

## 4 Strömungen ohne Dichteänderung (quasi-inkompressible Strömungen)

### 4.1 Eindimensionale Strömungen realer inkompressibler Fluide (Flüssigkeiten)

#### 4.1.1 Innenströmungen (Rohrströmungen)

##### 4.1.1.1 Erweiterte Energiegleichung

Bei der Strömung realer Fluide, mit oder ohne Energieumsetzung, treten Verluste durch Reibung und Turbulenz (Wirbel) auf. Die dabei verloren gehende Strömungsenergie (Verlustenergie) wird in Wärme- und meist unbedeutende Schallenergie umgesetzt. Während die Geräuschenergie stört, beeinflusst die Erwärmung, insbesondere bei inkompressiblen Fluiden, den Strömungsverlauf meistens nicht. Diese durch innere Reibung und Impulsaustausch (Turbulenz) letztlich in Wärme umgesetzte mechanische Energie, die **Dissipation** (dissipieren), wird als **Verlustenergie**  $Y_V$  bezeichnet.  $Y_V$  ist dabei ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen, also die spezifische Verlustenergie. Mechanische Energie wird auch als geordnete Energie (hochwertig) und Wärme als ungeordnete Energie (geringerwertig) bezeichnet. Dissipation ist daher, molekular betrachtet, die Umsetzung von kinetischer Energie der geordneten Teilchenbewegung der Strömung in die ungeordnete der Thermik (molekülbedingter Impulsübertrag, Abschnitte 1.3.3.1 und 3.3.2). Dissipation ist somit – thermodynamisch ausgedrückt – die Umwandlung von entropiefreier Energie (mechanischer) in entropiebehaltete (Wärme).

Analog zum idealen Fluid ergibt sich die Energiegleichung realer Fluide, die sog. **Erweiterte Energiegleichung**, abgekürzt EE, ebenfalls aus der Energiebilanz. Strömt ein Medium in einen abgegrenzten Raum (Kontrollraum), z. B. in einem Rohr, von der Stelle ① nach Stelle ②, ist die gesamte Strömungsenergie (mechanische Energie) nach (3-83) an ② um die Verlust-

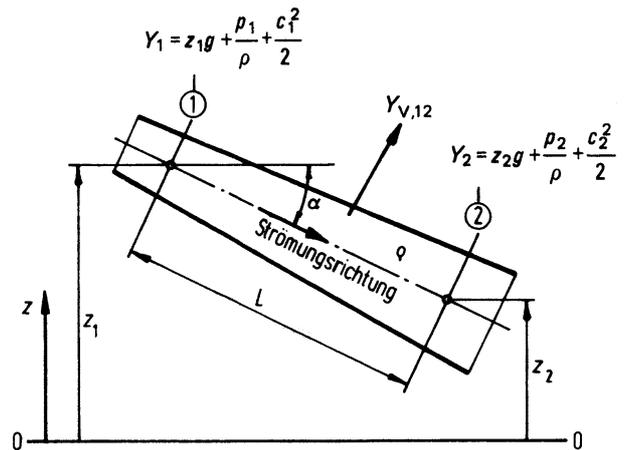


Bild 4-1. Innenströmung eines realen inkompressiblen Fluides von ① nach ②.

$Y$  spezifische mechanische Gesamtenergie der Strömung.

energie  $Y_{V,12}$ , die unterwegs durch Dissipation verloren geht, kleiner als an Stelle ①, gemäß Bild 4-1.

Die Energiebilanz der mechanischen Energie zwischen Stelle ① und ② ist erfüllt, wenn zur verbleibenden Strömungsenergie an Stelle ② die Verlustenergie hinzugerechnet wird. Gemäß den Bilanzbedingungen bedeutet dies, das Energiegleichgewicht ist dann erfüllt, wenn die Summe der Abgänge so groß ist wie die der Zugänge. Was hinausgeht, muss also gleich dem sein, was hineingeht (Erhaltungssatz). Gleichung (3-83) des idealen Fluides erweitert sich deshalb für die in Bild 4-1 eingetragene Strömungsrichtung (gekennzeichnet durch einen Pfeil) zu:

$$\text{EE } \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad Y_1 = Y_2 + Y_{V,12}$$

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + Y_{V,12}$$

(4-1)

Gleichung (4-1) ist die **Erweiterte Energiegleichung realer inkompressibler Fluide** (Flüssigkeiten).

Bei entgegengesetzter Strömungsrichtung, also in Bild 4-1 von Stelle ② nach Stelle ① ist gemäß Energiebilanz die mechanische Verlust-

energie  $Y_V$  dann auf der Gleichungsseite von  $Y_1$  hinzuzufügen.

Entsprechend sind auch die anderen Energiegleichungen, (3-81) und (3-104), zu erweitern  $\rightarrow$  EER.

Die gesamte spezifische Strömungsenergie  $Y$  auch als **Totalenergie** bezeichnet besteht jeweils wieder aus der Summe von Lagen-, Druck- und kinetischer Energie (spezifische Werte).

Die Diskussion der Summanden der Erweiterten Energiegleichung (4-1) mit Bild 4-1 ergibt:

- Die Höhen  $z_1$  und  $z_2$  sind durch örtliche Gegebenheiten festgelegt.
- Die Strömungsgeschwindigkeiten sind mit den Querschnitten durch die Kontinuitätsgleichung gekoppelt.

Geschwindigkeiten und Höhen sind hier deshalb durch die Strömungsverluste nicht beeinflussbar. Die *Verlustenergie* geht daher voll zu Lasten der **Druckenergie**. Bei der Innenströmung (Rohrsysteme) realer Fluide ist somit der Druck in Strömungsrichtung, an der Stelle ②, kleiner als bei idealem Fluid. Es gilt also:

Strömungsverlust in Rohrleitungen verursacht Druckverlust.

*Bemerkung:* Querstriche auf den Geschwindigkeitssymbolen als Kennzeichen für Mittelwerte (energiegemittelt) werden wieder, wie meist üblich, weggelassen, wenn keine Verwechslung möglich (Benutzer-Hinweise).

#### 4.1.1.2 Energieliniengefälle

Das **Energiegefälle**  $J$  oder **Energieliniengefälle**, das auch mit **Drucklinien-** oder **Gesamtgefälle** bezeichnet wird, ist die Summe von Ortshöhengefälle und Druckhöhengefälle einer stationären Strömung in einem Rohr konstanten Querschnittes.

Wenn in Bild 4-1  $A_2 = A_1$  und damit  $c_2 = c_1$  wäre, liefert (4-1), da  $(z_1 - z_2)/L = \sin \alpha$ :

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + Y_{V,12} \quad \text{Hieraus}$$

$$Y_{V,12} = g(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_{V,12}}{L} &= g \left( \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) \\ &= g \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\frac{Y_{V,12}}{L} = g \cdot J_{12} \quad (4-3)$$

Hierbei ist  $J_{12}$  das **Energieliniengefälle** zwischen den Stellen ① und ②:

$$J_{12} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} = \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \quad (4-4)$$

Sonderfall: Horizontale Rohrleitung ( $\alpha = 0$ ), Druckänderung dann nur infolge Verlust  $Y_V$ .

$$\text{Dafür wird } J_{12} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} = \frac{Y_{V,12}}{L \cdot g}$$

$$\text{oder } Y_{V,12} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p_{V,12}}{\rho} \quad (4-5)$$

### 4.1.1.3 Gerade Rohre mit Kreisquerschnitt

#### 4.1.1.3.1 Grundsätzliches

Für die durch die Strömungsverluste (Reibung, Wirbel) bedingte *Verlustenergie* sind beim einfachsten Fall, der geraden Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt, entsprechend dem NEWTONschen Reibungsgesetz, (1-13) und (1-14), folgende Einflussgrößen bestimmend:

- Berührungsfläche zwischen Fluid- und Rohrwand (Länge  $L$ , Durchmesser  $D$ ), die sog. Benetzungsfläche
- Strömungsgeschwindigkeit  $c$  (mittlere!)
- Fluid-Art (Eigenschaften  $\rho, \eta$ )
- Strömungsform (laminar, turbulent)
- Wandrauigkeit  $k$

$$\text{also } Y_V = f(L, D, c, \rho, \eta, \text{Strömungsform}, k) \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{Re}$$

Die Verlustenergie ist demnach u. a. sicher abhängig von der REYNOLDS-Zahl  $Re$ , (3-45).

#### 4.1.1.3.2 Laminare Rohrströmungen

Infolge der Haftbedingung (Abschnitt 1.3.3.1) hat das Fluid direkt an der Rohrwand keine Strömungsgeschwindigkeit. Zur Rohrmitte muss die

Geschwindigkeit ansteigen. Dieses Geschwindigkeitsgefälle verursacht nach NEWTON eine Scherspannung zwischen den sich aneinander, infolge Symmetrie konzentrischen Schichten.

Das Verhalten der laminaren Strömung erlaubt eine rein theoretische Behandlung. Um die Verlustenergie analytisch darzustellen, wird in Strömungsrichtung das Kräftegleichgewicht an einem koaxialen Fluidzylinder, Bild 4-2, mit Radius  $r$  aufgestellt, wobei  $0 < r < R$ . Dies ist zulässig, da bei laminarer Strömung alle Fluidteilchen, die an der Zuströmfläche, Stelle ①, in den abgrenzenden Zylinder eintreten, diesen nur durch die Abströmfläche ② wieder verlassen. Ein Fluid- und damit energiebehalteter Impulsaustausch durch die Zylindermantelfläche findet wegen fehlender turbulenter Mischbewegung nicht statt. Bedingt durch die laminare Reibung (Scherspannung  $\tau$ ) ändert sich der Druck jedoch in Strömungsrichtung.

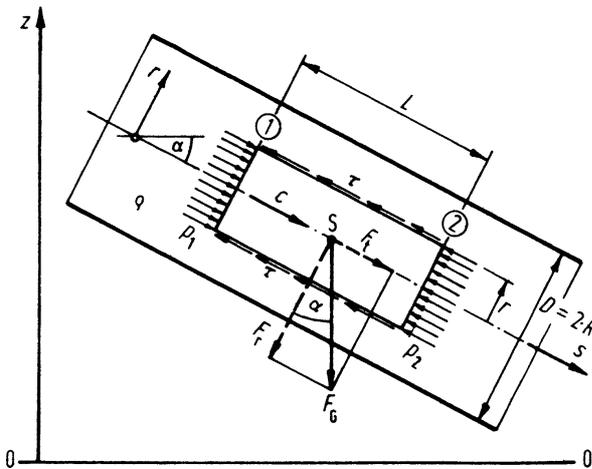


Bild 4-2. Kräfte auf einen Fluidzylinder, Durchmesser  $r$ ; Länge  $L$ , in stationärer laminarer Rohrströmung mit Komponenten-Zerlegung in die Richtungen des festgelegten  $(s, r)$ -Koordinatensystems.

Infolge Radialkraft  $F_r$  (Komponente der Gewichtskraft  $F_G$ ) ist der Druck auch über den Rohrquerschnitt nicht konstant. Da in Radialrichtung jedoch keine Strömung besteht, verändert sich hier der Druck in jedem Querschnitt gemäß dem fluidstatischen Grundgesetz (2-47). Über die Querschnitte ① und ② des Bezugs-

zylinders in Bild 4-2 steigt daher der Druck jeweils linear von oben nach unten. Ersatzweise eingetragen sind deshalb die zugehörigen Mittelwerte ( $p_1$  und  $p_2$ ) über den Querschnitten, die jeweils an der Rohrachse auftreten. Wegen des proportionalen Druckverlaufs in Querrichtung ist dies zulässig und führt daher zum richtigen Ergebnis (Hinweis auf Bild 3-30).

Bei stationärer Strömung ( $a_B = 0 \rightarrow$  nach NEWTON  $\Sigma F = m \cdot a_B = 0$ ) treten in Strömungsrichtung  $s$  auf:

Komponente der Gewichtskraft:

$$F_t = F_G \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \sin \alpha$$

Druckkräfte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stelle ①} \quad F_{p,1} = p_1 \cdot A_1 = p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 \\ \text{Stelle ②} \quad F_{p,2} = p_2 \cdot A_2 = p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = r_1 \\ \quad = r_2 \end{array}$$

Widerstandskraft infolge Fluidreibung, ebenfalls nach NEWTON  $\rightarrow$  (1-14):

$$F_W = \tau \cdot A_0 = -\eta \cdot \frac{dc}{dr} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L$$

Das Minuszeichen bei der Widerstandskraft ist zur Kompensation des negativen Geschwindigkeitsgefälles notwendig,  $dc/dr$  ist negativ, da, wie zuvor und in Abschnitt 3.3.3 begründet, die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  im Rohr mit wachsendem Radius  $r$  abnimmt.

Kräftegleichgewicht in  $s$ -Richtung aufgestellt:

$$\Sigma F_s = 0 \quad \rightarrow \quad F_t + F_{p,1} - F_{p,2} - F_W = 0$$

Die obigen Beziehungen für die Kräfte eingesetzt und vereinfacht ( $r \cdot \pi$  gekürzt), führt zu:

$$\rho \cdot g \cdot r \cdot L \cdot \sin \alpha + r \cdot (p_1 - p_2) + \eta \cdot \frac{dc}{dr} \cdot 2 \cdot L = 0 \quad | : L \quad \text{und umgestellt, ergibt:}$$

$$2 \cdot \eta \cdot \frac{dc}{dr} + \rho \cdot g \cdot r \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) = 0 \quad | : \rho$$

Mit Beziehung (4-2) und der kinematischen Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  ergibt sich die Differenzial-

gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  als Funktion vom Radius  $r$ :

$$2 \cdot v \cdot (dc/dr) + (Y_V/L) \cdot r = 0$$

Die Variablen  $c$  und  $r$  getrennt sowie integriert:

$$\int dc = -\frac{Y_V}{2 \cdot v \cdot L} \cdot \int r \cdot dr$$

$$c = -\frac{Y_V}{2 \cdot v \cdot L} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

Die Integrationskonstante  $C$  folgt aus der Randbedingung (Haftbedingung):

$$c = 0 \quad \text{für} \quad r = R$$

$$\text{Damit wird} \quad C = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot R^2$$

Eingesetzt in die Gleichung für  $c$  ergibt das **Gesetz von STOKES** für die *Geschwindigkeitsverteilung*  $c = f(r)$  der laminaren Rohrströmung:

$$c = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) \quad (4-6)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel. Die Geschwindigkeitsverteilung bei vollausgebildeter laminarer Innenströmung ist also parabolisch. Beim Kreisrohr liegen die Spitzen aller Geschwindigkeitsvektoren also auf einem Rotationsparaboloid, Bild 4-3, mit dessen Scheitel auf der Rohrachse.

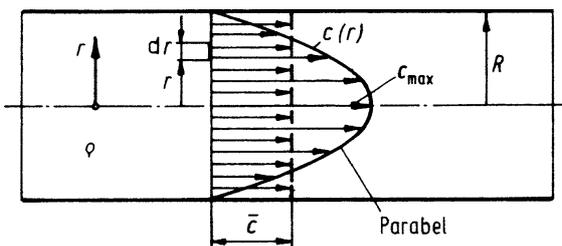


Bild 4-3. Geschwindigkeitsverlauf  $c = c(r)$  bei laminarer Innenströmung (Rohrströmung). Paraboloid-Mantel... Hüllfläche der rotationssymmetrischen räumlichen Geschwindigkeitsverteilung, mit eingezeichnetem Zylinder der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{c}$ .

Nach der Definition der Grenzschicht (Abschnitt 3.3.3.2) ist die laminare Rohrströmung

eine reine Grenzschichtströmung mit der Grenzschichtdicke  $\delta_L = R$  und der (ungestörten) Anströmgeschwindigkeit  $c_\infty = c_{\max}$ .

Die auf der Rohrachse liegende *maximale Strömungsgeschwindigkeit*  $c_{\max}$  ergibt sich aus (4-6) mit  $r = 0$  zu:

$$c_{\max} = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 = \frac{Y_V}{16 \cdot v \cdot L} \cdot D^2 \quad (4-7)$$

Der **Volumenstrom** kann durch Integrieren, auch Aufleiten genannt, über den Rohrquerschnitt  $A$  ermittelt werden:

$$\dot{V} = \int_{(A)} d\dot{V} \quad \text{hierbei nach Bild 4-3}$$

$$d\dot{V} = dA \cdot c(r) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot c(r)$$

Mit (4-6) ergibt sich:

$$\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot \int_0^R (R^2 \cdot r - r^3) \cdot dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{Y_V}{v \cdot L} \left( R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{Y_V}{v \cdot L} \cdot R^4 \quad (4-8)$$

Wird der Volumenstrom  $\dot{V} = \Delta V / \Delta t$  bei stationärer Strömung durch Messung des Ausflussvolumens  $\Delta V$  während der Zeit  $\Delta t$  bestimmt, kann mit (4-8) die kinematische Viskosität  $v$  ermittelt werden. Die schon in Abschnitt 1.3.3 erwähnten **Kapillarviskosimeter** nach UBBELOHDE<sup>1</sup> arbeiten nach diesem Verfahren. Dabei wird die kinematische Viskosität abhängig von der Fluidtemperatur bestimmt und in einem sog. **Viskositäts-Temperatur-Blatt** (VT-Blatt) nach UBBELOHDE aufgetragen. Die Koordinaten des VT-Diagramms sind dabei so geteilt, dass sich der Viskositätsverlauf von NEWTONSchen Fluiden als Gerade darstellt (Abschnitt 1.3.5.2).

Gleichung (4-8) lässt sich weiter umschreiben:

$$\dot{V} = \frac{Y_V}{8 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{Y_V}{8 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 \cdot A \quad (4-9)$$

<sup>1)</sup> UBBELOHDE, Leo (1876 bis 1964), dt. Chemiker.

Mit der *mittleren Strömungsgeschwindigkeit*  $\bar{c}$  gilt andererseits die Bedingung (3-3):

$$\dot{V} = A \cdot \bar{c} \quad (4-10)$$

Aus Gleichsetzen von (4-9) mit (4-10) folgt:

$$\bar{c} = \frac{Y_V}{8 \cdot \nu \cdot L} \cdot R^2 = \frac{Y_V}{32 \cdot \nu \cdot L} \cdot D^2 \quad (4-11)$$

Der Vergleich mit (4-7) liefert:

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \cdot c_{\max} \quad (4-12)$$

Die **Verlustenergie**  $Y_V$  ergibt sich durch Umstellen von (4-11) und sinnvollerweise anschließendem Erweitern mit  $\bar{c}/\bar{c}$ :

$$Y_V = 32 \cdot \nu \cdot L \cdot \frac{\bar{c}}{D^2} = 64 \cdot \frac{\nu}{\bar{c} \cdot D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-13)$$

Mit der REYNOLDS-Zahl  $Re = \bar{c} \cdot D/\nu$  wird:

$$Y_V = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-14)$$

Gleichung (4-14) wird nach ihren Entdeckern als **HAGEN<sup>1</sup>-POISEUILLE<sup>2</sup>sches Gesetz** bezeichnet.

Mit der Abkürzung  $\lambda = 64/Re$  (4-15)

der sog. **Rohrreibungszahl**  $\lambda$ , erhält das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE die Form:

$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-16)$$

Die *Rohrreibungszahl*  $\lambda$  und damit die *Verlustenergie*  $Y_V$  ist bei laminarer Strömung eine direkte Funktion der REYNOLDS-Zahl sowie theoretisch völlig unabhängig von der üblichen Rohr-Rauigkeit, was auch Experimente und

<sup>1)</sup> HAGEN, Gotthilf (1797 bis 1884), dt. Wasserbau-meister.

<sup>2)</sup> POISEUILLE, Jean Louis Maria (1799 bis 1869), frz. Mediziner, Untersuchung der Strömung des Blutes in Adern.

Beide Forscher entdeckten das o.g. Gesetz unabhängig voneinander.

die Praxis bestätigen. Bei größerer Rauigkeit Umschlag in Turbulenz (Abschnitt 4.1.1.3.4).

Bei laminarer Strömung ist die Verlustenergie nach (4-13) proportional der Geschwindigkeit. In (4-14) und (4-16) ist dieser lineare Zusammenhang zwischen  $Y_V$  und  $\bar{c}$ , obwohl vorhanden, infolge obiger Erweiterung ( $\bar{c}/\bar{c}$ ), nicht mehr direkt erkennbar.

Querstrich über  $c$ -Symbol wird bequemerweise meist wieder weggelassen.

Infolge des fehlenden makroskopischen Queraustauschs (Abschnitt 3.3.2.2.1) hängt die Reibung bei laminarer Strömung theoretisch nicht und praktisch vernachlässigbar von der üblichen Wandrauigkeit ab. Die Schichtenbewegung deckt die Rauigkeiten ab und schafft sich dadurch selbst eine quasi glatte Wand.

#### 4.1.1.3.3 Laminare Strömung zwischen parallelen Platten

Entsprechend der laminaren Rohrströmung lässt sich die stationäre Laminarbewegung eines Fluides zwischen zwei parallelen Platten behandeln (Bild 4-4 mit  $b \rightarrow \infty$ ). Da es sich um eine ebene Strömung in Plattenrichtung ( $x$ -Koordinate) handelt, sind  $c_y = 0$ ,  $c_z = 0$  sowie  $\delta p/\delta y = 0$  und  $\delta p/\delta z = 0$ , weshalb keine partiellen Differenziale notwendig.

