

kann so nicht durchgeführt werden. Deshalb soll die Lösung dieses Problems nun über Integralsätze erfolgen. Das heißt, gesucht ist die Lösung des Integrals:

$$I = \int_V \nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d^3r \tag{A.9-114}$$

Die Idee ist es nun, das Volumen V zu unterteilen. Eine Kugel K_R um $\vec{r}_0 \equiv \vec{0}$ mit dem Radius R und das sogenannte 'restliche Raumgebiet' ist eine geeignete Unterteilung (Abbildung A.26 soll dies verdeutlichen).

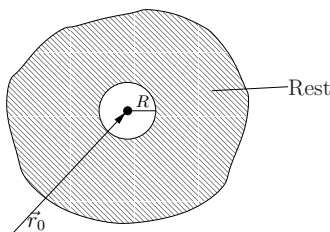


Abbildung A.26: Aufteilung des Raumbereiches einer kugelsymmetrischen Anordnung

Das Integral über den 'Rest' verschwindet ($=0$), wenn $\vec{r}_0 = \vec{0}$ nicht im Volumen V ist. Deshalb ergibt sich:

$$I = \int_{\text{Kugel } K_R} \nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d^3r \tag{A.9-115}$$

Mit dem Satz von Gauß wird aus dem Volumenintegral ein Oberflächenintegral:

$$I = \int_{\partial \text{Kugel } K_R} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} d^2\vec{f} \tag{A.9-116}$$

Für die weiteren Berechnungen ergibt sich mit den Zusammenhängen

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= R \\ d\vec{f} &= \vec{n} df \\ \vec{r} \cdot \vec{n} &= R \end{aligned}$$

das Integral:

$$\Rightarrow I = \int_{\partial \text{Kugel } K_R} \frac{1}{4\pi} \frac{R}{R^3} d^2f = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial \text{Kugel } K_R} d^2f = 1 \tag{A.9-117}$$

Daher gilt:

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right) d^3r = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{r}_0 \text{ in } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-118}$$

Analog gilt mit der Definition der $\delta^{(3)}$ -Funktion:

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{r}_0 \text{ in } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{A.9-119}$$

Aussage: Die zwei Distributionen sind gleich

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{A.9-120}$$

Der formale Zusammenhang dieser Darstellung der δ -Funktion mit dem Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{A.9-121}$$

ist der Beginn der folgenden Kapitel.

A.10 Lernziele Kapitel A

1. Wissen, wie der physikalische Raum definiert ist \rightarrow Eigenschaften
2. Vektoralgebra anwenden können
3. Über Komponentenerlegung und Basistransformationen Bescheid wissen
4. Wissen, wie kartesische, Zylinder- und Kugel-Koordinaten definiert sind. Wie lauten die Ortsvektoren und Einheitsvektoren. Was bedeutet Koordinatenabhängigkeit für die einzelnen Koordinatensysteme?
5. Wissen, wie Punkte, Linien, Flächen, Körper und Felder im Raum definiert sind. Für einfache Beispiele mathematische Beschreibungen finden können
6. Wissen, was ein totales Differential ist und wie man damit Linienelemente, Flächenelemente usw. berechnen kann
7. Mit Differentialoperatoren umgehen können
8. Wissen, wie der Nabla-Operator definiert ist
9. Wissen was Gradient, Divergenz und Rotation bedeuten, deren Definition kennen und auf Beispiele anwenden können
10. Die mathematischen Eigenschaften einer exakten Sequenz kennen
11. Wissen, was der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung beinhaltet und wie man ihn anwendet
12. Wissen, was der Satz von Stokes beinhaltet und wie dieser angewendet wird
13. Wissen, was der Satz von Gauß beinhaltet und wie dieser angewendet wird
14. Wissen, was die Green'schen Theoreme beinhalten und wie diese angewendet werden

15. Wissen, wie die Deltafunktion definiert ist, sowohl im 1-Dimensionalen, als auch im 3-Dimensionalen
16. Wissen, wie die "Fähigkeiten" der Deltafunktion wirksam werden
17. Wissen, wie man sich die Deltafunktion vorstellen kann
18. Wissen, was die Ausblendeigenschaft der Deltafunktion bedeutet
19. Wissen, wie man mit der Ableitung der Deltafunktion Berechnungen durchführt und was dies bewirkt
20. Wissen, wie die in der Übung ausgeteilte Formelsammlung zustande kommt