Gleichgewichtsansatz für das in Bild 4-4 eingetragene Fluidteilchen:

Da stationär, also Beschleunigung  $a = 0$ , gilt  $\Sigma F = 0$ . Deshalb:

$$p \cdot dA - (p + dp) \cdot dA - \tau \cdot dA_0 + (\tau + d\tau) \cdot dA_0 = 0$$

Ausgewertet mit Stirnfläche  $dA = dz \cdot b$  (Querschnitt) und Scherfläche  $dA_0 = dx \cdot b$  (eine seitliche Fläche  $\rightarrow$  Oberfläche):

$$- dp \cdot dz \cdot b + d\tau \cdot dx \cdot b = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dz}$$

Mit (1-15) ergibt sich, wobei  $\eta = \text{konst}$  (NEWTONsches Fluid):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dz} \left( \eta \cdot \frac{dc_x}{dz} \right) = \eta \cdot \frac{d^2 c_x}{dz^2} \quad (4-16a)$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

a) Beide Wände bewegen sich nicht.

Das Fluid strömt zwischen den Platten infolge linearem Druckabfall in  $x$ -Richtung, also  $dp/dx = \text{konst}$ , weshalb ! Zeichen. Dann gilt gemäß (4-4): Das Energiegefälle ist konstant. Angewendet auf das Teilchen in Bild 4-4, liefert:

$$J = \frac{p - (p + dp)}{\rho \cdot g \cdot dx} = -\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{dp}{dx} \stackrel{!}{=} \text{konst}$$

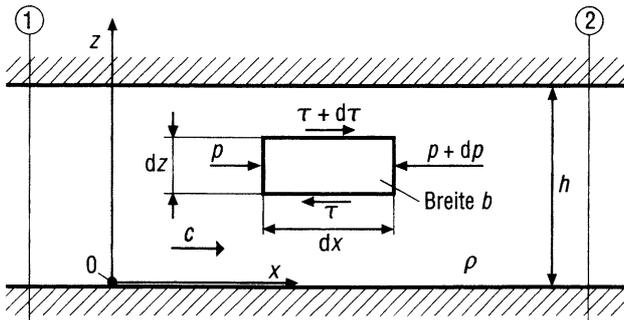


Bild 4-4. Stationäre Laminarströmung (eindimensional  $\rightarrow$  1D) zwischen zwei parallelen Platten von Abstand  $h$  und Breite  $b$ , letztere senkrecht zur Bildebene ( $y$ -Richtung).

Umgestellt nach  $dp/dx$  und eingesetzt in (4-16a), ergibt mit  $\nu = \eta/\rho$ :

$$\frac{d^2 c_x}{dz^2} = -\rho \cdot g \cdot J \cdot \frac{1}{\eta} = -\frac{g \cdot J}{\nu}$$

Diese Differenzialgleichung für  $c_x = f(z)$ , zweimal integriert (aufgeleitet), führt zu:

$$c_x = -\frac{J \cdot g}{\nu} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  folgen aus den Randbedingungen:

Bei  $z = 0$  ist  $c_x = 0$  ergibt:

$$C_2 = 0$$

Bei  $z = h$  ist  $c_x = 0$  ergibt:

$$C_1 = (J \cdot g/\nu) \cdot (h/2)$$

Eingesetzt liefert:

$$c_x = \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} (h \cdot z - z^2) \quad (4-16b)$$

Analog zu (4-6) ergibt sich wieder ein parabolischer Geschwindigkeitsverlauf, also  $c_x = c_x(z) = f(z^2)$ .

Der **Volumenstrom**  $\dot{V}$  zwischen den Platten ist durch Integration (Aufleitung):

$$\dot{V} = \int_{(A)} d\dot{V} = \int_0^h c_x \cdot b \cdot dz \quad (4-16b) \text{ eingesetzt:}$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \int_0^h (h \cdot z - z^2) dz$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \left( h \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \left( h \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \frac{b \cdot h^3}{6}$$

$$\dot{V} = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot b \cdot h = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot A \quad (4-16c)$$

mit der Querschnittsfläche  $A = b \cdot h$ , wobei  $b \gg h$ .

Aus  $\dot{V} = \bar{c} \cdot A$  folgt mit (4-16c) für die globale mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}$ , d. h. der über den Strömungsquerschnitt  $A$  gemittelte Wert (Globalmittelwert):

$$\bar{c} = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \quad (4-16d)$$

Das Energieliniengefälle  $J$  gemäß (4-5) in Beziehung (4-16d) eingeführt, ergibt:

$$\bar{c} = \frac{g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot \frac{Y_V}{L \cdot g} \quad \text{Hieraus spez. Verlustenergie:}$$

$$Y_V = \frac{12 \cdot \nu}{h} \cdot \frac{L}{h} \cdot \bar{c} \quad \text{mit Strömungsweg } L = x_2 - x_1$$

Erweitert mit  $\bar{c}/\bar{c}$  und  $(\bar{c} \cdot h)/\nu = Re_h$  gesetzt, also die auf den Plattenabstand  $h$  bezogene REYNOLDS-Zahl eingeführt, liefert:

$$Y_V = \frac{24}{\bar{c} \cdot h/\nu} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} = \frac{24}{Re_h} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} = \lambda \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-16e)$$

Es ergibt sich zwangsläufig der zu (4-16) entsprechende Aufbau. Hierbei beträgt jedoch die laminare Platten-Reibungszahl  $\lambda = 24/Re_h$ , die von der für Rohre abweicht, gemäß (4-15).

Bemerkung: Bequemerweise wird der Querstrich über dem Geschwindigkeitssymbol  $c$  meist wieder weggelassen (Abschnitt 3.1.2).

b) Eine Wand steht, die andere bewegt sich.

Festgelegt wird hierzu: Die untere Platte ruht, die obere bewegt sich mit Geschwindigkeit  $c_{x,0}$  in Plattenrichtung ( $x$ -Koordinate).

Infolge Haftbedingung verursacht die Plattenbewegung im Fluid eine Schlepplströmung. Durch das Haften ergeben sich jetzt folgende Randbedingungen: Bei  $z = 0$  ist  $c_x = 0$  und bei  $z = h$  ist  $c_x = c_{x,0}$ . Des Weiteren sind jetzt, da das Fluid nur durch Mitschleppen bewegt wird, keine Druckgefälle vorhanden. Das gilt sowohl für die Quer- ( $z$ -Achse), als auch Längsrichtung ( $x$ -Koordinate), weshalb  $dp/dz = 0$  und  $dp/dx = 0$ . Damit ergibt (4-16a):

$$\frac{d^2 c_x}{dz^2} = 0$$

Diese einfache Differenzialgleichung zweimal integriert (aufgeleitet), führt zu:

$$c_x = K_1 \cdot z + K_2$$

Die Randbedingungen ergeben für die Integrationskonstanten:

$$z = 0; c_x = 0 \rightarrow K_2 = 0$$

$$z = h; c_x = c_{x,0} \rightarrow K_1 = c_{x,0}/h$$

Eingesetzt, ergibt:

$$c_x = c_{x,0} \cdot (z/h) \quad (4-16f)$$

Der Geschwindigkeitsverlauf ist jetzt – gegenläufig zu Fall a – linear. Diese Fluidströmung wird gewöhnlich als COUETTE-Strömung (Abschnitt 1.3.5.1) bezeichnet.

Für Scherspannung  $\tau$  sowie Reibungskraft  $F_R$  ergeben sich dann nach (1-15) und (1-14):

$$\tau = \eta \cdot \frac{dc_x}{dz} = \eta \cdot \frac{c_{x,0}}{h} = \text{konst} \quad (4-16g)$$

$$F_R = \tau \cdot A_0 = \eta \cdot \frac{c_{x,0}}{h} \cdot b \cdot L \quad (4-16h)$$

Ergebnis: Schubspannung  $\tau$  ist im gesamten Fluid gleich groß (Abschnitt 1.3.5.1).

#### 4.1.1.3.4 Turbulente Rohrströmungen

Technische Rohrströmungen sind, bis auf wenige Ausnahmen, turbulent. Turbulente Rohrströmung ist daher nicht nur wesentlich wichtiger, sondern infolge der makroskopischen *Mischbewegung* zudem ungleich komplizierter als die laminare. Bis heute ist eine theoretische Darstellung der Gesetzmäßigkeiten turbulenter Strömung noch nicht gelungen. Ein analytischer Turbulenzansatz fehlt noch (Abschnitt 4.3.1.7). Erst umfangreiche experimentelle Untersuchungen und numerische Modellansätze ermöglichten eine brauchbare Klärung der turbulenten Strömung. Die auf der Grundlage von Versuchen erarbeiteten Näherungsformeln, Tabellen und Diagramme liefern für die technische Anwendung meist zufriedenstellende Ergebnisse.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.2.2 auseinandergesetzt, sind die Mischungsverluste beim Impulsaustausch infolge der Geschwindigkeitsschwankungen fast immer wesentlich größer als die gleichzeitig vorhandenen NEWTONSchen Reibungsverluste. Beide Erscheinungen sind zur Gesamtviskosität, der sog. scheinbaren Viskosität (Abschnitt 3.3.2.2.3), zusammenfassbar und ergeben die gesamte Schubspannung, (3-50). Außerdem beeinflusst die Wandbeschaffenheit den Strömungswiderstand. Die Geschwindigkeitsverteilung ist infolge des turbulenten Mischungsvorganges zwangsläufig gleichmäßiger und die Verlustenergie wesentlich größer als bei laminarer Strömung.

**Geschwindigkeits-Verteilung:** Nach NIKURADSE, der weitgehende Versuchsreihen auswertete, gilt:

Für den Geschwindigkeitsverlauf:

$$c(r) = (1 - (r/R))^n \cdot c_{\max} \quad (4-17)$$

**Potenzgesetz des Geschwindigkeitsverlaufes.** Wird auch als **1/7-Potenzgesetz** der Ge-

Tabelle 4-1. Exponent  $n$  und Faktor  $K$  zum Potenzgesetz des turbulenten Geschwindigkeitsverlaufs bei Rohrströmungen in Abhängigkeit von der  $Re$ -Zahl

$Re$	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$(2 \dots 3,2) \cdot 10^6$
$n$	1/6	1/6,6	1/7	1/8,8	1/10
$K$	0,791	0,807	0,817	0,850	0,865

schwindigkeits-Verteilung bezeichnet, da  $n \approx 1/7$ . Nachteil des im Wesentlichen auf Messergebnissen beruhenden empirischen Potenzgesetzes: Der sich ergebende angenäherte Geschwindigkeitsverlauf ist unstetig. In der Rohrmitte, also bei  $r = 0$ , tritt ein Knick (Unstetigkeit) auf, was mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt.

Für die mittlere Geschwindigkeit gesetzt:

$$\bar{c} = K \cdot c_{\max} \tag{4-18}$$

Mit dem Faktor:

$$K = \frac{2}{(n+1) \cdot (n+2)} \tag{4-19}$$

Exponent  $n$  und Faktor  $K$  sind von der REYNOLDS-Zahl und in geringem Maße auch von der Wandrauigkeit abhängig. Tabelle 4-1 enthält Werte von  $n$  und  $K$  für verschiedene  $Re$ -Zahlen.

Mittelwert von Faktor  $K$ :

$$\bar{K} \approx 0,83 \pm 4\% \tag{4-20}$$

Die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt demnach etwa 83% von der *maximalen*; bei laminarer sind dies, wie zuvor begründet, nur 50%. Auch hieraus ergibt sich, dass der Geschwindigkeitsverlauf, Bild 4-5, bei turbulenter Strömung im mittleren Bereich (Rohrmitte) wesentlich flacher ist als bei laminarer und zwangsläufig einen steileren Randabfall aufweist. Die Geschwindigkeit steigt in der dünnen *laminaren Unterschicht* (Viskosschicht) sehr steil an und bleibt dann im Außenbereich ungefähr konstant. In der laminaren Unterschicht treten nur NEWTONsche Reibungskräfte auf, während im

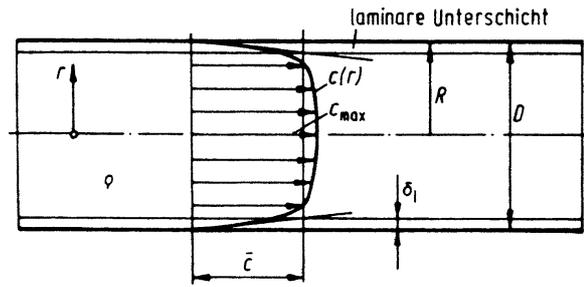


Bild 4-5. Geschwindigkeitsverlauf  $c(r)$  bei turbulenter Innenströmung (Rohrströmung).  $\delta_1$  Dicke der viskosen Unterschicht.

Außenbereich hauptsächlich Mischungsverluste entstehen (Abschnitte 3.3.3 und 4.1.6.1.2).

Versuche ergeben, dass die *Geschwindigkeitsprofile* rauer Rohre in Wandnähe meist einen weniger steilen Abfall aufweisen als bei glatter Rohrwand. Mit zunehmender Rauigkeit wächst der Exponent  $n$  (wenn auch nur geringfügig) des Potenzgesetzes, (4-17). Die Wandrauigkeiten wirken jedoch turbulenzanregend und -verstärkend.

Ebenso wie die laminare, ist auch die turbulente Rohrströmung gemäß Grenzschichtdefinition (Abschnitt 3.3.3.2) eine reine Grenzschichtströmung mit der Grenzschichtdicke  $\delta_T = R$  und  $c_{\max}$  als ungestörter Anström- oder Außenströmung  $c_\infty$  (Geschwindigkeit).

Statt des Potenzgesetzes nach (4-17) wird der Geschwindigkeitsverlauf auch vorteilhaft durch ein asymptotisch-**logarithmisches Gesetz** angenähert. Nach SCHLICHTING [53] gilt mit der sog. Schubspannungsgeschwindigkeit  $c_\tau$  (4-41) als logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz:

$$\frac{c_{\max} - c(r)}{c_\tau} = -\frac{1}{\varkappa} \cdot \left[ \left( \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{r}{R}} \right) \right) + \sqrt{\frac{r}{R}} \right] \tag{4-20a}$$

Hierbei handelt es sich um eine semiempirische Beziehung. Dieses halbexperimentelle Gesetz beruht somit auf theoretischen Überlegungen, das durch experimentell ermittelte Größen (Konstante  $\varkappa$ ) den tatsächlichen Verhältnissen angepasst ist. Die empirische Anpassungskonstante  $\varkappa$  liegt im Bereich  $\varkappa = 0,35$  bis  $0,45$ .

Es ergibt sich durch das Logarithmusgesetz ein wirklichkeitsgetreuer stetiger Geschwindigkeitsverlauf. Das Geschwindigkeitsprofil weist deshalb keine Unstetigkeit in der Rohrmitte auf. Die Formel gilt jedoch nur bis etwa  $r/R \leq 0,95$ , also nicht in der viskosen Unterschicht. Der große Vorteil des logarithmischen Gesetzes gegenüber dem Potenzgesetz besteht zudem darin, dass es auch für sehr große REYNOLDS-Zahlen asymptotisch verläuft. Deshalb kann es auf beliebig große  $Re$ -Zahlen, auch über den durch Messungen überspannten Bereich hinaus, extrapoliert werden. Bei dem Potenzgesetz dagegen ändert sich entsprechend Tabelle 4-1 der Exponent mit der  $Re$ -Zahl. Das universelle logarithmische Geschwindigkeitsgesetz ermöglicht als weiteres die Abgrenzung der Strömungsform. Gemäß SCHLICHTING [53] gilt hiernach für sog. technisch (hydraulisch) glatte Strömungen:

*Rein laminare* Reibung (laminarer Bereich gemäß Bild 4-6):

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} < 50 \quad (4-21)$$

*Laminar-turbulente* Reibung, d. h. laminare und turbulente Reibung von gleicher Größenordnung (Übergangsbereich, Bild 4-6):

$$50 < \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} < 700 \quad (4-22)$$

*Rein turbulente* Reibung („rauer“ Bereich nach Bild 4-6):

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} > 700 \quad (4-23)$$

Außerdem ergibt sich nach [53] bei *turbulenter Strömung an glatter Wand* für die Dicke  $\delta_1$  der laminaren Unterschicht (Bild 4-5):

$$\delta_1 \approx \frac{50}{Re^{0,875}} \cdot R = \frac{25}{Re^{0,875}} \cdot D \quad (4-24)$$

**Verlustenergie**  $Y_V$ : Entgegen der laminaren Strömung kann bei turbulenter infolge der Mischbewegung kein coaxialer Fluidzylinder gemäß Bild 4-2 herausgegriffen werden, um Kräftebetrachtungen durchzuführen. Durch die

überlagerten Querbewegungen würde ein Fluid- und damit Energieaustausch durch den Bezugszylindermantel erfolgen, der analytisch letztlich nicht exakt erfassbar ist. Die Untersuchungen müssen deshalb auf den ganzen Rohrquerschnitt ausgedehnt werden.

Nach Erfahrung bzw. Versuchen gilt für die Widerstandskraft:

$$\begin{aligned} F_W &\sim \text{der benetzten Rohrwand } D \cdot \pi \cdot L \\ &\sim \text{der kinetischen Energie } c^2/2 \\ &\sim \text{der Fluidart, gekennzeichnet durch deren Dichte } \rho \end{aligned}$$

Hierbei steht das Zeichen  $\sim$  für proportional.

Mit dem Proportionalitätsfaktor  $\Psi$  ergibt sich:

$$F_W = \Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot (c^2/2)$$

Andererseits kann gesetzt werden mit (4-5):

$$F_W = \Delta p_V \cdot A = \Delta p_V \cdot D^2 \cdot \pi/4 = \rho \cdot Y_V \cdot D^2 \cdot \pi/4$$

Gleichgesetzt:

$$\rho \cdot Y_V \cdot D^2 \cdot \pi/4 = \Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot c^2/2$$

$$\text{Hieraus: } Y_V = 4 \cdot \Psi \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2}$$

Mit der Zusammenfassung  $\lambda = 4 \cdot \Psi$  ergibt sich die **Formel von DARCY**<sup>1</sup>, kurz **DARCYformel**:

$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-25)$$

Zu beachten ist, dass die **Rohrreibungszahl**  $\lambda$  bei dieser Formel von DARCY, entgegen der für laminare Strömung (4-15), nur experimentell bestimmt werden kann.

Im Gegensatz zur laminaren Rohrströmung (4-13) wächst die Verlustenergie gemäß (4-25) bei turbulenter quadratisch mit der Strömungsgeschwindigkeit (Abschnitt 4.1.6.1.2). Dabei zeigt sich, wie auch Versuche bestätigen, dass die *Rohrreibungszahl*  $\lambda$  der turbulenten Strömung von der REYNOLDS-Zahl  $Re$  und infolge des makroskopischen Mischungsvorganges

<sup>1)</sup> DARCY, Henry (1803 bis 1855), frz. Ingenieur.

(Abschnitt 3.3.2.2.1) zudem von der Rohrrauigkeit  $k$  abhängt. Während die normale Rauigkeit – sie wirkt turbulenz erzeugend oder ablösend – bei laminarer Strömung ohne Einfluss ist, wirkt sie sich bei turbulenter Strömung wesentlich aus. Die außerhalb der laminaren Unterschicht liegenden Rauigkeitsspitzen wirken wie Stolperstellen (Abschnitt 3.3.4), welche die Turbulenz anfachend erhöhen und damit die Impulsaustauschgröße (Abschnitt 3.3.2.2.3) verstärken. Bei laminarer Strömung dagegen wirkt die Viskosität auf die Wanderhebungen glättend. Zweckmäßigerweise wird bei turbulenter Rohrströmung gesetzt:

$$\lambda = f(Re; D/k_s) \quad (4-26)$$

Es wird also nicht die Rauigkeit direkt, sondern die **inverse relative Rauigkeit**  $D/k_s$  als zweite Variable verwendet. Grund: Zweckmäßig, da sich für Quotient  $D/k_s$  größere Zahlen ergeben. Wegen der großen Mannigfaltigkeit der geometrischen Formen, Anordnungen und Abmessungen ist die Anzahl der Rauigkeitsparameter sehr groß und daher kaum bestimmbar. Deshalb musste eine Vergleichsgröße gefunden werden. Als Ersatzgröße für die *natürliche Rauigkeit* wurde von NIKURADSE die sog. **äquivalente Sandrauigkeit**, oder kurz **Sandrauigkeit**  $k_s$ , geschaffen. Die Sandrauigkeit wird künstlich durch Aufkleben einer geschlossenen Schicht von Sandkörnern gleicher Dicke  $k_s$  erzeugt. Dann gilt:

Ein Rohr mit der natürlichen Rauigkeit  $k$  hat den gleichen Rauigkeitswert wie ein Rohr mit der künstlichen Sandrauigkeit  $k_s$ , wenn es bei gleichen geometrischen Abmessungen, gleichem Volumenstrom und gleichem Medium den gleichen Druckverlust aufweist. Dann sind auch REYNOLDS- und Rohrreibungszahl jeweils gleich.

Bei technisch erzeugten Flächen durch Gießen, Walzen, Ziehen, Pressen, Bearbeiten usw. sind die sich zwangsläufigergebenden *absoluten Rauheiten*  $k$  regelmäßig. Dies gilt ungefähr auch für gleichmäßige Abnutzung oder Verschmutzung (Rost, Ablagerungen). Für derartige Oberflächen beträgt nach Versuchen die äquivalente

Sandrauigkeit  $k_s$  bis zum 1,6-fachen der vorhandenen absoluten Rauigkeit  $k$ . Für technisch erzeugte und gleichmäßig verschmutzte Flächen gilt deshalb:  $k_s = (1 \dots 1,6) \cdot k$ . Oft kann hier jedoch  $k_s \approx k$  gesetzt werden.

Verkleinern der Oberflächenrauigkeit lohnt sich zur Verlustminderung umso mehr, je höher die Strömungsgeschwindigkeit ist, da die turbulente Reibung proportional zu ihr ansteigt.

Tabelle 6-14 sowie Bild 6-44 enthalten die absoluten Rauigkeiten  $k$  für technisch wichtige Rohrmaterialien und Flächen unterschiedlicher Herstellung sowie verschiedenen Gebrauchszustandes.

Bemerkung:  $k \hat{=} R_t$  bzw.  $R_z$  gemäß DIN 4762.

Den durch umfangreiche Versuche ermittelten Verlauf der Rohrreibungszahl  $\lambda$  als Funktion der REYNOLDS-Zahl  $Re$  mit dem Kehrwert der relativen Rauigkeit  $D/k_s$  bzw.  $D/k$  als Parameter zeigt Bild 4-6 in prinzipieller Darstellung. Wegen des großen  $Re$ -Bereiches wird dieses sog. **Rohrreibungs-, COLEBROOK- oder MOODY-Diagramm** vorteilhaft in doppellogarithmischem Maßstab aufgetragen.

Bild 6-11 enthält ein ausführliches Arbeitsdiagramm, dessen Genauigkeit bei den meisten Anwendungsfällen ausreicht, um die Rohrreibungszahl  $\lambda$  zu bestimmen. „Computer benötigen jedoch Formeln“  $\rightarrow$  (4-27) bis (4-35).

Das Diagrammfeld lässt sich in die folgenden vier Kurven bzw. Bereiche aufteilen:

1. **Laminares Gebiet**,  $Re < Re_{kr}$ ,  $\lambda = f(Re)$
2. **Turbulentes Gebiet**,  $Re \geq Re_{kr}$ 
  - a) Glattes Verhalten;  $k_s \approx 0$ :  $\lambda = f(Re)$
  - b) Übergangsbereich  $\lambda = f(Re, D/k_s)$
  - c) Raues Verhalten  $\lambda = f(D/k_s)$

Die verschiedenen Bereiche sind durch folgende wichtige Merkmale gekennzeichnet:

1. **Laminares Gebiet** ( $Re < Re_{kr} = 2320$ )  
Die laminare Rohrströmung ist in Abschnitt 4.1.1.3.2 dargestellt. Als Ergebnis kann nochmals festgehalten werden:



- Nach neueren Untersuchungen von ROTTA ist die Dicke der laminaren Unterschicht bei rauher Wand geringer als bei glatter.

b) *Übergangsbereich*

Der Übergangsbereich liegt zwischen glattem und rauem Verhalten. Die Grenzkurve, die den Übergangsbereich nach oben abgrenzt verbindet die Kurvenpunkte, ab denen die  $(D/k_s)$ -Kurven etwa waagrecht, d. h. gut angenähert parallel zur  $Re$ -Achse (Abszisse) verlaufen.

Die Wandrauigkeit kommt zur Wirkung, wenn die Rauigkeitserhebungen höher sind als die laminare Unterschicht und deshalb in den turbulenten Grenzschichtbereich hineinragen. Die aus der viskosen Unterschicht herausragenden Körner-, d. h. Rauigkeitsspitzen bewirken als Stolperstellen das Bilden kleiner örtlicher Wirbel (Vortex) und erhöhen dadurch die Reibung, den sog. Turbulenz- oder Wirbelwiderstand. Da die Dicke der laminaren Unterschicht mit wachsender REYNOLDS-Zahl dünner wird, ragen die Rauigkeitsspitzen immer mehr heraus. Mit steigender  $Re$ -Zahl kommt die Rauigkeit daher im Übergangsbereich immer mehr zur Geltung und beeinflusst den Strömungswiderstand entsprechend stärker.

Der Übergangsbereich ist gekennzeichnet durch die Bedingung [53]:

$$25 < \frac{k_s}{D} \cdot Re^{0,875} < 350 \quad (4-32)$$

Für die Rohrreibungszahl gilt in diesem Bereich die **Interpolationsformel nach COLEBROOK** → **COLEBROOK-Formel**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{k_s}{D} \right) \quad (4-33)$$

Auch diese Formel enthält  $\lambda$  ebenfalls nur implizit, da nicht explizit auflösbar und ist deshalb nur aufwändig zu handhaben → Iterationsvorgehen notwendig, mit Startwert aus Bild 6-11 oder nach Erfahrung.

c) *Raues Verhalten.*

Ist die laminare Unterschicht so dünn geworden, dass die gesamten Rauigkeitserhebungen strömungstechnisch nahezu gänzlich zur Geltung gekommen sind, verändert ein weiteres Erhöhen der REYNOLDS-Zahl die durch diese Einflüsse gekennzeichnete Rohrreibungszahl  $\lambda$  praktisch nicht mehr, weshalb dann vollständig raues Verhalten vorliegt.

Der Bereich „vollkommen raues Verhalten“ ist gemäß Erfahrung und [53] nach unten abgegrenzt durch die Bedingung (entsprechend (4-23)):

$$(k_s/D) \cdot Re^{0,875} \geq 350 \quad (4-34)$$

Für die voll ausgebildete Rauigkeitsströmung ist die **Rohrreibungszahl** bestimmbar nach:

**KÁRMÁN-NIKURADSE**

$$\lambda = \frac{1}{\left( 2 \cdot \lg \frac{D}{k_s} + 1,14 \right)^2} \quad (4-35)$$

**MOODY**

$$\lambda = 0,005 + 0,15 \cdot (D/k_s)^{-1/3} \quad (4-35a)$$

Für die **Grenzkurve** gilt gemäß:

**TRUCKENBRODT [50]**

$$1/\lambda \approx 2 \cdot \lg(Re \cdot \sqrt{\lambda}) - 3,5 \quad (4-35b)$$

**BLASIUS**

$$\lambda \approx [(200 \cdot D/k_s)/Re]^2 \quad (4-35c)$$

Mit diesen Beziehungen lässt sich ebenfalls feststellen, ob der Reibungsfall im rauen Gebiet, d. h. rechts von der Grenzkurve liegt und damit  $\lambda \approx \text{konst}$  ist, oder im Übergangsbereich ( $\lambda \neq \text{konst}$ ).

Wie in Abschnitt 4.1.4.4 ausgeführt, kann durch die sog. **Kornkennzahl**  $k \cdot c/v$  gekennzeichnet werden, ob die Rauigkeit von Einfluss auf die Reibung (Friktion) ist. Die Kornkennzahl ist eine besondere Form der REYNOLDS-Zahl. Liegen die Rauigkeiten innerhalb der viskosen, d.h. laminaren Unterschicht ( $k_s \leq \delta_1$ ; Bild 4-5), haben diese, wie begründet, keinen Reibungseinfluss. Gemäß Experimenten ist diese Bedingung erfüllt, wenn die **äquivalente Kornkennzahl**  $k_s \cdot c/v$  unterhalb folgender Werte bzw. Bereiche bleibt:

$$\text{Rohrströmungen} \quad k_s \cdot c/v \leq 100$$

$$\text{Tragflügel und Schaufelgitter} \quad k_s \cdot c/v \leq (20 \text{ bis } 120)$$

Der große Bereich im zweiten Fall ist, wie auch die zugehörige kritische REYNOLDS-Zahl (3-52), durch die unterschiedlichen, oft unbekannt Anströmbedingungen (Vorturbulenz) bestimmt. Die jeweilige Grenze kann hier nur durch spezielle Einzelversuche geklärt werden.

*Ergänzung:* Mit  $c = \dot{V}/A$  (aus (3-9)) und dem Druckverlust  $\Delta p_V = \rho \cdot Y_V$  lassen sich Beziehungen (4-25) und (4-16) wie folgt umschreiben:

$$\Delta p_V = \rho \cdot Y_V = \rho \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2 \cdot A^2} \cdot \dot{V}^2$$

$$\Delta p_V = R \cdot \dot{V}^2 \quad (4-35d)$$

Hierbei ist analog Elektrotechnik (OHMsches Gesetz)  $R$  der **Widerstand** (dimensionsbehaftet):

$$R = \frac{\zeta_R \cdot \rho}{2 \cdot A^2} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^7} \right] \quad (4-35e)$$

mit  $\zeta_R = \lambda \cdot (L/D)$  als Widerstandszahl von geraden Rohren

$$\begin{array}{l} \text{Dichte } \rho \text{ in kg/m}^3 \\ \text{Querschnitt } A \text{ in m}^2 \end{array}$$

Der Druckverlust  $\Delta p_V$  ergibt sich nach (4-35d) in Pa = N/m<sup>2</sup>, wobei der Volumenstrom  $\dot{V}$  in m<sup>3</sup>/s einzusetzen ist.

Auf der Rohrlänge entsprechend  $D/\lambda$  geht laut Widerstandsbeziehungen durch Reibung gerade der Druck in Höhe des zugehörigen Staudruckes  $\rho \cdot c^2/2$  verloren.

Aus dem Druckverlust  $\Delta p_V$  nach (4-5), der DARCY-Formel (4-25) und der EULER-Zahl (Abschnitt 3.3.1.3) lässt sich die Rohrreibungszahl  $\lambda$  auch wie folgt darstellen:

$$\Delta p_V = \rho \cdot Y_V = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} \quad \text{Hieraus}$$

$$\lambda = 2 \cdot \frac{D}{L} \cdot \frac{\Delta p_V}{\rho \cdot c^2}$$

Mit der EULER-Zahl  $Eu = \Delta p_V/(\rho \cdot c^2)$  gemäß (3-36) gilt dann:

$$\lambda = 2 \cdot (D/L) \cdot Eu \quad (4-35f)$$

oder

$$Eu = (1/2) \cdot \lambda \cdot (L/D)$$

Wird hier gemäß (4-26)  $\lambda = f(Re; D/k_s)$  eingeführt, ergibt sich bei Rohren der Funktionszusammenhang:

$$Eu = F(Re; D/k_s; L/D) \quad (4-35g)$$

oder

$$f(Re; Eu; D/k_s; L/D) = 0 \quad (4-35h)$$

#### Zusammenhang zwischen Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung:

Die Verbindung zwischen Schubspannung  $\tau$  und Verlustenergie  $Y_V$  lässt sich mit Hilfe von Bild 4-7 finden. Es gilt:

$$\Delta p_{V,12} = p_1 - p_2 = \rho \cdot Y_{V,12} = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-36)$$

Das Gleichgewicht zwischen Widerstands- und Druckkräften der stationären Strömung, bezogen auf den Fluid-Zylinder mit Radius  $r$  und Länge  $L$ , führt zu:

$$\Sigma F = 0:$$

$$p_1 \cdot r^2 \cdot \pi - p_2 \cdot r^2 \cdot \pi - \tau \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L = 0$$

$$p_1 - p_2 = 2 \cdot \frac{L}{r} \cdot \tau \quad (4-37)$$

Beziehungen (4-36) und (4-37) gleichgesetzt und mit  $2R = D$  nach der Schubspannung  $\tau$  aufgelöst, ergibt:

$$\tau = \frac{\lambda}{4} \cdot \rho \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-38)$$

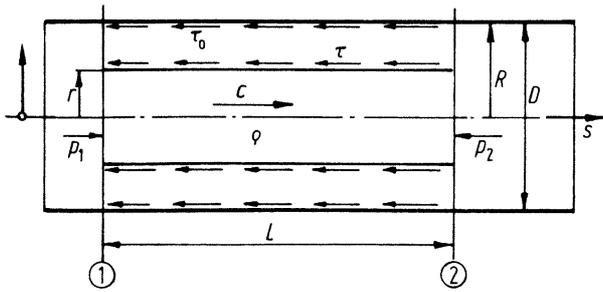


Bild 4-7. Schubspannung in turbulenter Rohrströmung.

Für  $r = R$  führt (4-38) zur **Wandschubspannung**  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{4} \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-39)$$

Unter Verwenden des Widerstandsgesetzes von BLASIUS, (4-28), lässt sich (4-39) näherungsweise weiter umschreiben:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2} = \rho \cdot \frac{0,0395}{\sqrt[4]{Re}} \cdot c^2 \\ &= 0,0395 \cdot \rho \cdot v^{1/4} \cdot D^{-1/4} \cdot c^{7/4} \end{aligned} \quad (4-40)$$

Mit der sog. **Schubspannungsgeschwindigkeit**

$$c_\tau = \sqrt{\frac{0,0395}{\sqrt[4]{Re}} \cdot c^2} \approx 0,2 \cdot Re^{-0,125} \cdot c \quad (4-41)$$

kann gesetzt werden:

$$\tau_0 = \rho \cdot c_\tau^2 \quad (4-42)$$

Weiter mit  $c_\tau^2 = c_\tau^{7/4} \cdot c_\tau^{1/4}$  folgt aus Gleichsetzen von (4-40) und (4-42):

$$0,0395 \cdot \rho \cdot v^{1/4} \cdot D^{-1/4} \cdot c^{7/4} = \rho \cdot c_\tau^{7/4} \cdot c_\tau^{1/4}$$

Hieraus: 
$$\left(\frac{c}{c_\tau}\right)^{7/4} = \frac{1}{0,0395} \cdot \left(\frac{c_\tau \cdot D}{v}\right)^{1/4}$$

$$\frac{c}{c_\tau} = 6,33 \left(\frac{c_\tau \cdot D}{v}\right)^{1/7} = 6,33 \cdot Re_\tau^{1/7} \quad (4-43)$$

Die Beziehung nach (4-43) wird verschiedentlich ebenfalls als **1/7-Potenzgesetz** der Geschwindigkeit bezeichnet, mit  $c$  als mittlerer Geschwindigkeit.

**Zusammenhang zwischen Verlustenergie  $Y_V$  und Rohrdurchmesser  $D$ :**

Um die volle Abhängigkeit der Verlustenergie vom Durchmesser klar darzustellen wird in der Formel von DARCY, (4-25), die Rohrreibungszahl einfachheitshalber aus dem Gesetz von BLASIUS (grobe Näherung) und die Strömungsgeschwindigkeit aus der Durchflussgleichung ersetzt.

Aus 
$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2}$$

mit 
$$c = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{D^2 \cdot \pi}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0,316}{Re^{0,25}} = 0,316 \cdot \frac{v^{0,25}}{c^{0,25} \cdot D^{0,25}} \\ &= 0,316 \cdot \frac{v^{0,25} \cdot \pi^{0,25}}{4^{0,25} \cdot \dot{V}^{0,25}} \cdot D^{0,25} \\ &= 0,3 \cdot \left(\frac{v}{\dot{V}}\right)^{0,25} \cdot D^{0,25} \end{aligned}$$

wird: 
$$\begin{aligned} Y_V &= 0,3 \cdot \left(\frac{v}{\dot{V}}\right)^{0,25} \\ &\cdot D^{0,25} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}}{D^2 \cdot \pi}\right)^2 \\ Y_V &= 0,24 \cdot v^{0,25} \cdot L \cdot \dot{V}^{1,75} \cdot \frac{1}{D^{4,75}} \end{aligned} \quad (4-44)$$

Hieraus grobe Näherungsformel:

$$Y_V \approx 0,2 \cdot v^{0,25} \cdot L \cdot \dot{V}^2 / D^5 \sim 1/D^5 \quad (4-45)$$

Damit lässt sich der Einfluss von *Rohrleitungsverkrümmungen* erfassen. Wird eine Rohrleitung gemäß Bild 4-8 mit konstantem Durchsatz betrieben, steigt, wenn das Rohr durch Ablagerungen langsam zuwächst, die Verlustenergie und damit der Druckverlust umgekehrt etwa mit der 5. Potenz des Durchmesserverhältnisses:

$$\Delta p_{V,2} / \Delta p_{V,1} = (D_1 / D_2)^5 \quad (4-46)$$

**Strömungsgeräusche:**

Für den Schallpegel  $L_{SL}$  (Tabelle 6-13) in geraden Rohren gilt erfahrungsgemäß:

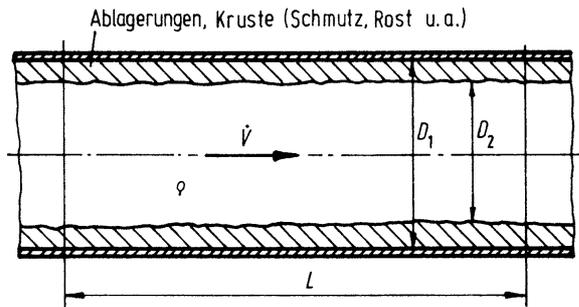


Bild 4-8. Rohrverkantung durch Ablagerungen.

$$L_{SL} = \left\{ 10 + 50 \cdot \lg(c/[m/s]) + 10 \cdot \lg(A/[m^2]) \right\} [dB] \quad (4-46a)$$

Das bedeutet, der Schallpegel  $L_{SL}$  steigt mit der 5. Potenz der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  [m/s] des Fluides im Rohr vom Querschnitt  $A$  [m<sup>2</sup>]:

$$L_{SL} = 1 + \lg c^5 + \lg A = \lg(10 \cdot A \cdot c^5) [B] \quad (4-46b)$$

In (4-46b) sind im Gegensatz zu Beziehung (4-46a) die in eckige Klammern gesetzten Dimensionsangaben weggelassen. Trotzdem müssen auch hier die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  in m/s und die Querschnittsfläche  $A$  in m<sup>2</sup> eingesetzt werden.

Bei Außenströmungen wächst der Schallpegel nach LIGHTHILL sogar meist ungefähr mit der 6. bis 7. Potenz der Strömungsgeschwindigkeit (Abschnitt 4.3.2.4).

#### 4.1.1.3.5 Anlaufstrecke, Ergänzungen

Anlaufstrecke:

Die in den vorhergehenden Abschnitten aufgestellten Gleichungen für Geschwindigkeitsprofile und Rohrreibungszahlen gelten nur für die vollständig ausgebildete Rohrströmung. Diese liegt vor, wenn sich bei einem Rohr von konstantem Querschnitt das Geschwindigkeitsprofil der Strömung längs der Achse nicht mehr ändert. Voll ausgebildete Strömung wird nach einer bestimmten Wegstrecke, der **Einlauf-** oder **Anlaufstrecke**, hinter der Rohreintritts- oder Störstelle erreicht. Hinweis auch auf Abschnitt 4.1.1.5.7, Beruhigungsstrecke.

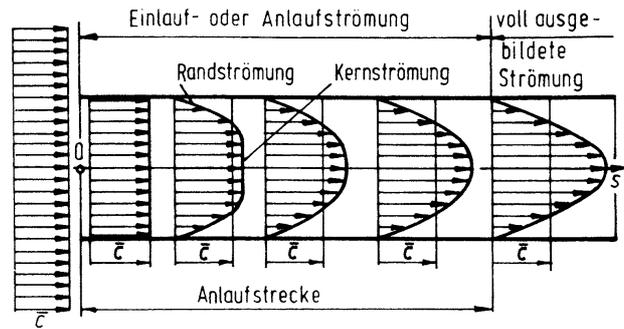


Bild 4-9. Anlaufströmung (hier laminar).

Bei gut ausgebildetem Rohreinlauf ist die Strömungsgeschwindigkeit über den ganzen Eintrittsquerschnitt nahezu konstant. Dadurch ist das Geschwindigkeitsgefälle an der Rohrwand wesentlich größer als bei der voll ausgebildeten Strömung. Die Folge ist erhöhte Reibungswirkung, die ihrerseits die Geschwindigkeitsverteilung beeinflusst. Stromabwärts verändert sich das Geschwindigkeitsprofil so lange, bis nach der Anlaufstrecke der Gleichgewichts- oder Beharrungszustand erreicht ist. Die Strömung kann deshalb in zwei aufeinanderfolgende Bereiche, die Einlaufströmung und die ausgebildete Strömung, unterteilt werden, Bild 4-9. Die Anlaufströmung verursacht erhöhten Energie- und damit Druckverlust, der maßgeblich von der Form des Einlaufs bestimmt wird.

Als *Anlauf-* oder *Einlaufstrecke* gilt die Strömungslänge, bis zu der das Geschwindigkeitsprofil weniger als etwa 1% vom endgültigen (stationären) Zustand abweicht.

**Laminare Anlaufstrecke:** Der Einlaufstrecke entlang muss die anfänglich gleichmäßige in parabolische Geschwindigkeitsverteilung umgebildet werden. Die Randströmung wird verzögert und die Kernströmung wegen der Kontinuitätsbedingung beschleunigt.