Literaturverzeichnis

- [blu] Siegfried Blume, Theorie elektromagnetischer Felder, Hüthig Verlag, Heidelberg 1994, ISBN: 3778523376, € 32,70
- [str] Gottlieb Strassacker, Rotation, Divergenz und das Drumherum, Teubner Verlag, Stuttgart 1992
- [jac] John David Jackson, Klassische Elektrodynamik, de Gruyter Verlag, Berlin 2002, ISBN: 3110165023, € 68,00
- [leh] Günther Lehner, Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker, Springer Verlag, Berlin 1996, ISBN: 3540603735, € 39,95
- [sim] Karoly Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, Barth-Verlag, 1993, ISBN: 3335003756
- [wol1] Ingo Wolff, Grundlagen und Anwendungen der Maxwell'schen Theorie I. Ein Repetitorium, Springer Verlag, 1996, ISBN: 3540621776
- [wol2] Ingo Wolff, Grundlagen und Anwendungen der Maxwell'schen Theorie II. Ein Repetitorium, Springer Verlag, 1995, ISBN: 3540621792
- [hen] Heino Henke, Elektromagnetische Felder, Springer Verlag, Berlin 2001, ISBN: 354041973X, € 39,95

Abbildungsverzeichnis

1.1	Flußdiagramm zur Vorgehensweise	10
2.1	Zwei Punktladungen im Raum	12
2.2	Zusammenhang Kraft und Elektrisches Feld	13
2.3	Punktladung und elektrisches Feld am Beobachtungspunkt	14
2.4	Punktladungswolke	17
2.5	Linienladungsdichte	18
2.6	Ladungsdichte einer Fläche	19
2.7	Ladungsverteilung im Endlichen lokalisiert	24
2.8	elektrisches Feld	24
2.9	geschlossene Kurve im elektrostatischen Feld	25
2.10	Nachrichtentechnisches Übertragungssystem	27
2.11	Darstellung einer Linienladung	28
2.12	Linienladung	30
2.13	Potential einer endlich geladenen Linie	31

2.14	Flächenladungsdichte	38
2.15	unendlich ausgedehnte Flächenladung	40
2.16	Darstellungen zur unendlich ausgedehnten Fläche	40
2.17	Darstellung eines Wasser-Moleküls	42
2.18	Zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ mit endlichem Abstand	43
2.19	Darstellungen zur Vorstellung eines Punktdipols	45
2.20	Veranschaulichung Dipol im Ort \vec{r}_D	46
2.21	Potential und elektrisches Feld des Dipols	47
2.22	Potential und elektrisches Feld des Dipols	48
2.23	Ladung q im elektrischen Feld	48
2.24	endlicher Dipol im elektrischen Feld	49
2.25	2 Ladungen $+Q$ und $-Q$ im elektrischen Feld	51
2.26	Drehmoment bezüglich des Ursprungs	51
2.27	Dipol im Feld	52
2.28	Darstellung zur virtuellen Drehung	53
2.29	Punktladung im Ort \vec{r}_Q und zugehörige Raumladungsdichte	56
2.30	Dipol im Ort \vec{r}_D	56
2.31	linienverteilte Dipole einer unendlich langen Linie	57
2.32	linienverteilte Dipole auf einer endlichen Linie	58
2.33	Darstellung von Dipolen in nicht-leitenden Materialien	59
2.34	polarisierte Körper	60
2.35	Zur Randbedingung für die magnetische Feldstärke	62
2.36	Grenzfläche zweier Medien	62
2.37	Ableitung der Randbedingungen für \vec{D}	63
2.38	Zusammenhänge an der Grenzfläche zweier Medien	64
2.39	polarisierbares Medium	65
2.40	Grenzfläche zweier Medien	65
2.41	Zur Entstehung der Polarisationsoberflächenladungsdichte ($\rho_p < 0$)	67
2.42	Sprungbedingung des elektrischen Feldes	67
2.43	polarisiertes Medium	68
2.44	Zusammenhang Elektrisches Feld und Polarisierung für ein Medium	69