Nach SCHILLER gilt für die Länge  $L_1$  der laminaren Anlaufstrecke:

$$L_1/D = 0,03 \cdot Re \quad (4-47)$$

Übereinstimmend mit anderen Forschern dagegen bestätigt TIETJENS

$$L_1/D = 0,06 \cdot Re \quad (4-48)$$

Der große Unterschied (über 100%) zwischen den beiden Formeln gründet darin, dass die rein theoretische Ableitung von SCHILLER, (4-47), im Kern völlig reibungsfreie Strömung annimmt. Dies trifft auch am Ende der Anlaufstrecke nicht genügend genau zu. Die tatsächliche Größe der laminaren Anlaufstrecke wird deshalb durch (4-48) besser wiedergegeben.

**Turbulente Anlaufstrecke:** Das vollere Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Strömung wird auf geringerer Weglänge erreicht als bei laminarer Strömung. Die turbulente Anlaufstrecke ist daher durchweg kürzer.

Bei scharfkantigem Einlauf hängt die Anlaufstrecke kaum von der REYNOLDS-Zahl ab. Aufgrund von Messungen beträgt die turbulente Anlaufstrecke  $L_t$ , abhängig vom Rohrdurchmesser, nach:

$$\begin{array}{ll} \text{KIRSTEN} & L_t/D = 50 \text{ bis } 100 \\ \text{NIKURADSE} & L_t/D = 25 \text{ bis } 50 \end{array}$$

Infolge großer Abweichung dieser Beziehungen ist im Einzelfall versuchsmäßig zu prüfen, welche richtige Werte liefert. In praktischen Fällen genügt in der Regel  $L_t/D \approx 10$  bis 20. Danach ist der Ausgleich schon größtenteils erfolgt, weshalb die dann noch bestehende Abweichung meist vernachlässigt werden kann. Das Gleiche gilt für Beruhigungsstrecken (Abschnitt 4.1.1.5.7).

Bei abgerundetem Einlauf und hoher REYNOLDS-Zahl sind die Einlaufverhältnisse der Grenzschichtentwicklung an der parallel angeströmten Platte (Bild 3-20) sehr ähnlich. In diesem Fall kann für die turbulente Anlaufstrecke  $L_t$  der Rohrströmung gesetzt werden:

$$\frac{L_t}{D} = \frac{3 \cdot 10^5}{Re} \quad (4-49)$$

Nach Messungen bei einer Anlaufstrecke von etwa  $25 \cdot D$  wird die Rohrreibungszahl  $\lambda$  durch die Einlaufströmung um etwa 13% höher. Bei sehr kurzen Kanälen von etwa  $(3 \text{ bis } 6) \cdot D$ , wie sie z. B. in Strömungsmaschinen sehr häufig vorkommen, sind erhebliche Widerstandssteigerungen zu berücksichtigen. Eine Erhöhung

der Rohrreibungszahl  $\lambda$  bis etwa 50% gegenüber unbeeinflusster Rohrströmung muss bei kurzen Anlaufstrecken den Berechnungen zugrundegelegt werden.

Ergänzungen:

**Trägheitsablösung:** Bei drallbehafteten Rohrströmungen, d. h. Transportströmungen mit überlagerter Drehbewegung, sog. Korkenzieherströmungen, bildet sich nach Feststellungen von STRSCHLETZKY oft ein Kerntotgebiet, das an der Strömung nicht teilnimmt und unabhängig von Druckverteilung sowie Reibung ist. Diese Kernbildung wird als Trägheitsablösung bezeichnet, die dadurch bedingt ist, dass jede Strömung versucht, sich nach dem **Gesetz der kleinsten Wirkung** einzustellen. Als Wirkung wird das Produkt aus kinetischer Energie und Zeit bezeichnet, in der diese auftritt, oder, was dasselbe ist: Masse mal Geschwindigkeit mal Weg.

**Polymerbeimischung:** Der Widerstand bei turbulenter Rohrströmung kann durch gewisse Zusätze (Additive) in geringer Konzentration im ppm<sup>1</sup>-Bereich oft um die Hälfte reduziert werden. Hierfür sind Polymere geeignet, z. B. Polyethyloxide. Die langen Kettenmoleküle dieser Stoffe (Molekülanzahl in Größenordnung 10<sup>6</sup>) richten sich in Strömungsrichtung aus und vermindern dadurch den verlustreichen turbulenten Schwankungsaustausch. Die Viskosität dagegen ändert sich praktisch nicht. Auch bei Freistrahlen (Abschnitt 3.3.5) wird durch Additive bessere Strahlbündelung erreicht.

**Optimaler Rohrdurchmesser:** Der günstigste, d. h. wirtschaftliche und damit optimale Durchmesser eines Rohrsystems folgt aus einer Wirtschaftlichkeitsbetrachtung. Je größer der Rohrdurchmesser bei vorgegebenem Durchsatz  $\dot{V}$ , desto geringer ist die Strömungsgeschwindigkeit und damit der Druckverlust, also der Energieaufwand.

<sup>1)</sup> ppm ... parts per million, d. h. Teile je Million Teilen.

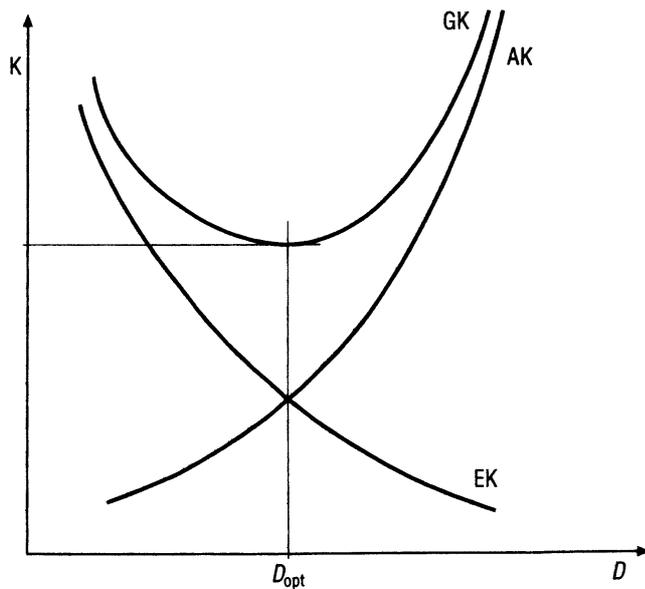


Bild 4-10. ANGLERSche Kurve. Darstellung eines Wirtschaftlichkeitsuntersuchungs-Ergebnisses.  $D$  Rohrdurchmesser,  $K$  Kosten,  $EK$  Energiekosten,  $AK$  Annuitätskosten (Amortisation + Zinsen) wegen Investitionsaufwendungen,  $GK$  Gesamtkosten  $\rightarrow GK = EK + AK$ .

Andererseits steigen die Investitionsaufwendungen mit wachsendem Durchmesser der Rohranlage. Der optimale Rohrdurchmesser  $D_{opt}$  liegt daher beim Minimum der Summe aus Annuitäts- und Energiekosten (Betriebskosten). Dargestellt wird dieser Zusammenhang durch die sog. ANGLER-Kurve (Bild 4-10). Dieses Prinzip gilt im Grundsatz für jedes technisch-wirtschaftliche Handeln.

#### 4.1.1.3.6 Analogie zwischen Rohrströmung und Elektrizitätsleitung

Wie folgende Gegenüberstellung zeigt, sind die Bewegung von Fluid in einem Rohr und die Bewegung von freien Elektronen in einer Elektrizitätsleitung weitgehend analog.

Fluid-Strom	Elektrizitäts-Strom
Druckverlust:	Spannungsverlust:
$\Delta p_V = \rho \cdot Y_V$	$\Delta U = R \cdot I$
$\Delta p_V = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2}$	$\Delta U = \rho_R \cdot \frac{L}{A} \cdot I$
Verlustenergie:	Stromwärme (oft Verlust!)
$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2}$	$P_V = \Delta U \cdot I = \rho_R \cdot \frac{L}{A} \cdot I^2$

Die durch die Beziehung ausgedrückte enge Verwandtschaft von Fluidströmung und Elektrizitätsleitung kann zur elektrischen Simulation von Fluidströmungsproblemen eingesetzt werden.

#### 4.1.1.3.7 Rohrleitungsberechnungen

Bei der Berechnung geradliniger technischer Rohrleitungsprobleme treten insgesamt sieben Größen auf:

- Mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $c$
- Rohrdurchmesser  $D$ , bzw. gleichwertiger Durchmesser  $D_{gl}$  (Abschnitt 4.1.1.4)
- Volumenstrom  $\dot{V}$
- Verlustenergie  $Y_V$
- Rauigkeit  $k$ , bzw. Sandrauigkeit  $k_s$
- Kinematische Viskosität  $\nu$
- Rohrlänge  $L$

Durch die Art des geförderten Fluides und das Rohrmaterial sind die Viskosität  $\nu$  und die äquivalente Sandrauigkeit  $k_s$  von vornherein angebar. Außerdem ist meist die Rohrlänge  $L$  durch örtliche Gegebenheiten festgelegt.

Zwischen den verbleibenden vier Größen bestehen:

- Durchflussgleichung  $\dot{V} = A \cdot c$
- Kontinuitätsgleichung  $A \cdot c = \text{konst}$
- Erweiterte Energiegleichung  $z \cdot g + (p/\rho) + (c^2/2) + Y_V = \text{konst}$
- Verlustenergie-Formel  $Y_V = \lambda \cdot (L/D) \cdot (c^2/2)$

Da die Rohrreibungszahl  $\lambda$  ebenfalls meist unbekannt, ist zur Berechnung der fehlenden Werte noch eine weitere Angabe notwendig. Die Rohrreibungszahl  $\lambda$  ist je nach Strömungsform und -gebiet mit einer der in den vorhergehenden Abschnitten 4.1.1.3.2 und 4.1.1.3.4 angegebenen Formeln zu berechnen, oder aus dem Diagramm, Bild 6-11, abzulesen. Hierzu müssen jedoch die REYNOLDS-Zahl  $Re = c \cdot D/\nu$  und die inverse relative Rauigkeit  $D/k_s$  bzw.  $D/k$  berechenbar sein. Dies ist nur möglich, wenn außer der Viskosität zwei der drei Größen  $\dot{V}$ ,  $c$  und  $D$  bekannt sind. In jedem anderen Fall wird zum sog. Schließen des Gleichungs-Systems (so

viele Gleichungen wie Unbekannte) nach einem der folgenden beiden Wege vorgegangen:

a)  $D/k_s$  bzw.  $D/k$  ist bekannt:

Aus dem MOODY-Diagramm Reibungswert  $\lambda = f(Re, D/k_s)$ , Bild 6-11, wird der zugehörige Grenzwert, d. h. Minimalwert für  $\lambda$  abgelesen und als 1. Näherung in die Berechnung eingesetzt.

b)  $D/k_s$  ist unbekannt:

Rohrreibungszahl  $\lambda$  wird geschätzt:

**Guter Richtwert:  $\lambda = 0,02 \dots 0,04 \dots 0,06$**

Mit dem geschätzten Richtwert wird die Rechnung in 1. Näherung durchgeführt.

Mit den in der ersten Näherungsrechnung ermittelten Werten wird dann eine neue (verbesserte) Rohrreibungszahl  $\lambda$  mit Hilfe von  $Re$  und  $D/k_s$  ermittelt und damit der Rechnungsgang in zweiter Näherung (Iteration) ausgeführt.

Das Rechenverfahren ist in gleicher Weise so lange zu wiederholen, bis die entsprechenden Ergebnisse der aufeinanderfolgenden Näherungsrechnungen nur noch praktisch zulässige Abweichungen aufweisen  $\rightarrow$  Iterationsablauf.

#### 4.1.1.3.8 Übungsbeispiele

**Ü 22** An ein zylindrisches Gefäß vom Durchmesser  $D = 60$  mm ist in einer Tiefe von  $H = 50$  mm unter der Spiegelfläche des Fluides ein waagrechtes Haarröhrchen mit  $d = 1$  mm Durchmesser und  $L = 100$  mm Länge angeschlossen. Die freie Fluid-Oberfläche wird durch einen Zulauf auf konstanter Höhe gehalten. Durch Messen wird festgestellt, dass innerhalb 20 min eine Flüssigkeitsmenge von  $150 \text{ cm}^3$  ausfließt. Welche kinematische Viskosität hat das Fluid?

**Ü 23** Das horizontal liegende Grundablassrohr einer Staumauer soll so bemessen werden, dass der Wasserstand bei der maximalen Zuflussmenge von  $5 \text{ m}^3/\text{s}$  nicht höher als 35 m über die Rohrachse ansteigt. Welche Länge muss das Graugussrohr (mäßig angestrotet) bei einem Durchmesser von 600 mm erhalten?

**Ü 24** Der waagrechte, in Glattstrich-Beton ausgeführte Druckstollen einer Turbinen-Anlage hat eine Länge von 800 m und einen Durchmesser von 2,4 m. Welcher Druckverlust tritt bei einem Durchsatz von  $36\,000 \text{ m}^3/\text{h}$  Wasser mit  $10^\circ\text{C}$  auf?

**Ü 25** Für ein geplantes Dampfkraftwerk werden vier große geschleuderte Betonleitungen zur Kondensator-Kühlwasser-Versorgung von je 800 mm Durchmesser und 600 m Länge benötigt.

Mit welchem Gefälle müssen die Leitungen verlegt werden, wenn stündlich  $15\,000 \text{ m}^3$  Wasser von  $30^\circ\text{C}$  druckfrei abgeführt werden sollen?

**Ü 26** Der Hochbehälter einer Wasserversorgungsleitung steht auf einer Anhöhe. Die freie Oberfläche des oben offenen Behälters befindet sich 25 m über der Ausflusstelle der von ihm abgehenden Hauptleitung. Das gerade Grauguss-Hauptrohr (gebraucht, mäßig angestrotet) ist 240 m lang und hat einen Durchmesser von 300 mm.

Welcher Wasserstrom fließt aus der Hauptleitung ins Freie, wenn die Höhe des Behälterspiegels als konstant gelten kann?

**Ü 27** Welcher Zusammenhang für  $c = f(t)$  in Übungsbeispiel Ü 21 ergibt sich beim Berücksichtigen der Reibung?

#### 4.1.1.4 Gerade Rohre mit beliebigem Querschnitt

##### 4.1.1.4.1 Gleichwertiger Durchmesser

Die bei Rundrohren gültigen Beziehungen für Verlustenergie, Rohrreibungszahlen und REYNOLDS-Zahl sind nicht ohne weiteres auf nichtkreisförmige Querschnitte anwendbar. Versuche zeigen, dass die Gleichungen umso bessere Ergebnisse bei praktisch vorkommenden, unrunder Querschnitten liefern, je mehr sie sich dem Kreis nähern und je höher die  $Re$ -Zahl ist.

Um die Kreisrohrformel jedoch möglichst allgemein anwenden zu können, wird für un-

runde Querschnitte ein solches **Ersatzrundrohr** gesucht, das strömungsmechanisch gleichwertig ist. Der sog. **gleichwertige Durchmesser**  $D_{gl}$  (Vergleichsdurchmesser) des Ersatzrundrohres ergibt sich aus der Bedingung gleichen Druckabfalles. Das äquivalente Ersatzrundrohr ist also so festzulegen, dass es bei gleicher Länge  $L$  und gleicher Strömungsverhältnisse den gleichen Druckverlust  $\Delta p_V$  aufweist wie das technisch eingesetzte Rohr beliebigen Querschnitts (sog. Unrundrohr). Demnach gilt die Bedingung:

$$\Delta p_{V,UR} = \Delta p_{V,ER} \quad \text{für} \quad L_{UR} = L_{ER} = L$$

Hierbei gilt für den Druckverlust:

– Unrundrohr (Index UR):

$$\Delta p_{V,UR} = \frac{F_{W,UR}}{A} = \frac{\tau_{UR} \cdot U \cdot L}{A}$$

– Ersatzrundrohr (Index ER) mit  $U_R = D_{gl} \cdot \pi$ :

$$\Delta p_{V,ER} = \frac{F_{W,ER}}{A_{ER}} = \frac{\tau_{ER} \cdot D_{gl} \cdot \pi \cdot L}{D_{gl}^2 \cdot \pi / 4} = \frac{4 \cdot \tau_{ER} \cdot L}{D_{gl}}$$

Gleichgesetzt ergibt sich unter der nicht immer ganz zutreffenden Näherungsannahme etwa gleicher Wandschubspannungen also bei  $\tau_{UR} \approx \tau_{ER}$ :

$$D_{gl} = \frac{4 \cdot A}{U} \quad (4-50)$$

Dabei sind entsprechend der Herleitung:

$A \dots$  Strömungsquerschnitt des nichtkreisförmigen Rohres (Unrundrohr).

$U \dots$  Benetzter Umfang des nichtkreisförmigen Rohres, d. h. die Umfangslänge, an der das Fluid die Berandung berührt.

**Beispiele für Vergleichsdurchmesser  $D_{gl}$ :**

a) Rechteckrohr, Bild 4-11a:

$$\left. \begin{array}{l} A = a \cdot b \\ U = 2(a + b) \end{array} \right\} D_{gl} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b}$$

b) Rechteck-Kanal, Bild 4-11b:

$$\left. \begin{array}{l} A = a \cdot b \\ U = a + 2b \end{array} \right\} D_{gl} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{a + 2b}$$

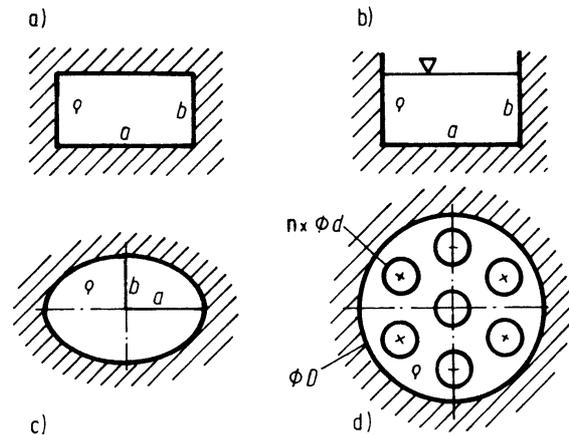


Bild 4-11. Verschiedene unrunde Querschnitte.

c) Ellipsen-Rohr, Bild 4-11c:

$$\left. \begin{array}{l} A = \pi \cdot a \cdot b \\ U = \pi(a + b) \end{array} \right\} D_{gl} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{a + b}$$

d) Wärmetauscher. Bestehend aus Außenrohr mit Innendurchmesser  $D$  und  $n$  Innenrohren mit Außendurchmesser  $d$ . Das Fluid strömt im freien Querschnitt zwischen Außenrohr und Innenrohren, Bild 4-11d:

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} - n \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \\ U = D \cdot \pi + n \cdot d \cdot \pi \end{array} \right\} D_{gl} = \frac{D^2 - n \cdot d^2}{D + n \cdot d}$$

Bei der *strömungstechnischen Berechnung* von Rohren und Kanälen *beliebigen Querschnitts* ist zu beachten:

1. In die Gleichungen für REYNOLDS-Zahl, Rohrreibungszahl  $\lambda$  und Verlustenergie  $Y_V$  ist der gleichwertige Durchmesser  $D_{gl}$  einzusetzen.  $D_{gl}$  tritt dabei an die Stelle von  $D$ .
2. Bei Durchfluss- und Kontinuitätsgleichung ist mit dem tatsächlichen Strömungsquerschnitt zu rechnen.
3. Der gleichwertige Durchmesser ist, wie Versuche bestätigen, bei kompressiblen Strömungen bis zu Geschwindigkeiten mit MACH-Zahlen  $Ma \leq 1$  (Unterschall) entsprechend verwendbar.
4. Experimente zeigen außerdem, dass die Rohrreibungszahl  $\lambda$ , insbesondere bei lami-

narer Strömung, außer von der REYNOLDS-Zahl  $Re_{gl}$  – Index gl hier meist weggelassen – auch von der Form des Strömungsquerschnittes abhängt (wegen verwendeter Näherung  $\tau_{UR} \approx \tau_{ER}$ ). Die für laminare und turbulente Strömungen gültigen Abweichungen enthalten die beiden folgenden Abschnitte.

5.  $Re_{kr} = 400 \dots 1200 \dots 2320$ ; Tab. 6-11.