2.45	Positionsänderung einer Punktladung im Feld	74
2.46	Dipol im Feld	75
2.47	2 Dipole im Raum	76
3.1	Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern	79
3.2	Vektorzusammenhänge bezüglich Magnetfeld	81
3.3	Stromschleife im Raum	82
3.4	Veranschaulichung zur Definition der Stromdichte	84
3.5	Oberflächenstromdichte	85
3.6	Stromschleife im Raum	85
3.7	Strom fließt durch ein Volumen	86
3.8	Stromverteilung im Raum	90
3.9	Stromfaden entlang der z-Achse	93
3.10	magnetischer Elementardipol	94
3.11	Magnetfeld einer endlichen Stromschleife \vec{r}_L	95
3.12	magnetischer Elementardipol	95
3.13	Veranschaulichung des magnetischen Elementardipols	98
3.14	magnetischer Dipol im Raum	100
3.15	Zum magnetischen Dipolmoment einer ebenen Stromschleife	103
3.16	Zusammenhang der Vektoren	103
3.17	endliche Stromschleife im Feld	104
3.18	Dipol im Feld	106
3.19	Drehmoment auf Dipol	107
3.20	Elektromagneten	107
3.21	beliebiger Körper mit magnetischen Elementardipolen	108
3.22	Spule und zugehöriges Magnetfeld	109
3.23	Magnetisierbares Material	109
3.24	Transformator	110
3.25	Skizze zur Übergangsbedingung der Tangentialkomponente	111
4.1	elektrischer Dipol mit Dipolmoment \vec{p}	118
4.2	magnetischer Dipol mit Dipolmoment \vec{m}	120
4.3	Maschine auf der Basis elektrischer Phänomene	121

5.1	geladene Kugel mit Radius R	122
5.2	Punktladung $+Q$ vor einer geerdeten metallischen Wand	125
5.3	Prinzip der Spiegelladung	126
5.4	Potential und Feld einer Ladung Q vor einer metallischen Wand	127
5.5	Elektron in metallischer Röhre	128
5.6	Spiegelung an der Kugel	129
5.7	Volumen mit Oberfläche	132
5.8	Minimum der Feldenergie	135
5.9	Potentialproblem im Vakuum, raumladungsfrei	138
5.10	Potentialproblem im Vakuum, raumladungsfrei	139
5.11	Das elektrische Feld in einer Ecke des Potentialkastens	140
5.12	Koordinatentransformation	141
5.13	Elektrostatische Lösung des 2-D Potentialkastens	143
5.14	Gibbs'sches Phänomen	145
5.15	Potentialkasten im 2-Dimensionalen	146
5.16	Diskretisierung eines rechteckförmigen Gebietes	147
5.17	Matrix der Gitterpunkte	147
5.18	Numerisches Gitter	148
5.19	Zuordnung der Gitterpunkte	149
5.20	Interpolation innerhalb einer diskreten Zelle	150
5.21	Randwerte und Startwerte	150
5.22	Matrix der Startwerte	151
5.23	Matrix der Startwerte, grau-codiert	151
5.24	Numerische Lösung	152
5.25	Numerische Lösung	153
5.26	Numerische Lösung	153
5.27	Numerische Lösung	154
5.28	Numerisches Gitter mit vorgegebenen Randwerten	155
5.29	Das Jacobi-Verfahren in der Anwendung	157
5.30	Jacobi-Schritt	158
5.31	P und die betroffenen Nachbarpunkte	160