#### 4.1.1.4.2 Laminare Strömung

Rohrreibungsziffer  $\lambda = (C/Re_{gl})$  (4-51)

Die **Einflussgröße**  $C$  ist für technisch wichtige Querschnittsformen bei laminarer Strömung; Bild 4-12:

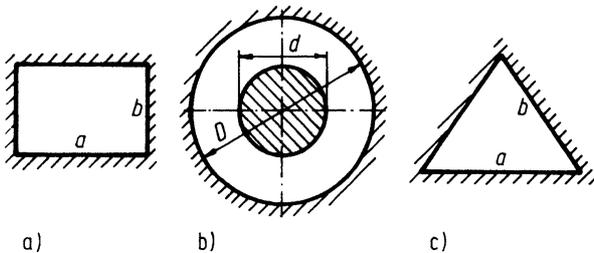


Bild 4-12. Wichtige unrunde Strömungsquerschnitte.

a) Rechteckquerschnitte (Bild 4-12a):

$b/a$	$\approx 0$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$C$	96	86	77	65	60	58	56

$b/a \approx 0$  entspricht dem ebenen Spalt

b) Kreisquerschnitte (Bild 4-12b):

$D/d$	$\approx 1$	3	5	10	50	100	$\rightarrow \infty$
$C$	96	95	93	90	82	80	64

$D/d \approx 1$  entspricht dem Kreisringspalt

$D/d \rightarrow \infty$  entspricht dem Kreisrohr

c) Dreiecksquerschnitte (Bild 4-12c):

Gleichschenlig-rechtwinkliges Dreieck  $C = 53$   
 Gleichseitiges Dreieck  $C = 57$

#### 4.1.1.4.3 Turbulente Strömung

Für die technisch wichtigeren turbulenten Strömungen in Unrundquerschnitten können, wie

Messungen bestätigen, die Widerstandsgesetze der Kreisrohre (Abschnitt 4.1.1.3) verwendet werden. Dabei ist wieder in den Gleichungen für die Rohrreibungszahl  $\lambda$  und  $Re$  der Durchmesser  $D$  des Rundrohres durch den gleichwertigen Durchmesser  $D_{gl}$  des beliebigen Querschnitts zu ersetzen. Im Einzelnen gilt:

#### Glatte Rohrwand:

Statt der Formel nach BLASIUS, (4-28), gibt NIKURADSE/SCHILLER für unrunde Querschnitte folgende Beziehung:

$$\lambda = \frac{0,2236}{\sqrt[4]{Re_{gl}}} \tag{4-52}$$

#### Raue Rohrwand:

$$\lambda = f(Re_{gl}, D_{gl}/k_s) \quad \text{mit} \quad Re_{gl} = \frac{D_{gl} \cdot c}{\nu}$$

Hierbei Rohrreibungszahl  $\lambda$  ohne Einschränkung nach Beziehungen von Abschnitt 4.1.1.3.3 und/oder MOODY-Diagramm, Bild 6-11.

#### 4.1.1.5 Rohreinbauten

##### 4.1.1.5.1 Grundsätzliches

Technische Rohrleitungen enthalten neben geraden Leitungsabschnitten Einbauteile verschiedenster Form und Art. Diese **Rohreinbauten** können, ihrer Form und Funktion entsprechend zusammengefasst, unterteilt werden:

- Formteile für Richtungsänderungen
- Formteile für Querschnittsänderungen
- Formteile für Durchflussänderungen
- Armaturen

In den Einbauten treten teilweise erhebliche Strömungsverluste auf. Die Verlustenergie wird durch erhöhte Reibung und Impulsaustausch (Querbewegung) infolge Um- und Ablenkung sowie Verwirbelung (Ablösungen) verursacht. Besonders hohe Energieverluste werden durch Strömungsablösung hervorgerufen. Dabei entstehen meist große, mit Wirbel durchsetzte Toträume. Hieraus folgt, dass die theoretische Ableitung der Strömungsverluste von Rohreinbauten fast immer wesentlich komplizierter ist als bei der turbulenten Rohrströmung (Abschnitt 4.1.1.3.3), für welche die allgemeine

Lösung ebenfalls noch aussteht. Nur in wenigen Sonderfällen ist es möglich, die Verlustenergie von Rohreinbauteilen analytisch herzuleiten. Fast immer muss auf Versuchswerte zurückgegriffen werden.

In Anlehnung an die Strömungsverluste bei geraden Rohrleitungen lässt sich experimentell bestätigen, dass die Verlustenergie von Einbauten ebenfalls von der REYNOLDS-Zahl, der Strömungsenergie und den geometrischen Abmessungen, einschließlich Rauigkeit, abhängt:

$$Y_V = f\left(Re, \frac{c^2}{2}, L, k_s\right) \quad (4-53)$$

Die Länge  $L$  steht dabei stellvertretend für geometrische Abmessungen.

Der Widerstandsformel nach DARCY, (4-25), entsprechend wird für die Verlustenergie von Rohreinbauten angesetzt, deshalb als **Ansatz** festgelegt:

**Widerstandsformel für Rohreinbauten:**

$$Y_V = \zeta \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-54)$$

Für die Strömungsgeschwindigkeit ist dabei immer die mittlere Geschwindigkeit einzusetzen, die am *Austritt* des Einbauteiles herrscht.

Gemäß Aufbau von (4-35d) lässt sich auch Formel (4-54) entsprechend umformen:

$$\Delta p_V = \rho \cdot Y_V = \rho \cdot \zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A}\right)^2$$

$$\Delta p_V = R \cdot \dot{V}^2 \quad \text{in [Pa]} \quad (4-54a)$$

$$\text{Mit Widerstand } R = \frac{\zeta \cdot \rho}{2 \cdot A^2} \left[ \frac{\text{kg/m}^3}{\text{m}^4} \right] \quad (4-54b)$$

$$\text{Volumenstrom } \dot{V} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Bei dem Näherungsansatz nach (4-54) sind alle Probleme in der sog. **Widerstandszahl**  $\zeta$  eingebunden. Die Widerstandszahl  $\zeta$  ist für jedes Einbauteil, bezogen auf die Austrittsgeschwindigkeit, experimentell zu bestimmen. Entsprechend (4-53) gilt:

$$\zeta = f(Re, L, k_s) \quad (4-55)$$

Bei praktischen Rohrleitungs-Problemen sind, wie bereits ausgeführt, die *Re*-Zahlen in der Regel wesentlich größer als die kritische *Re*-Zahl in den Einbauten (Tabelle 6-11) und somit turbulente Strömung vorhanden. Meist liegt sogar (hydraulisch) raues Verhalten vor. Die Widerstandszahl ist dann, analog zur Rohrreibungszahl, *nicht* mehr von der REYNOLDS-Zahl abhängig. Im Schrifttum werden deshalb größtenteils von der *Re*-Zahl unabhängige  $\zeta$ -Werte angegeben.

Die folgenden Unterabschnitte enthalten Widerstandsbeiwerte für die wichtigsten Rohreinbauten bei turbulenter Strömung. Diese Aufstellung muss aus Platzgründen unvollständig sein. Widerstandszahlen für andere Strömungsbereiche, z. B. Laminar- oder Übergangsbereiche, sind aus einschlägiger Literatur zu entnehmen oder beim Gerätehersteller zu erfragen. Ersatzweise können die Widerstandswerte aufgeführter, etwa vergleichbarer Einbauten verwendet werden. Die sich dabei ergebenden Näherungswerte sind dann umso besser, je geringer die Bauartabweichung ist.

*Hinweis:* Die Abweichungen der aus Messergebnissen folgender Widerstandswerte verschiedener Forscher an vergleichbaren Objekten begründen sich durch die unterschiedlichen Versuchsbedingungen. Diese sind bedingt durch Aufbau und Anordnung der Experimentierobjekte sowie die Randbedingungen, wie z. B. Vorturbulenz und Anfangswerte. Im Einzelfall sind gegebenenfalls Nachmessungen notwendig, wenn entsprechende Genauigkeit gefordert wird.

*Bemerkung:* Im Vergleich zwischen den beiden Ansätzen (4-25) und (4-54) könnte, wie erwähnt, für gerade Rohrleitungen die Widerstandszahl  $\zeta_R = \lambda \cdot L/D$  definiert werden.

**Rohrführungsarten:**

Die einzelnen Rohrleitungsteile können analog zur Elektrotechnik

hintereinander

$$U_{\text{ges}} = \Sigma U_l \quad \text{mit } l = 1 \dots n \rightarrow R_{\text{ges}} = \Sigma R_l$$

oder parallel

$$U_{ges} = U_L \quad \text{mit } L = I, II, \dots N \rightarrow I_{ges} = \Sigma I_L$$

geschaltet werden. Meist liegt jedoch eine Hintereinanderschaltung (H-Sch) von  $n_\lambda$  geraden Rohrabschnitten und  $n_\zeta$  Einbauteilen, also insgesamt  $n = n_\lambda + n_\zeta$  Teilen, vor. Der Gesamtenergieverlust  $Y_{V,ges}$  ist dabei die algebraische Summe der Einzelverlustenergien  $Y_{V,i}$  mit  $Y_{V,\lambda,j} = \lambda_j(L_j/D_j) \cdot c_j^2/2$  und  $Y_{V,\zeta,k} = \zeta_k \cdot c_k^2/2$ . Parallelschaltung (P-Sch) dagegen tritt seltener auf. Innerhalb der Parallelzweige sind dabei Hintereinanderschaltungen möglich und oft vorhanden. Für die beiden Rohranordnungen gilt daher:

H-Sch:

$$Y_{V,ges} = \sum_{i=1}^n Y_{V,i} = \sum_{j=1}^{n_\lambda} Y_{V,\lambda,j} + \sum_{k=1}^{n_\zeta} Y_{V,\zeta,k} \quad (4-56)$$

Oder nach Beziehungen (4-35d) und (4-54a):

$$\Delta p_{V,ges} = R_{ges} \cdot \dot{V}^2 \quad (4-56a)$$

$$\text{mit } R_{ges} = \sum_{i=1}^n R_i$$

P-Sch:

$$Y_{V,ges} = Y_{V,ges,I} = Y_{V,ges,II} = Y_{V,ges,III} = \dots \quad (4-57)$$

*I; II; III; ... L ... N*

parallelgeschaltete Zweige

In den einzelnen Zweigen  $Y_{V,ges,L}$  dabei jeweils entsprechend (4-56).

Oder entsprechend Beziehungen (4-35d), (4-35e) und (4-56a):

$$\Delta p_{V,ges} = R_{ges} \cdot \dot{V}^2 = R_i \cdot \dot{V}_i^2 = \Delta p_{V,i} \quad (4-57a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ges} &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta p_i / R_i} \\ &= \sqrt{\Delta p_{V,ges}} \cdot \sum_{i=1}^n (1/\sqrt{R_i}) \quad (4-57b) \end{aligned}$$

#### 4.1.1.5.2 Formteile für Richtungsänderungen (Krümmer)

**Einzelkrümmer:** Wie verwickelt die Strömungsvorgänge selbst in einem einfachen 90°-Krümmer sind, zeigt Bild 4-13.

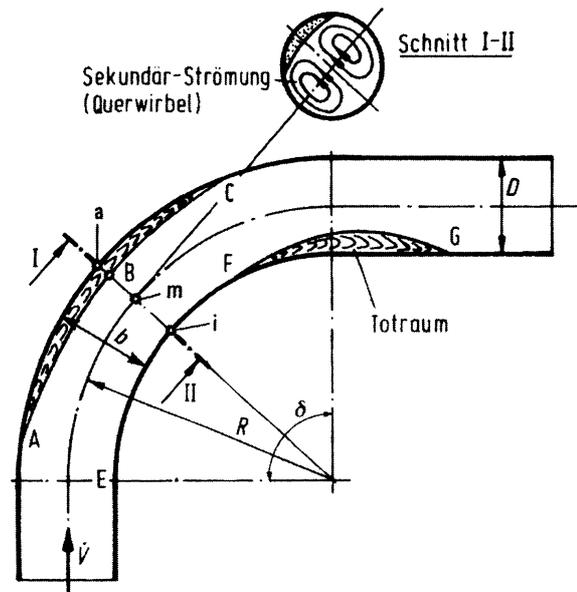


Bild 4-13. Strömung in einem Rohrkrümmer. Krümmungsradius  $R$ , Krümmungs- oder Umlenkwinkel  $\delta$  (Krümmerwinkel) und Krümmungsverhältnis  $R/D$ .

Die durch die Krümmung der Stromlinien auftretenden Fliehkräfte bedingen Druckänderungen im Krümmerquerschnitt (3-64). Wegen Energiekonstanz (Abschnitt 3.3.6.3.2) muss dort, wo der Druck ansteigt, die Geschwindigkeit abfallen. Bedingt durch die Richtungsänderung der Strömung treten also zwangsläufig gegensätzliche Druck- und Geschwindigkeits(-betrags)-Änderungen auf:

- Entlang der Krümmeraußenseite steigt der Druck infolge Stromlinienablenkung (Fliehkraft) ab der Einlaufstelle A an und erreicht bei der weiter innen liegenden Stelle B sein Maximum. Das Fluid strömt also im Bereich von A nach B gegen steigenden Druck bei sinkender Strömungsgeschwindigkeit. Die Folge ist das Anwachsen der Grenzschicht mit Ablösungsgefahr (Totraumbildung). Ab etwa Stelle C fällt der Druck zum Austritt hin wieder ab, wo keine Fliehkraft mehr wirkt.
- Entlang der Krümmerinnenseite dagegen fällt der Druck, vom Einlauf E beginnend, zunächst ab und steigt ab Stelle F wieder an auf den Abström- oder Gegendruck. Das Fluid strömt somit vom Punkt F an wieder

gegen steigenden Druck. Die Geschwindigkeit verhält sich, wie erwähnt, jeweils umgekehrt. Deshalb besteht im Bereich F–G neben starker Grenzschichtbildung ebenfalls die Gefahr der Strömungsablösung. Infolge größerer Krümmung (Radius kleiner!) ist das Totraumgebiet F–G meist größer als das von A–C.

- Der Hauptströmung in Krümmerrichtung überlagert sich eine Querbewegung in Form eines *Doppelwirbels*. Es ergibt sich dadurch eine Gesamtströmung mit doppel-schraubenförmig verlaufenden Stromlinien. Diese *Sekundärströmung* entsteht ebenfalls durch die Fliehkräfte, welche das Druckgefälle von innen nach außen quer zur Strömungsrichtung verursachen. Die Fliehkraft kommt in der radialen Zentrumsebene des Krümmers voll zur Auswirkung, während in den Randzonen des Krümmerquerschnittes die Wandreibungskräfte hemmend wirken (Geschwindigkeit kleiner). Deshalb strömt im *Querwirbel* das Fluid in der Querschnittsmitte nach außen und wegen der Verdrängungswirkung (Volumenerhaltung) und Druckgefälle in den Randbereichen wieder nach innen zurück → verstärkte Vermischung.

Am Rand ist wegen der geringeren Strömungsgeschwindigkeit (Bild 4-5) der Druck wegen entsprechend niedrigerer Fliehkraftwirkung kleiner als im Kern des Krümmersquerschnittes. Das begünstigt die Doppelwirbel-Bildung.

Die *Krümmerverluste* setzen sich deshalb zusammen aus den Verlusten durch Totraumbildung (Wirbel), Sekundär-Strömung und Wandreibung. Rechnerisch-analytische Erfassung daher nicht möglich, sondern nur experimentell

*Allgemein gilt:* Jede gekrümmte Strömung ist von einer verlustbringenden Sekundär-Querströmung überlagert, welche durch Fliehkräfte verursacht wird. Bei Versuchen ist die Abnahme der kritischen *Re*-Zahl mit verstärkter Krümmung auffallend (Tabelle 6-8). Dies erklärt sich aus dem Energieverzehr der durch die Zen-

trifugalkräfte verursachten Sekundärströmung (Querwirbel). Diese sind selbst bei Laminarströmung vorhanden. Dadurch wird auch die zur Turbulenzerzeugung verfügbare Energie gemindert.

Bei Krümmern mit großem Querschnitt werden, um die Fliehkraftwirkungen aufzufangen und die Umlenkung zu verbessern, gebogene Leitbleche, sog. **Umlenkschaufeln**, in den Krümmer eingebaut, Bild 4-14. Durch die verbesserte Führung der Strömung kann die Verlustenergie meist erheblich herabgesetzt werden. Voraussetzung ist allerdings richtige Formgebung der Umlenkschaufeln, die zweckmäßigerweise durch Versuche bestimmt wird.

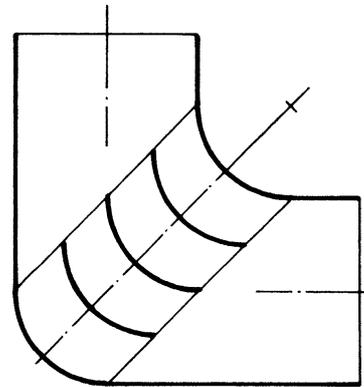


Bild 4-14. Umlenkschaufeln in einem großen, engen Krümmer zur Verminderung der Strömungsverluste, und zwar bis um den Faktor 5.

Über die Potenzialtheorie ergibt sich näherungsweise:

$$c_i - c_a \approx c_m(b/R); \quad c_i + c_a = 2 \cdot c_m$$

$$p = p_{\text{ges}} - \rho \cdot (c_m^2/2) \cdot (1 \pm b/R)$$

$$+ \quad \text{für Außenrand} \quad (a \rightarrow p_a)$$

$$- \quad \text{für Innenrand} \quad (i \rightarrow p_i)$$

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{Stat}} + \rho \cdot c^2/2, \quad \text{nach (3-87).}$$

Index a ... außen, m ... mitten, i ... innen im Krümmer.

A. HOFMAN führte umfangreiche Versuche an glatten und rauen 90°-Krümmern mit Kreisquerschnitt durch. Dabei zeigte sich, dass

die Widerstandszahl bei glatter Rohrwand mit wachsender  $Re$ -Zahl stärker abnimmt, während sie sich bei rauen Rohren sehr schnell einem etwa konstanten Wert nähert. Das Diagramm, Bild 4-15 gibt Anhaltswerte, die für praktische Rechnungen meist genügend genau sind. Weitere und genauere Werte enthalten Bild 6-12 bis Bild 6-27.

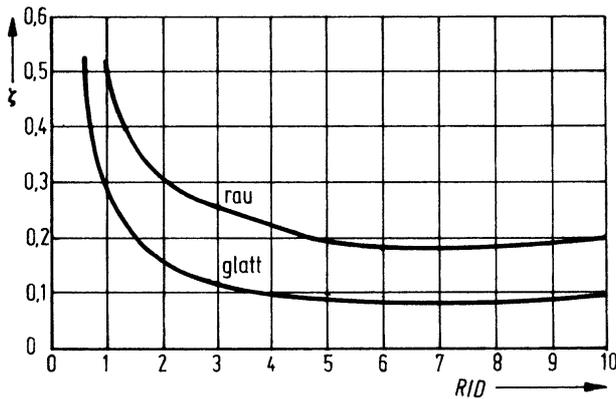


Bild 4-15. Widerstandsziffern  $\zeta$  von glatten und technisch rauen  $90^\circ$ -Kreisrohr-Krümmern ( $\delta = 90^\circ$ ; Bild 4-13) mit konstantem Querschnitt in Abhängigkeit vom mittleren Krümmungsverhältnis  $R/D$ . Praktisch übliche Krümmungsverhältnisse sind in der Regel  $R/D = 2$  bis  $4$ .

Die Kurven der Widerstandsziffern  $\zeta$  von Krümmern (Bild 4-15), die alle Reibungseinflüsse enthalten, zeigen ein deutliches Minimum bei Krümmungsverhältnissen von  $R/D = 6$  bis  $8$ . Begründung: Bei kleinen  $R/D$ -Werten überwiegen infolge der starken Krümmung (Radius  $R$  klein) die Sekundäreinflüsse (Querwirbel, Toträume). Bei großen Werten von  $R/D$  dagegen überwiegen Fluidreibung und turbulenter Impulsaustausch auf dem für die  $90^\circ$ -Umlenkung dann vorhandenen langen Strömungsweg. Beide sich überlagernden Einflüsse führen bei günstigen Verhältnissen des Krümmers zu dem Minimum der  $\zeta$ -Widerstandskurve. Da der Energievorteil ab Krümmungsverhältnissen von etwa  $2$  bis  $4$  nur noch gering ist, der Bauaufwand und Platzbedarf dagegen stark ansteigt, werden praktisch meist angewendet  $R/D \approx 2$  bis  $4$ .

Die  $\zeta$ -Werte enthalten, wie erwähnt, alle Verlustanteile, also durch Wirbel und auch die Reibung entlang der Krümmervandung.

Bei Messungen ist zu beachten, wenn die Krümmernströmung in die normale Parallelströmung des geraden Rohres zurückgebildet werden soll, dass eine gerade Rohrlänge von theoretisch etwa  $25$ - bis  $50$ -fachem Durchmesser  $D$  hinter dem Krümmer notwendig ist die sog. **Beruhigungsstrecke** (Abschnitt 4.1.1.5.7). Praktisch sind als Beruhigungsstrecke meist mindestens  $\approx 10 \cdot D$  ausreichend. Erst anschließend darf ein Messgerät eingebaut werden.

Bei Umlenkungen für Krümmer-Winkel zwischen  $\delta = 0 \dots 180^\circ$  kann der Widerstandsbeiwert berechnet werden zu:

$$\zeta = K \cdot \zeta_{90^\circ} \tag{4-58}$$

Dabei gilt für den Faktor  $K$ :

$$K \approx (\delta^\circ / 90^\circ)^{3/4} \tag{4-59}$$

Für verschiedene Krümmer-Winkel  $\delta^\circ$  errechnet sich (Hochsymbol  $^\circ$  für Grad):

$\delta^\circ$	30	45	60	75	90	120	135	150	180
$K$	0,44	0,59	0,74	0,87	1,0	1,24	1,36	1,47	1,68

Für **quadratische Krümmerquerschnitte** können die Widerstandsziffern von Kreisquerschnitten verwendet werden, oder nach Bild 4-17.

Bei **rechteckigen Krümmerquerschnitten** ist der  $\zeta$ -Wert von der Form des Querschnittes abhängig, d. h. vom Seitenverhältnis, Bild 6-27.

Bild 4-16 und Bild 4-17 zeigen die Verlustkoeffizienten  $\zeta$  für Krümmer nach NIPPERT<sup>1</sup>. Bild 4-16 gilt für **düsenförmige Krümmer**, deren Austrittsquerschnitt halb so groß ist wie der Eintrittsquerschnitt. Bild 4-17 gilt für rechteckige Krümmer mit gleichem Ein- und Austrittsquerschnitt.

<sup>1)</sup> NIPPERT: VDI-Forschungsheft Nr. 320.

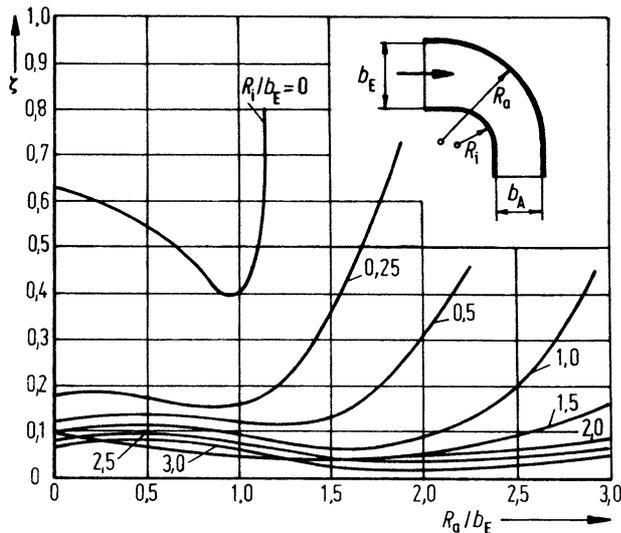


Bild 4-16. Widerstandsziffer  $\zeta$  rauer düsenförmiger 90°-Krümmer, deren Austrittsquerschnitt halb so groß ist wie der Eintrittsquerschnitt (nach NIPPERT).

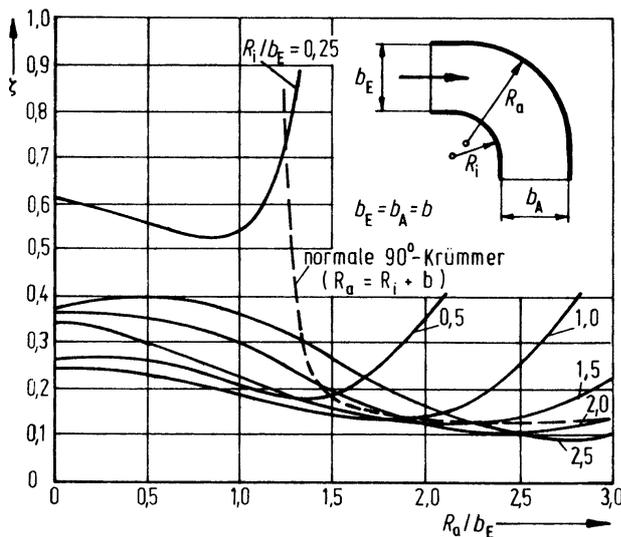


Bild 4-17. Widerstandsziffer  $\zeta$  rauer, rechteckquerschnittiger 90°-Krümmer mit gleichem quadratischen Ein- und Austrittsquerschnitt (nach NIPPERT).

Die Diagramme können auch für Krümmer mit nicht zu stark abweichenden Bauverhältnissen näherungsweise entsprechend angewendet werden.

Bei Beschleunigung (Bild 4-16) ist der kleinste  $\zeta$ -Wert mit nur  $\approx 0,03$  kaum größer als bei normalen Düsen. Bei konstanter Geschwindigkeit, d. h. Betrag davon (Bild 4-17), dagegen wird  $\zeta \approx 0,1$  nicht unterschritten. Wie die Kurven zeigen, gibt es wieder für jeden Innenra-

dius bzw. das Verhältnis  $R_i/b_E$  einen günstigen Außenradius, gekennzeichnet durch Quotient  $R_a/b_E$ . Das Optimum ist umso ausgeprägter, je kleiner der Innenradius. Dieser Zusammenhang ist bei praktischen Problemen zu beachten, wenn große Verluste vermieden werden sollen. Bild 4-17 enthält zudem die Werte „normaler“ Krümmer (strichpunktierte Linie). Die Kurve zeigt, dass diese Krümmer nicht die geringsten Verluste aufweisen.

Da das Verhältnis

$$R_a/b_E = R_a/b = R_a/(R_a - R_i) = 1/(1 - R_i/R_a)$$

mit kleiner werdendem  $R_a$  größer wird, liegt das Minimum des Verlustbeiwertes  $\zeta$  bei kleinerem Außenradius. Dies hat jedoch eine Vergrößerung des Krümmer-Scheitelquerschnittes zur Folge.

Hieraus folgt: Bei Krümmern mit gleichem Ein- und Austrittsquerschnitt ist eine gewisse Querschnittserweiterung im Scheitel vorteilhaft.

**Hintereinandergeschaltete Krümmer**, Bild 4-18: Einbauteile, die aus mehreren 90°-Krümmern aufgebaut sind, ergeben Gesamtwiderstände, die teilweise beträchtlich höher als die Summe der Einzelwiderstände liegen. Dies ist neben der Störung durch die zweite Nahtstelle (Flanschverbindung) vor allen dadurch bedingt, wie stark die nachfolgende Störung (Querwirbel) im zweiten Krümmer die vorhergehende des ersten Krümmers bei Überlagerung überproportional verstärkt.

Im Einzelnen gilt für die *Widerstandszahl*:

Doppelkrümmer, Bild 4-18a),

$$\zeta_{\text{ges}} \approx 1,0 \cdot \sum \zeta_{\text{einzel}} = 2 \cdot \zeta_{90^\circ} \quad (4-60)$$

Raumkrümmer, Bild 4-18b),

$$\zeta_{\text{ges}} \approx 1,5 \cdot \sum \zeta_{\text{einzel}} = 3 \cdot \zeta_{90^\circ} \quad (4-61)$$

Etagenkrümmer, Bild 4-18c),

$$\zeta_{\text{ges}} \approx 2,0 \cdot \sum \zeta_{\text{einzel}} = 4 \cdot \zeta_{90^\circ} \quad (4-62)$$

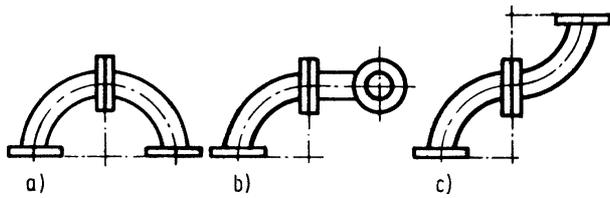


Bild 4-18. Krümmer-Kombinationen:  
 a) Doppelkrümmer ( $\delta = 180^\circ$ )  
 b) Raumkrümmer  
 c) Etagenkrümmer.

Der Unterschied der Ergebnisse von (4-60) gegenüber Beziehung (4-58) bei  $\delta = 180^\circ$  ist wahrscheinlich durch den Einfluss der Flansch-Verbindung mit Dichtung beim Doppelkrümmer (Bild 4-18, Teil a) bedingt. Hier sind oft Absätze oder andere Störstellen, z. B. vorstehende Dichtung, nicht zu vermeiden.

Widerstandszahlen weiterer Richtungsänderungen enthalten Bild 6-27 und Bild 6-34.

#### 4.1.1.5.3 Rohrein- und Rohrausläufe

Beim Eintritt eines Fluides von einem größeren Raum, z. B. von einem Behälter, in ein angeschlossenes Rohr, treten infolge starker Umlenkung der Fluidteilchen in der Regel Ablösungen an der Eintrittsstelle auf, die zur Wirbelbildung und Einschnürung der Strömung führen. Die Totraumbildung, die abhängig von der Form des Einlaufes ist, verursacht Verluste in zweifacher Hinsicht durch:

- Reibung infolge Sekundärströmung (Wirbel)
- Verstärkte Reibung der Hauptströmung infolge erhöhter Geschwindigkeit an der Einschnürstelle (Kontinuitätsbedingung).

Auch an Rohrausläufen treten durch Einschnüren wegen der laminaren Unterschicht Strömungsverluste auf, die jedoch schwer erfassbar und meist von geringer Bedeutung sind.

Für die verschiedenen Ein- und Ausläufe gilt gemäß Versuchen:

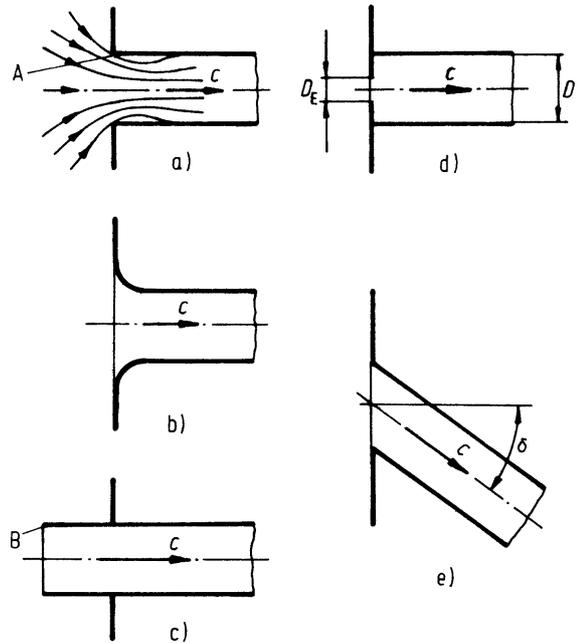


Bild 4-19. Rohreinläufe.

#### Rohreinläufe, Bild 4-19:

- a) Senkrechter Einlauf und nicht abgerundet, Bild 4-19a. Verweis hierbei auch auf Abschnitt 4.1.6.1.2:

Einlaufsstelle A scharfkantig:  $\zeta = 0,5$   
 Einlaufsstelle A gebrochen:  $\zeta = 0,25$

- b) Senkrechter Einlauf, abgerundet, Bild 4-19b:

Kleine glatte Abrundung:  $\zeta = 0,15$  bis  $0,2$   
 Große glatte Abrundung:  $\zeta = 0,005$  bis  $0,06$

- c) Senkrechter Einlauf hineinragend gemäß Bild 4-19c, einspringende oder **BORDA-Mündung**:

Einlaufsstelle B scharfkantig:  $\zeta = 3,0$   
 Einlaufsstelle B gebrochen:  $\zeta = 0,6$

- d) Senkrechter Einlauf mit Verengung nach Bild 4-19d:

$(D/D_E)^2$	1	1,25	2	5	100
$\zeta$	0,5	1,2	5,5	55	250

- e) Schiefwinkliger Einlauf und scharfkantig, Bild 4-19e:

$$\zeta = 0,5 + 0,3 \cdot \sin \delta + 0,2 \cdot \sin^2 \delta \quad (4-63)$$

Für verschiedene Neigungswinkel  $\delta$  errechnet sich nach (4-63):

$\delta^\circ$	0	15	30	45	60
$\zeta$	0,5	0,59	0,7	0,81	0,9

**Rohrausläufe**, Bild 4-20:

$$\zeta = (D/D_{\text{Str}})^2 - 1 \quad (4-64)$$

Strahldurchmesser  $D_{\text{Str}}$  nur experimentell bestimmbar. Meist jedoch  $D_{\text{Str}} \approx D$ , also  $\zeta \approx 0$ .

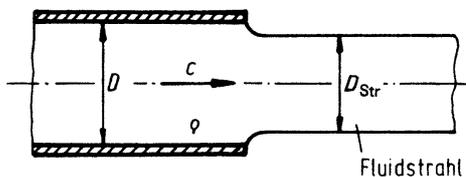


Bild 4-20. Rohrauslauf.

#### 4.1.1.5.4 Formteile für Querschnittsänderungen Erweiterungen

Erweiterungen sollen entsprechend der Energiegleichung hauptsächlich kinetische Strömungsenergie in Druck-, d. h. in potenzielle Energie umwandeln. Das Medium muss deshalb in Erweiterungen gegen steigenden Druck strömen, was vergrößerte Ablösegefahr bedeutet (Abschnitt 3.3.3).

**Unstetige Erweiterung**, Bild 4-21

Wollte ein strömendes Fluid einer sprunghaften Querschnittserweiterung folgen, müsste es plötzlich zwei scharfkantige  $90^\circ$ -Ecken umströmen, was unendlich große Beschleunigungen erforderte. Da dies nicht möglich ist (vgl. Abschnitt 3.3.4), erweitert sich die Strömung langsam und erreicht erst nach entsprechender Weglänge die Wand des größeren Rohres. Zwischen den Stellen der sprunghaftigen Erweiterung und dem Wiederanlegen des Strahles entsteht ein Totraum mit intensiver Wirbelbildung. Die Wirbel werden durch Vermischen mit dem sich erweiternden Strahl ständig neu angefacht. Die hierdurch entstehenden

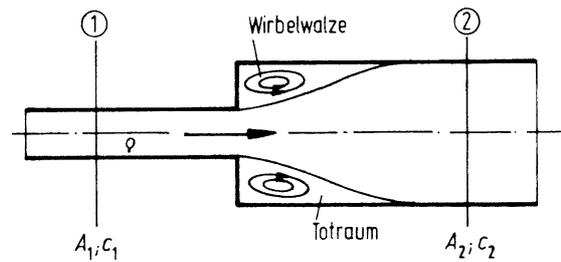


Bild 4-21. Unstetige Erweiterung (CARNOT-Öffnung).

Strömungsverluste sind umso höher, je größer die Querschnittserweiterung ist und stellen die Hauptverluste der un stetigen Querschnittserweiterung dar. Die Wandreibungsverluste sind hierzu vergleichsweise gering und deshalb hierbei meist vernachlässigbar.

Die un stetige Erweiterung, auch als **BORDA<sup>1</sup>-** oder **CARNOT<sup>2</sup>-Stoß** bezeichnet, stellt eine der Ausnahmen dar, bei der es möglich ist, den Strömungsverlust mit Hilfe von Impuls- und Energiesatz theoretisch herzuleiten. Diese Ableitung, die in Abschnitt 4.1.6.1.2 durchgeführt wird, ergibt für die Widerstandsziffer der plötzlichen Erweiterung:

$$\zeta = (m - 1)^2 \quad (4-65)$$

mit Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$  (Bild 4-21). Diese theoretisch ermittelte Beziehung wird auch als **BORDA-CARNOTSche Gleichung** bezeichnet und wurde experimentell gut bestätigt.

*Bemerkung:* Als CARNOTScher (Stoß-)Energieverlust wird der beim vollkommen unelastischen Stoß zweier Massen  $m_1$  und  $m_2$  eintretende Verlust an kinetischer Energie  $\Delta E = (m/2) \cdot (v_1^2 - v_2^2)$  bezeichnet. Hierbei sind allgemein  $v_1, v_2$  die Bewegungsgeschwindigkeiten der stoßenden Massen  $m_1, m_2$ , mit Äquivalenzmasse  $m = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$ .

**Stetige Erweiterung** (Diffusor), Bild 4-22

Bei richtiger Ausführung kann in **Diffusoren** die bei un stetiger Querschnittserweiterung stets auftretende Strömungsablösung vermieden wer-

<sup>1)</sup> BORDA, J.C. (1733 bis 1799).

<sup>2)</sup> CARNOT, S. (1797 bis 1832).

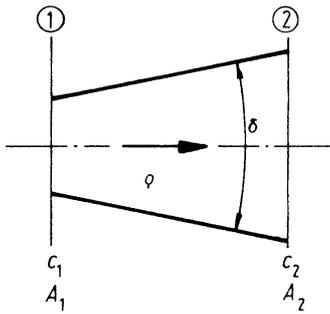


Bild 4-22. Stetige Erweiterung (Diffusor).

den. Der Strömungs- und damit der Druckverlust ist entsprechend geringer. Wird der Erweiterungswinkel  $\delta$  jedoch zu groß, löst sich die Strömung auch bei Diffusoren ab. Infolge des Geschwindigkeitsprofils (Bild 4-3 und Bild 4-5) reicht die in Wandnähe abfallende kinetische Energie  $c^2/2$  des Fluides nicht mehr aus, um gegen den steigenden Druck „anlaufen“, d. h. anströmen zu können. Die Strömung wird daher von der Wand abgedrängt (Bild 3-21), weshalb es zu einem Totraum mit Rückstrom-Wirbeln kommt. Entsprechend große Verluste sind die Folge. Bedingt durch die Schwerkraft liegt das Totraumgebiet bei waagrecht angeordneten Diffusoren meist am oberen Wandbereich. Andererseits wird der Diffusor sehr lang wenn bei kleinem Öffnungswinkel ein bestimmtes Erweiterungsverhältnis verwirklicht werden soll. Wegen des langen Strömungsweges steigen dann die Strömungsverluste infolge Reibung ebenfalls. Es gibt deshalb einen günstigen Öffnungswinkel, der bei  $\delta = 8 \dots 12^\circ$  liegt. Auf jeden Fall sollte  $\delta \leq 15^\circ$  sein. In diesem Bereich kann gesetzt werden [110]:

$$\zeta \approx \eta \cdot (m^2 - 1) \tag{4-66}$$

Hierbei: Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$  (4-66a)

Anpassungs-Faktor  $\eta = 0,15$   
bis 0,22

Widerstandszahlen  $\zeta$  für verschiedene Öffnungswinkel  $\delta$  und Öffnungsverhältnisse  $m$  sind aus Bild 4-23 oder Bild 6-37 zu entnehmen.

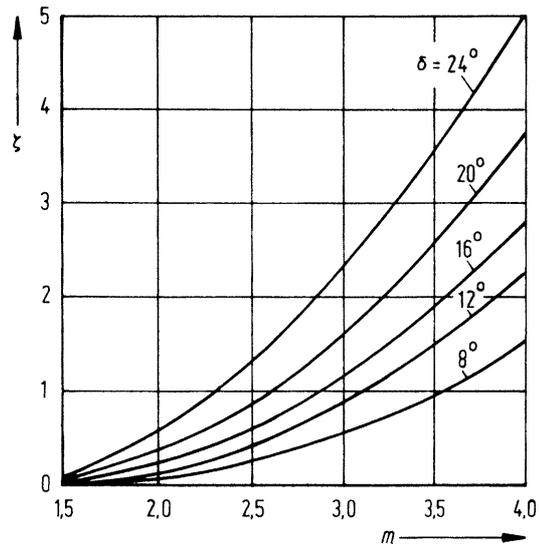


Bild 4-23. Widerstandszahlen  $\zeta$  einschließlich Wandreibung für stetige Querschnittserweiterungen (Diffusoren) in Abhängigkeit vom zugehörigen Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$  und dem Öffnungswinkel  $\delta$ .

**Vergleich von plötzlicher mit stetiger Erweiterung:**

Wird gleicher Druckverlust in sprungartiger Erweiterung (Bild 4-21) und Diffusor (Bild 4-22) zugelassen, ergibt das Gleichsetzen der beiden zugehörigen Beziehungen (4-65) und (4-66):

$$\begin{aligned} (m - 1)^2 &= \eta \cdot (m^2 - 1) \\ (m - 1) &= \eta \cdot (m + 1) \\ m(1 - \eta) &= (1 + \eta) \\ m &= \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \end{aligned} \tag{4-66b}$$

Mit  $\eta = 0,15$  bis  $0,2$  und  $m = A_2/A_1$  wird  $A_2/A_1 = 1,35$  bis  $1,5$ .

Das bedeutet: Bis Flächenverhältnisse  $m = A_2/A_1 \approx 1,5$  – Kreisquerschnitt entsprechend dem Durchmesser-Verhältnis ca.  $1,2$  – weisen plötzliche Erweiterungen geringeren Druckverlust auf, als stetige. Des Weiteren bestätigen Versuche, dass es bei starken Erweiterungen zweckmäßig ist, den Diffusor dort zu beenden, wo die Ablösung der Strömung einsetzt, um dann sprungartig auf den Endquerschnitt überzugehen. Bei einem derartigen Aufbau sind die Strömungsverluste geringer als bei vollständig stetiger Erweiterung. Deshalb werden auch

Kurzventuridüsen (Bild 4-31, Teil e) derartig ausgebildet.

### Verengungen

#### Unstetige Verengungen, Bild 4-24

Die plötzliche Querschnittsverengung kann als senkrechter, nicht abgerundeter Rohreinlauf angesehen werden, Bild 4-19a. Durch die analoge Strahleinschnürung zu Beginn des engeren Abflussrohrs treten entsprechende Strömungsverluste auf.

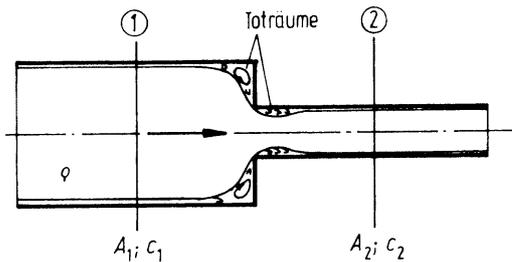


Bild 4-24. Unstetige Querschnittsverengung. Öffnungs-(Verengungs-)Verhältnis  $m = A_2/A_1$ .