5.32	Vergleich der Lösung in den Ecken	162
5.33	Gittergleichung und Lösung	163
5.34	Magnetisierte Kugel im Feld	163
5.35	magnetisierbare Kugel	167
6.1	bewegte Ladung im konstanten elektrischen Feld	171
6.2	Wurfparabel für ein negativ geladenes Teilchen	172
6.3	bewegte Ladung im konstanten Magnetfeld	173
6.4	bewegtes Teilchen im konstantem Magnetfeld	174
6.5	Grundprozeß der Kernfusion	174
6.6	Mit freundlicher Genehmigung von ITER .	175
6.7	Leiterschleife im magnetischen Feld	175
6.8	rechteckige Leiterschleife im homogenen Magnetfeld	176
6.9	Ausschnitt aus einem bewegten Leiterstück im Magnetfeld	176
6.10	Leiterschleife im zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$	178
6.11	Plattenkondensator	179
6.12	Strom von Elektronen	180
6.13	Massepunkt m auf der Bahn $\vec{r}(t)$	181
6.14	Punktladung im elektrischen Feld	183
6.15	Veranschaulichung der Richtung des Energiestroms	185
7.1	Feldeffekttransistor	191
7.2	geerdeter Kasten mit geladenen Metallkugeln M_k	192
7.3	Kugelkondensator	193
7.4	Ausschnitt aus dem Kugelkondensator	194
7.5	Feldverlauf des Kugelkondensators	195
7.6	Randbedingungen des Kugelkondensators	196
7.7	Ladungsverteilung beim Kugelkondensator	197
7.8	Kugelkondensator mit effektiver Kondensatorfläche	197
7.9	Körper in einem abgeschlossenen Raum	199
7.10	Kondensator	201
7.11	Beispiel zur Induktivität	201
7.12	Koaxialleiter	204

7.13	Schnitt durch Koaxialleiter	204
7.14	ideale Spule	206
7.15	Einschaltvorgang diskreter Bauelemente	206
7.16	Induktionsschleifen im Raum	207
7.17	Transformator	207
7.18	Koaxialleiter	208
7.19	Schnitt durch Koaxialleiter	210
8.1	Wellenausbreitung	214
8.2	Randbedingungen des idealen Leiters	215
8.3	2-dimensionales quadratisches Strömungsfeld	217
8.4	Potentiallinien und Feldlinien eines Strömungsfeldes	218
8.5	Kristallaufbau eines Halbleiters	219
8.6	Skalenbetrachtung	220
8.7	Transformator	222
8.8	Schnitt durch den Koaxialleiter	225
8.9	Diffusionsprozeß eines Gases	229
8.10	Magnetfeld-Diffusion	229
8.11	Momentaufnahmen der Magnetfeld-Diffusion	230
8.12	Zeitschritte des Skineffektes eines Magnetfeldproblems	230
8.13	Skineffekt einer harmonischen magnetischen Welle	231
8.14	schematischer Skineffekt am Leiter	231
8.15	Einengung eines magnetischen Feldes	233
8.16	Leitungsrohr mit Kühlung	233
8.17	Wellenausbreitung	235
8.18	Wellenausbreitung einer ebenen Welle	235
8.19	ebene Wellen	237
8.20	Dipolstrahler als Radiosender	238
8.21	Richtcharakteristik des Hertz'schen Dipolstrahlers	242
A.1	Vektorprodukt	245
A.2	Vektor \vec{v} und die Einheitsvektoren der Systeme S und S' (2-Dim.)	246

A.3	Darstellung des Ortsvektors \vec{r} und der Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten	249
A.4	koordinatenunabhängige/ -abhängige Darstellung	249
A.5	3 Punkte im Raum	250
A.6	Parametrisierung einer Linie mit dem Parameter α	251
A.7	beliebige Linie mit Endpunkten \vec{a} und \vec{b}	251
A.8	beliebige Flächen	252
A.9	beliebiger Körper	253
A.10	Beispiel eines Temperaturfeldes	254
A.11	Feldlinien eines Magnetfeldes	255
A.12	Darstellung eines Skalarfeldes	258
A.13	Darstellung zur Definition des Gradienten	258
A.14	Vektorfeld	259
A.15	Vektorfeld	260
A.16	Zusammenhang Differentialoperatoren und Objekte im Raum	262
A.17	Gradientenfeld eines skalaren Feldes, gekennzeichnet durch Äquipotentiallinien	263
A.18	Magnetfeldlinien eines lokalisierten Stromes	263
A.19	Höhenlinien eines Potentials	265
A.20	Einteilung einer Fläche in kleine Flächenelemente ΔF	266
A.21	Einteilung des Volumens in kleine Volumenelemente ΔV	266
A.22	beliebiger Körper	268
A.23	Schar von Funktionen zur Veranschaulichung der Delta-Funktion	271
A.24	Veranschaulichung der Delta-Funktion	272
A.25	Skizze zur darstellung der δ -Funktion	276
A.26	Aufteilung des Raumgebietes einer kugelsymmetrischen Anordnung	277