Da bei Verengungen nach der Kontinuitäts- und Energiegleichung Druckenergie in kinetische umgewandelt, die Strömung also beschleunigt wird, ist das mit Wirbel durchsetzte Totraumgebiet bedeutend kleiner als bei entsprechenden Erweiterungen. Die Verluste bei unstetigen Querschnittsverengungen sind deshalb wesentlich geringer als bei plötzlichen Erweiterungen. Durch gute Abrundungen, die jedoch fertigungstechnisch oft schwer zu verwirklichen sind, kann hierbei der Strömungsverlust weiter stark herabgesetzt werden (Bild 4-19b).

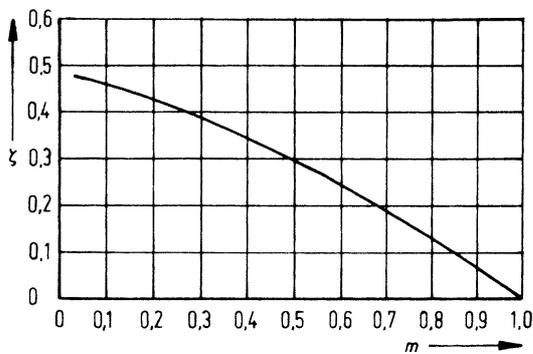


Bild 4-25. Widerstandszahlen  $\zeta$  von unstetigen Querschnittsverengungen als Funktion des Öffnungsverhältnisses  $m = A_2/A_1$  (Bild 4-24).

In Bild 4-25 sind die Widerstandszahlen unstetiger Querschnittsverengungen ohne Abrundungen, abhängig vom zugehörigen Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$  (Verengungsverhältnis), aufgetragen.

#### Stetige Verengung, Bild 4-26

Einbauten mit stetiger Querschnittsverminderung werden meist als **Düsen** oder **Konfusoren** bezeichnet. Bis auf eine Austrittseinschnürung entsprechend den Rohrausläufen (Bild 4-20) tritt bei Düsen keine Strahlablösung auf. Die Strahleinschnürung am Düsenaustritt wächst mit zunehmendem Verengungswinkel  $\delta$ , ist jedoch meist vernachlässigbar. Die Verlustenergie von Düsen daher insgesamt wesentlich kleiner als bei Diffusoren.

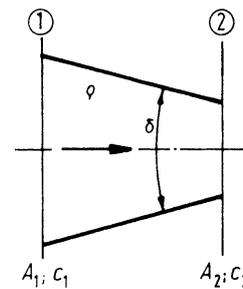


Bild 4-26. Stetige Querschnittsverminderung (Düse).

Allgemein gilt (Abschnitt 3.3.6.3.3):

Der Energieumsatz in *Düsen* (beschleunigte Strömung, „Druck in Geschwindigkeit“) erfolgt wesentlich einfacher und verlustärmer als in *Diffusoren* (verzögerte Strömung, „Geschwindigkeit in Druck“). Auch hier gilt wieder: Beschleunigte Strömungen können leichter ohne Ablösung und laminar gehalten werden als verzögerte.

Deshalb erreichen Turbinen, bei denen Düsenströmung vorliegt, bei gleich qualitativer Ausführung *immer* einen höheren Wirkungsgrad als Pumpen, bei denen Diffusorströmung notwendig ist.

Die Energiegleichung auf die Querschnitte ① und ② der idealen Strömung in einer waagrech-

ten stetigen Querschnittsänderung, Bild 4-26, angewendet, ergibt:

$$E \textcircled{1} - \textcircled{2}: \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} \quad \text{Hieraus}$$

$$2 \cdot ((p_1 - p_2)/\rho) = c_2^2 - c_1^2$$

Mit dem Druckgefälle  $\Delta p = p_1 - p_2$  wird

$$c_2^2 = c_1^2 + 2 \cdot \Delta p / \rho \quad (\text{PYTHAGORAS!})$$

Diese Gleichung ermöglicht die geometrische Konstruktion des Geschwindigkeitsprofils an der einen Bezugsstelle, wenn es am anderen Bezugsquerschnitt bekannt ist. Die Konstruktion in Bild 4-27 durchgeführt, gilt für beide Strömungsrichtungen. Die Veränderung des Geschwindigkeitsprofils zeigt: Durch Beschleunigung wird das Geschwindigkeitsprofil voller; durch Verzögerung spitzer (bewirkt Ablösungsgefahr!). Diese Erscheinung wurde von NIKURADSE auch für reale Fluide bestätigt.

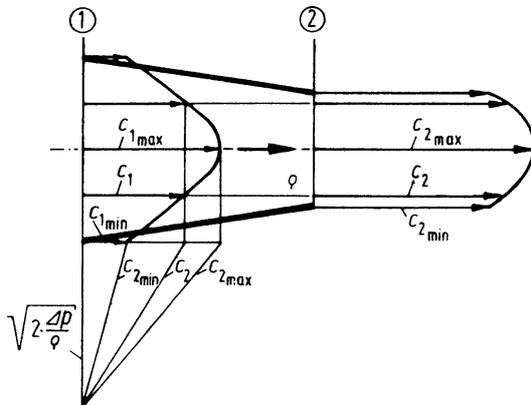


Bild 4-27. Graphische Ermittlung des Geschwindigkeitsprofils in einem Kanal mit Querschnittsänderung.

Für die Widerstandsziffer von Düsen wird gesetzt:

$$\zeta = \alpha \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) / 2 \quad (4-67)$$

Hierbei sind:

$\alpha$  ... Reibungsfaktor nach Bild 4-28

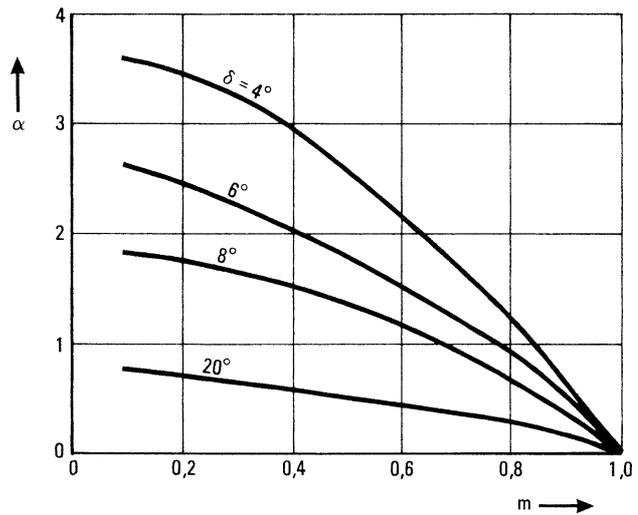


Bild 4-28. Düsen-Reibungsfaktor  $\alpha$  als Funktion von dem Öffnungsverhältnis (Verengungsverhältnis)  $m = A_2/A_1$  und vom Öffnungswinkel (Verengungswinkel)  $\delta$ , Bild 4-26.

- $\lambda_1$  ... Rohrreibungszahl vom Zuflussrohr mit Querschnitt  $A_1$
- $\lambda_2$  ... Rohrreibungszahl vom Abflussrohr mit Fläche  $A_2$  (gedachtes und tatsächlich vorhandenes)

Faktor  $\alpha$  (experimentell bestimmt) berücksichtigt die erhöhte Reibung infolge der stetigen Verengung und die Ablösungsgefahr durch Einschnürung am Düsenaustritt.

Bei Winkel  $\delta \approx 20$  bis  $30^\circ$  erreichen gute Düsen

$$\zeta = 0,01 \text{ bis } 0,02$$

Auch Bild 6-36 enthält  $\zeta$ -Werte von Düsen.

#### 4.1.1.5.5 Formteile für Durchflussänderungen

Formteile für Durchflussänderungen sind Rohreinbauten, die je nach Strömungsrichtung Volumenströme aufteilen oder zusammenfassen.

Bei Verzweigung einer Strömung oder Vereinigen von Teilströmen treten durch Umlenken und Ablösen an der Verzweigungs- bzw. Vereinigungsstelle meist erhebliche Verluste auf. Der dadurch entstehende Druckabfall hängt weitgehend von der geometrischen Gestaltung und der Rauigkeit der **Rohrverzweigungen** ab sowie

(wegen des Vermischungs- bzw. Trennungsvorgangs) von den Mengenstromverhältnissen der Teilströme.

In einem der beiden Abzweigströme kann jedoch unter bestimmten Bedingungen sogar ein Druckgewinn stattfinden. Er tritt auf, wenn der Fluidruck des anderen Stromes infolge Strömungseinschnürung absinkt und dadurch eine Injektorwirkung hervorruft (Abschnitt 3.3.6.3.3) oder Impulswirkungen auftreten. Das drückt sich wegen der Verlustenergie-Definition gemäß (4-54) in einer negativen Widerstandszahl  $\zeta$  für den Strömungsweg aus, auf den diese Effekte wirken (Bilder 6-31 und 6-32).

Die Verlustenergie wird gemäß Festlegung auf die Geschwindigkeit des Gesamtstromes bezogen (entsprechend ist  $\zeta$  ermittelt).

Widerstandszahlen von Formteilen für Durchflussänderungen enthalten Bild 6-30 bis Bild 6-34.

#### 4.1.1.5.6 Armaturen

**Absperr- und Regelorgane:** In Rohrleitungen werden Absperr- und Regelorgane, Bild 4-29, unterschiedlichster Ausführung eingesetzt, um den Volumenstrom zu ändern, und zwar durch Querschnitt und Druckverlust. In solchen Geräten unterliegt die Strömung mehr oder weniger großen Querschnitts- und Richtungsänderungen. Entsprechende Reibungs- und Wirbelverluste sind die Folge.

Die Verlustenergie und damit der Druckverlust werden auch nach (4-54) berechnet. Die zugehörigen Widerstandsbeiwerte sind ebenfalls experimentell ermittelt und daher aus entsprechenden Tabellen bzw. Diagrammen zu entnehmen oder beim Gerätehersteller zu erfragen. Die im Schrifttum (Abschnitt 8) angegebenen Werte, die immer nur für den vollgeöffneten Zustand gelten (im geschlossenen wäre  $\zeta \rightarrow \infty$ ), weichen teilweise erheblich voneinander ab. In der Regel sind die Widerstandszahlen ebenfalls auf die mittlere Austrittsgeschwindigkeit  $c$  aus der jeweiligen Armatur bezogen. Diese ist deshalb in die Verlustenergie-Formel, (4-54), einzusetzen. Für die wichtigsten grundsätzlichen Bauformen gilt:

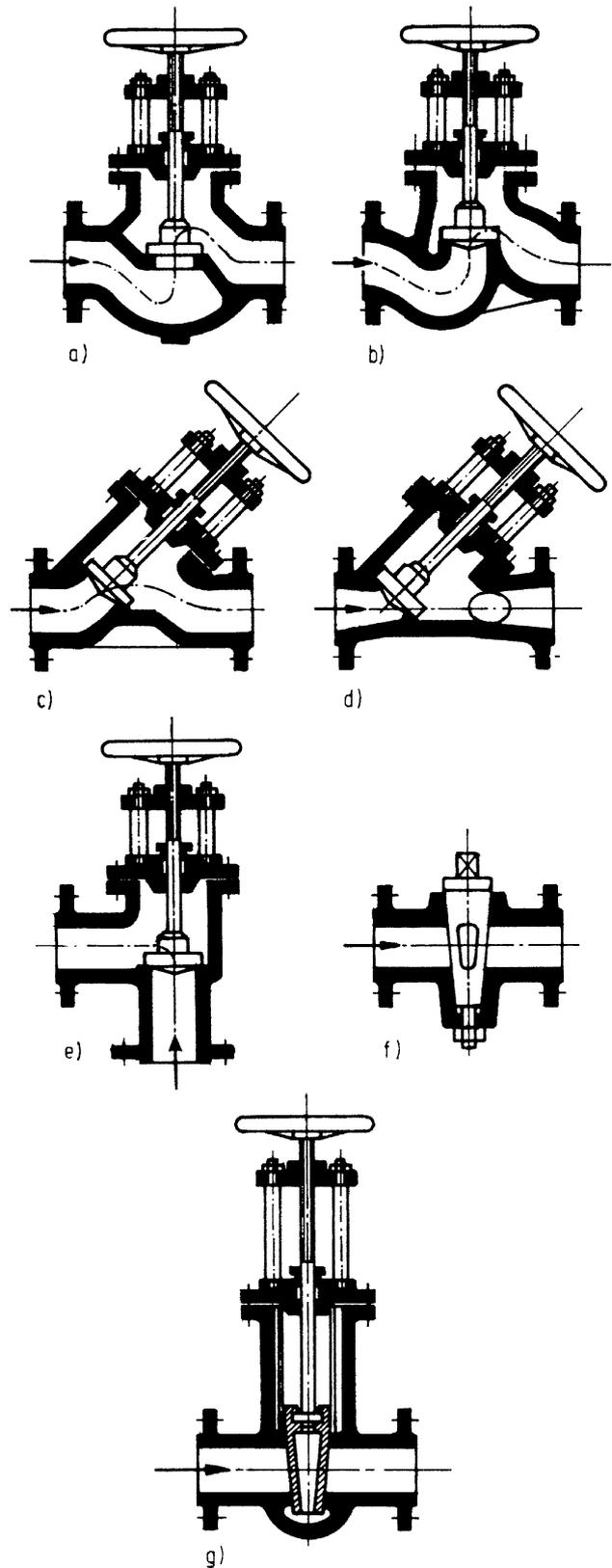


Bild 4-29. Absperr- und Regelorgane:  
a) Durchgangs- oder DIN-Ventil, b) Rhei-Ventil,  
c) Koswa-Ventil, d) Patent-Ventil, e) Eck-Ventil,  
f) Hahn mit Kegelkükken, g) Schieber mit Keilschließplatte.

**1. Ventile**, Bild 4-29a bis 4-29e. Verwendet für alle technischen Drücke und Temperaturen bis etwa NW 300. Als Verschlussstück dient eine tellerförmige Platte, ein Kegel oder eine Kugel.

Beim Öffnen wird das Verschlussstück in Achs-Richtung vom Ventilsitz abgehoben. Im Gegensatz zu Schieber und Hahn darf das Ventil nur in der konstruktiv vorgesehenen Richtung, immer durch Pfeil gekennzeichnet, durchströmt werden. Meist ist die Schließrichtung entgegengesetzt zur Durchströmrichtung im Dichtquerschnitt. Bei Ventilen muss deshalb das Verschlussstück gegen den vollen Strömungsdruck schließen. Um die hohen Stellkräfte zu vermeiden, werden manchmal sog. Doppelsitzventile eingesetzt, z. B. bei Dampfturbinen, die jedoch wesentlich höhere Druckverluste verursachen.

Im Ventil besteht dann keine Querschnittsverengung mehr, wenn der Öffnungsweg der Ventilplatte  $s = D/4$  mit  $D$  dem lichten Strömungsdurchmesser am Ventilplattensitz entspricht. Eine stärkere Öffnung bringt keinen Durchsatz-Vorteil, sondern meist nur höhere Verluste (CARNOT-Stoß, Abschnitt 4.1.1.5.4).

Von allen Absperr- und Regelorganen erfährt das Medium in Ventilen die größten Querschnitts- und Richtungsänderungen, also auch den höchsten Strömungsverlust. Zur Verminderung der Druckverluste wurden mehrere Ventil-Sonderformen (Bild 4-29b bis 4-29d) entwickelt.

**2. Hähne**, Bild 4-29f. Mit Kegelküken meist für kleine Nennweiten und niedrige Drücke eingesetzt. Hähne werden in Sonderausführung jedoch auch bei größten Nennweiten und Drücken verwendet, z. B. Kugelhähne (bis ungefähr NW 10 000). Der volle Strömungsquerschnitt wird durch geringes Drehen des Hahn-Kükens (meist  $90^\circ$ ) vollständig freigegeben oder abgesperrt.

Nach Durchströmrichtung sind zu unterscheiden: Durchgangshähne, Winkelhähne und Schalthähne (Dreiwegehähne).

Nach Ausführung des Kükens wird unterschieden: Einfache Hähne mit Kegelküken und Kugelhähne mit Kugelküken.

**3. Schieber**, Bild 4-29g. Eingesetzt bei größeren und größten Nennweiten sowie für alle Drücke. Als Verschlussstück dient eine planparallele oder keilförmige Platte, die quer zur Strömungsrichtung in den Leitungsquerschnitt eingeschoben wird. Das strömende Fluid wird in geöffneten Schiebern nicht umgelenkt und nur bei Hochdruckschiebern durch geringe Querschnittsänderung eingeschnürt. Die Widerstandszahlen von *Zylinderschiebern* (Parallelschließplatte) sind deshalb klein, die von *Hochdruckschiebern* (Keilschließplatte) etwas größer. Durch Einbauen eines *Leitrohres* (bei paralleler Schließplatte möglich), das bei geöffnetem Schieber den Schließplattenspalt überbrückt, können die Strömungsverluste weiter herabgesetzt werden. Der Bauaufwand ist jedoch entsprechend größer.

Die Widerstandszahlen für Hähne, verschiedene Ventiltypen und Schieber, die, wenn nicht anders angegeben, immer auf den *voll geöffneten* Zustand und auf die Austrittsgeschwindigkeit bezogen sind, enthält Bild 4-30. Die  $\zeta$ -Werte gelten für normale technische Ausführungen gemäß Bild 4-29.

**Strömungsbildung beim Öffnen eines Absperrorgans:** Wenn z. B. ein Kessel über eine Rohrleitung entleert werden soll, wobei der Kesseldruck nur allmählich absinkt, stellt sich beim Öffnen des Absperrorgans nicht sofort ein stationärer, genauer quasistationärer, Zustand ein. Hin- und herlaufende Verdichtungs- und Verdünnungswellen schaffen erst den Beharrungszustand. Der Ausgleich, d. h. der Übergang in den stationären Ausflusszustand erfolgt etwa innerhalb der Zeit, in der die Wellen das Ausströmrohr fünf bis sechs Mal durchlaufen haben (Druckstoß). Entsprechende Vorgänge treten in Rohrsystemen beim plötzlichen Schließen eingebauter Absperrorgane auf. Hinweis auf Abschnitt 3.3.6.3.1 und [91].

**$k_V$ -Wert:** Bei Stellgliedern (Armaturen) wird nach Richtlinie VDI/VDE 2173 auch der sog.  $k_V$ -Wert verwendet. Dieser gibt den Durchfluss in  $\text{m}^3/\text{s}$  bzw.  $\text{m}^3/\text{h}$  von Wasser bei 5 bis  $30^\circ\text{C}$

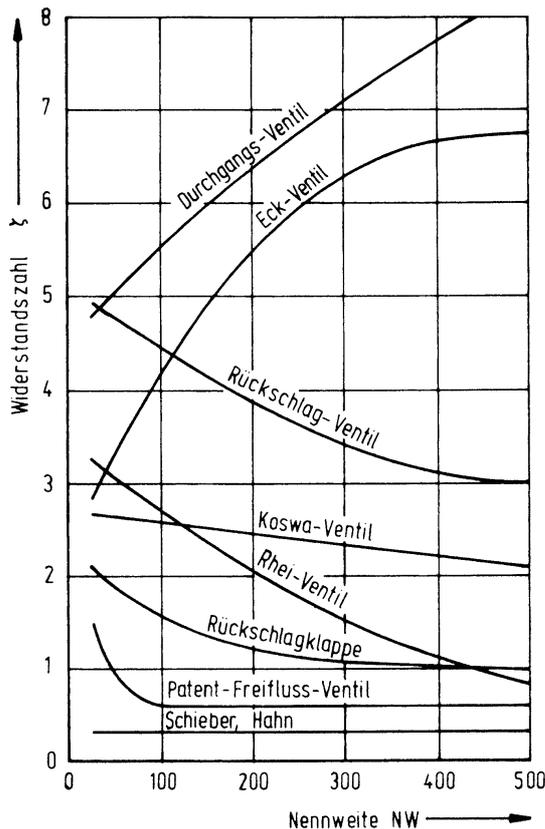


Bild 4-30. Widerstandszahl  $\zeta$  üblicher, d. h. rauer Absperr- und Regelorgane in Abhängigkeit von der Nennweite NW in mm bei voll geöffnetem Zustand. Statt der Nennweite wird oft auch der Begriff Nenn-durchmesser DN verwendet.

an, der beim Druckverlust von 1 bar durch das Stellglied beim jeweiligen Stellhub hindurchfließt. Der  $k_V$ -Wert ist somit ein auf die genannten Bedingungen bezogener Durchfluss, der nur experimentell bestimmt werden kann, da Widerstandsziffer  $\zeta$  querschnittsabhängig, das bedeutet, hubabhängig.

$$\text{Aus } \Delta p_V = \rho \cdot Y_V = \rho \cdot \zeta \cdot c^2 / 2$$

$$\text{mit } c = \dot{V} / A \quad \text{wird:}$$

$$\Delta p_V = \rho \cdot \zeta \cdot (1/2) \cdot \dot{V}^2 / A^2 \quad \text{Hieraus:}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sqrt{2 \cdot A^2 \cdot \Delta p_V / (\rho \cdot \zeta)} \\ &= A \cdot \sqrt{2/\zeta} \cdot \sqrt{\Delta p_V / \rho} \end{aligned}$$

Gemäß  $k_V$  – Definition:  $k_V = \dot{V}$  in  $\text{m}^3/\text{s}$  bei  $\Delta p_V = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  und  $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ :

$$k_V = A \cdot \sqrt{2/\zeta} \cdot \sqrt{10^5 / 10^3} \left[ \text{m}^2 \cdot \sqrt{(\text{N/m}^2)/(\text{kg/m}^3)} \right]$$

$$k_V = A \cdot \sqrt{200/\zeta} \text{ [m}^3/\text{s]} \quad (4-68)$$

bei  $A [\text{m}^2]$  ... Stellglied-Durchtritts-querschnitt an Drosselstelle

**Saugkörbe:** Zum Schutz und besseren Ansaugverhalten von Pumpen werden deren Saugleitungen an der Eintrittsstelle meist mit einem Saugkorb einschließlich *Fußventil* ausgerüstet. Übliche technische Ausführungen dieser Geräte aus Sieb plus Ventil haben **Widerstandszahlen  $\zeta$  zwischen 2 und 4**, Tabelle 4-2.

Die Widerstandsbeiwerte sonstiger Siebe, Bild 6-22, und Filter können aus Platzgründen nicht aufgenommen werden. Es wird auf das einschlägige Schrifttum und Herstellerangaben verwiesen.

Tabelle 4-2. Widerstandsziffern  $\zeta$  von Saugkörben mit Fußventil.

Strömungs-geschw.	NW 50 bis 80	NW 100 bis 500
$c < 2 \text{ m/s}$	$\zeta = 4$	$\zeta = 3$
$c \geq 2 \text{ m/s}$	$\zeta = 3$	$\zeta = 2$

**Drosselgeräte (Messorgane):** Wie in Abschnitt 3.3.6.3.3 beschrieben, werden zur Messung des Durchsatzes (Mengenstrom) durch Rohrleitungen vielfach sog. Drosselgeräte, Bild 4-31, eingesetzt. Diese Messorgane sind in DIN 1952 genormt. Neben dem von den Geräten als Messwert erzeugten sog. *Wirkdruck*  $\Delta p_{Wi}$ , verursachen sie einen Energieverlust durch verstärkte Reibung und Ablösungswirbel. Diese Verlustenergie drückt sich wieder in einem bleibenden Druckverlust  $\Delta p_V$  aus. Die zugehörige Widerstandsziffer nach DIN 1952 enthält Bild 6-21 (Anhang).

Um die Messwerte (Wirkdruck  $\Delta p_{Wi}$ ) nicht zu beeinflussen, d. h. zu verfälschen, sind vor und hinter dem Messorgan zur Strömungsberuhigung gerade, möglichst glatte Rohrstücke

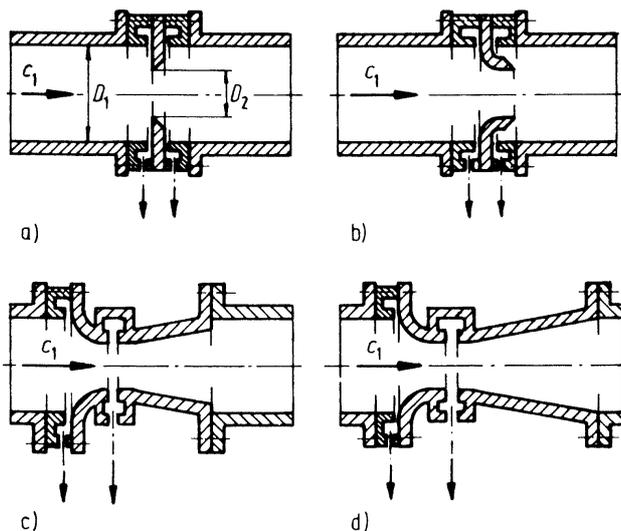


Bild 4-31. Drosselgeräte nach DIN 1952:  
 a) Norm-Blende, b) Norm-Düse, c) Norm-Venturi-Düse kurz, d) Norm-Venturi-Düse lang.  
 ↓ Druckmessstellen. Indexstelle 1 Zuströmung.

der Länge entsprechend  $L/D \geq (10 \text{ bis } 20)$  anzuordnen (Abschnitt 4.1.1.5.7).

**Allgemein gilt:** Die Blende, das Drosselgerät mit dem größten Messeffekt (Wirkdruck), verursacht auch den größten Druckverlust. Die wesentlich teurere Venturidüse hat eine erheblich geringere Verlustenergie, ergibt dafür aber auch einen niedrigeren Wirkdruck. Aus Bild 4-32 ergibt sich der auf den Wirkdruck bezogene Druckverlust für die verschiedenen Drosselgeräte, abhängig vom Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$ , nicht verwechseln mit Masse  $m$ .

In Anlehnung an (3-91) gilt bei realen Fluiden für den durchfließenden Massenstrom  $\dot{m}$ :

$$\dot{m} = \dot{V}_1 \cdot \rho_1 = \alpha \cdot \varepsilon \cdot A_1 \cdot m \cdot \sqrt{2 \cdot \rho_1 \cdot \Delta p_{Wi}} \quad (4-69)$$

Dabei sind:

- $\alpha$  ... Durchflussziffer
- $\varepsilon$  ... Expansionszahl
- $A_1$  ... Querschnittsfläche des Zuströmrohres
- $m$  ... Öffnungsverhältnis zwischen Drossel-, d. h. engstem Querschnitt  $A_2$  und Zuströmquerschnitt  $A_1$  (Messstellen), also  $m = A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2$

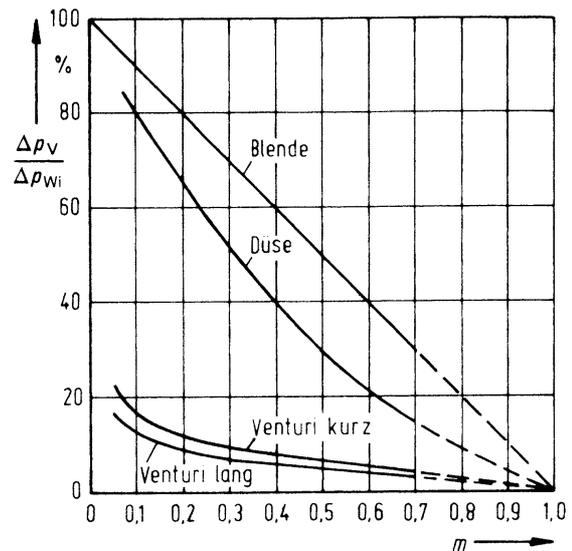


Bild 4-32. Prozentualer Druckverlust der Norm-Drosselgeräte.  $\Delta p_V$  Druckverlust,  $\Delta p_{Wi}$  Wirkdruck.

$\rho_1$  ... Fluiddichte im Zuströmrohr  
 $\Delta p_{Wi}$  ... Wirkdruck, Differenz der Drücke zwischen den Messbohrungen (Vertikalpfeile in Bild 4-31) des Drosselgerätes. Index Wi wird oft weggelassen.

Die **Durchflusszahl  $\alpha$**  berücksichtigt den Unterschied zwischen realer und idealer Strömung sowie die Abweichung infolge der tatsächlichen statt theoretischen Anordnung der Messstellen für den Wirkdruck am Drosselgerät. Gemäß Bild 6-39 wird die Durchflusszahl  $\alpha$  meist dargestellt als Funktion der REYNOLDS-Zahl  $Re \equiv Re_1 = c_1 \cdot D_1 / \nu_1$  der Zuströmung (Stelle 1 in Bild 4-31) als Abszisse und dem Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$  als Parameter.

Die **Expansionszahl  $\varepsilon$**  berücksichtigt den Einfluss der Expansion kompressibler Medien infolge des Druckabfalles im Drosselgerät. Bei inkompressiblen Fluiden (Flüssigkeiten) ist  $\varepsilon = 1$ . Die Ausdehnungszahl  $\varepsilon$  wird meist dargestellt in Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis  $m = A_2/A_1$ , dem Zuströmdruck  $p_1$  und dem Wirkdruck  $\Delta p_{Wi}$ ; z. B. Bild 6-40.

*Durchfluss- und Expansionszahl* werden experimentell ermittelt. Sie sind für die genormten Drosselgeräte ebenfalls in DIN 1952 niedergelegt. Bild 6-39 bis Bild 6-41 enthalten die zugehörigen Werte für  $\alpha$  und  $\varepsilon$ .

Bemerkung: Der Wirkdruck ist bei Düsen geringer als bei Blenden. Andererseits sind Düsen weniger korrosions- und verschleißempfindlich als Blenden mit ihrer scharfen Kante. Düsen können daher auch bei „schmutzigen“ oder „abrasiven“ Strömungsmedien angewendet werden, sind allerdings aufwändiger.

#### 4.1.1.5.7 Beruhigungsstrecke

Vergleiche auch Abschnitt 4.1.1.3.5.

Die Strömung wird durch jedes Einbauteil gestört. Erst nach einem gewissen Strömungsweg, der sog. **Beruhigungsstrecke**, hinter dem Einbauteil ist die Störung abgeklungen, d. h. das normale Geschwindigkeitsprofil wieder erreicht. Die Störung beginnt jedoch schon vor dem Einbauteil, gewissermaßen als Vorankündigung. Das Bauteil wirkt durch gewissen Rückstau auch stromabwärts. Dies ist beim Anbringen von Beruhigungsstrecken und Messstellen zu beachten. Entsprechend der Anlaufstrecke (Abschnitt 4.1.1.3.5) gilt als Beruhigungsstrecke nach PRANDTL diejenige Rohrlänge, hinter der sich das Geschwindigkeitsprofil um weniger als 1% vom endgültigen, d. h. des beruhigten Zustandes, unterscheidet. Die Beruhigungsstrecke  $L_B$  ist vom Rohrdurchmesser  $D$  (bzw.  $D_{gl}$ ) abhängig und wird deshalb meist im Verhältnis zu diesem angegeben:

$$\text{Laminare Strömung } L_{B,l}/D \approx 0,06 \cdot Re \quad (4-70)$$

$$\text{Turbulente Strömung } L_{B,t}/D \approx 25 \dots 50 \quad (4-71)$$

Die turbulente *Beruhigungsstrecke* ist somit wesentlich kürzer als die laminare. Praktisch reicht hier oft  $L_{B,t}/D \approx 10$  bis 20.

In der *Beruhigungsstrecke* ergeben sich höhere Strömungsverluste. Die Rohrreibungszahl  $\lambda$  bzw. die Widerstandszahl  $\zeta$  eines Einbauteils, das in die Beruhigungsstrecke eines anderen eingebaut ist, wird deshalb größer, und zwar bei

- *laminarer* Beruhigungsstrecke:  $\lambda$ - sowie  $\zeta$ -Werte bis 50% über den Normalwerten.

- *turbulenter* Beruhigungsstrecke:  $\lambda$ - als auch  $\zeta$ -Werte selten mehr als 10% über den Normalwerten.

Der Mehrverlust ist also in der turbulenten Beruhigungsstrecke wesentlich kleiner als in der laminaren und deshalb oft vernachlässigbar.

#### 4.1.1.5.8 Verlustleistung

Infolge des Druckverlustes  $\Delta p_V$  entsteht in Rohrleitungen die Verlustleistung  $P_V$ . Diese Leistung muss von Pumpen oder einem Gefälle aufgebracht werden, um den fließenden Mediumstrom  $\dot{V}$  mit der gewünschten Geschwindigkeit  $c$  zu bewegen und wird letztlich in Wärme umgesetzt. Die Temperatur des strömenden Fluides erhöht sich dadurch jedoch nur geringfügig. Mit der Verlustenergie  $E_V$  gilt:

$$P_V = dE_V / dt$$

Hierbei gemäß (2-23)  $E_V = V \cdot \Delta p_V$ . Da der Druckverlust  $\Delta p_V$  durch die vorhandenen Verhältnisse (Rohrdurchmesser, Rohrlänge, Volumenstrom) festliegt ( $\Delta p_V$  nicht  $f(t)$ ), wird:

$$\frac{dE_V}{dt} = \frac{d}{dt}(V \cdot \Delta p_V) = \Delta p_V \cdot \frac{dV}{dt} = \Delta p_V \cdot \dot{V}$$

Eingesetzt in die Ausgangsbeziehung ergibt mit  $\Delta p_V = \rho \cdot Y_{V,ges}$ :

$$P_V = \dot{V} \cdot \Delta p_V = (\dot{m}/\rho) \cdot \Delta p_V = \dot{m} \cdot Y_{V,ges} \quad (4-71a)$$

Oder einfach gemäß Leistung als Produkt von Kraft und Geschwindigkeit, mit Kraft  $F_V$  aus Druckverlust  $\Delta p_V$  und Rohrquerschnitt  $A$ :

$$P_V = F_V \cdot c = \Delta p_V \cdot A \cdot c = \Delta p_V \cdot \dot{V} \quad (\text{wie zuvor!})$$

#### 4.1.1.6 Strömungen mit Energiezufuhr und/oder Energieabfuhr

Wird einem strömenden Fluid mechanische Energie zugeführt, z. B. durch eine Pumpe, und/oder an anderer Stelle durch eine Turbine sowie Verluste Strömungsenergie entzogen, Bild 4-33, ermöglicht die Energiebilanz den Anfangs- mit dem Endenergiezustand zu ver-

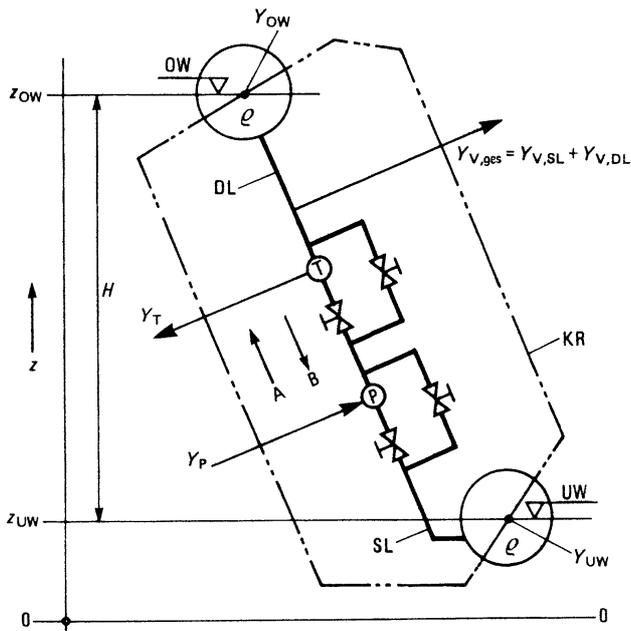


Bild 4-33. Strömung mit Energiezufuhr  $Y_P$  (Pumpe P) und Energieabfuhr  $Y_T, Y_V$  (Turbine T sowie Verluste V). KR Kontroll- oder Bezugsraum (Systemgrenze), SL Saugleitung, DL Druckleitung, UW Unterwasser, OW Oberwasser (-Behälter).

knüpfen. Die gesamte Endenergie ist die Summe der Anfangsenergie, zuzüglich der Energiezugänge und abzüglich der Energieabgänge. Oder nach der **Energiebilanz** (EB): Summe der Energiezugänge gleich Summe der Energieabgänge. Dabei ist Anfangsenergie als Zugang und Endenergie als Abgang zu werten.

*Strömungsrichtung A:*

$$Y_{OW} = Y_{UW} + Y_P - Y_T - Y_{V,ges}$$

oder nach (EB)  $Y_{UW} + Y_P = Y_{OW} + Y_T + Y_{V,ges}$  (4-72)

*Strömungsrichtung B:*

$$Y_{UW} = Y_{OW} + Y_P - Y_T - Y_{V,ges}$$

oder nach (EB)  $Y_{OW} + Y_P = Y_{UW} + Y_T + Y_{V,ges}$  (4-73)

Diese Beziehungen werden als **Energiegleichung mit Energiezu- und/oder Energieabfuhr** bezeichnet.

Dabei bedeuten die spezifischen Energiewerte:

$Y_T$  ... Energieabgang (-abfuhr) → Turbine

$Y_P$  ... Energiezugang (-zufuhr) → Pumpe

$Y_{UW}$  ... UW-Energie (Zusammenfassung)

$$Y_{UW} = z_{UW} \cdot g + p_{UW}/\rho + c_{UW}^2/2$$

$Y_{OW}$  ... OW-Energie (Gesamtwert)

$$Y_{OW} = z_{OW} \cdot g + p_{OW}/\rho + c_{OW}^2/2$$

In der Regel ist entweder nur die Pumpe ( $Y_T = 0$ ), Strömungsrichtung A, oder die Turbine ( $Y_P = 0$ ), Durchflussrichtung B, vorhanden bzw. in Betrieb (entsprechende Absperrorgane geöffnet bzw. geschlossen). Sowohl bei Pumpen als auch Turbinen sind dabei zudem die Bedingungen für das Saugverhalten (Abschnitt 2.4) zu erfüllen.

Bei den in der Regel üblichen Verhältnissen

$$p_{UW} = p_{OW} = p_b \quad (\text{offene Gefäße}),$$

$$c_{UW} \approx c_{OW} \approx 0,$$

$$H = z_{OW} - z_{UW} \quad (\text{Bild 4-33})$$

folgt bei:

- Strömungsrichtung A wenn  $Y_T = 0$  für die spezifische Pumpenenergie

$$Y_P = g \cdot H + Y_{V,ges},$$

- Strömungsrichtung B wenn  $Y_P = 0$  für die spezifische Turbinenenergie

$$Y_T = g \cdot H - Y_{V,ges}.$$

Die theoretische Maschinenleistung, d.h. ohne Maschinenverluste, ergibt sich dann gemäß (4-71a) mit dem durchfließenden Massendurchsatz  $\dot{m}$ :

Pumpe  $P_{P,th} = \dot{m} \cdot Y_P,$

Turbine  $P_{T,th} = \dot{m} \cdot Y_T.$

Die tatsächliche, sog. effektive Leistung ist bei Turbinen um die Maschinenverluste (Wirkungsgrad  $\eta_e$ ) geringer und bei Pumpen entsprechend größer:

$$P_{T,e} = P_{T,th} \cdot \eta_{T,e} \quad \text{und} \quad P_{P,e} = P_{P,th}/\eta_{P,e}.$$

Ergebnis:

Turbinen liefern um die Verluste weniger Energie. Pumpen müssen um die Verluste mehr Energie aufwenden.

#### 4.1.1.7 Kennlinie von Rohrsystemen

Eine Rohrleitungskennlinie ist die graphische Darstellung des Druck-Durchsatz-Verhaltens. Sie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, dem statischen und dem dynamischen (Bild 4-34).

##### Statischer Anteil:

$$p_{\ddot{u}, \text{stat}} = \rho \cdot g \cdot H$$

##### Dynamischer Anteil:

$$\begin{aligned} p_{\ddot{u}, \text{dyn}} &= \Delta p_{V, \text{ges}} = \rho \cdot Y_{V, \text{ges}} \\ &= \rho \cdot K \cdot c^2 / 2 = \rho \cdot K \cdot \dot{V}^2 / (A^2 \cdot 2) \end{aligned}$$

$$p_{\ddot{u}, \text{dyn}} \sim \dot{V}^2 \quad (\text{Parabel!})$$

##### Gesamtwert (Überdruck):

$$p_{\ddot{u}} = p_{\ddot{u}, \text{stat}} + p_{\ddot{u}, \text{dyn}} = \rho \cdot g \cdot H + \rho \cdot C \cdot \dot{V}^2$$

Hierbei Konstanten  $K$  gemäß Rohrsystemaufbau (Abschnitt 4.1.1.5.1)  $\rightarrow K = R \cdot 2 \cdot A^2 / \rho$  und  $C = K / (2 \cdot A^2) = R / \rho$  und  $R$  nach (4-35e), bzw. (4-54b).

#### 4.1.1.8 Versuchswesen

##### Versuchsaufbau

Soll in einem Rohrsystem, das beispielsweise viele Einbauten aufweist und deshalb kompliziert ist, der auftretende Druckverlust experimentell bestimmt werden, müssen gemäß Abschnitt 3.3.1 folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Zur Großausführung (Index G) in allen Teilen geometrisch proportionaler Modellaufbau (Index M).
- Gleiche REYNOLDS-Zahlen, also notwendig  $Re_M = Re_G$ . Die die  $Re$ -Zahl bildenden Größen  $c$ ,  $D$  und  $v$  sind daher entsprechend anzupassen. Da der Rohrdurchmesser  $D_M$  des Versuchsaufbaues meist von anderer Größe als der von Originalausführung  $D_G$ , müssen die beiden anderen Werte, also  $c_M$  und/oder  $v_M$  entsprechend verändert werden, was oft nur schwer zu verwirklichen. Gegebenenfalls ist der Übergang auf ein anderes Medium notwendig, z. B. von der Flüssigkeit der Größenausführung auf Gas beim Modell (sog. Luftversuch).

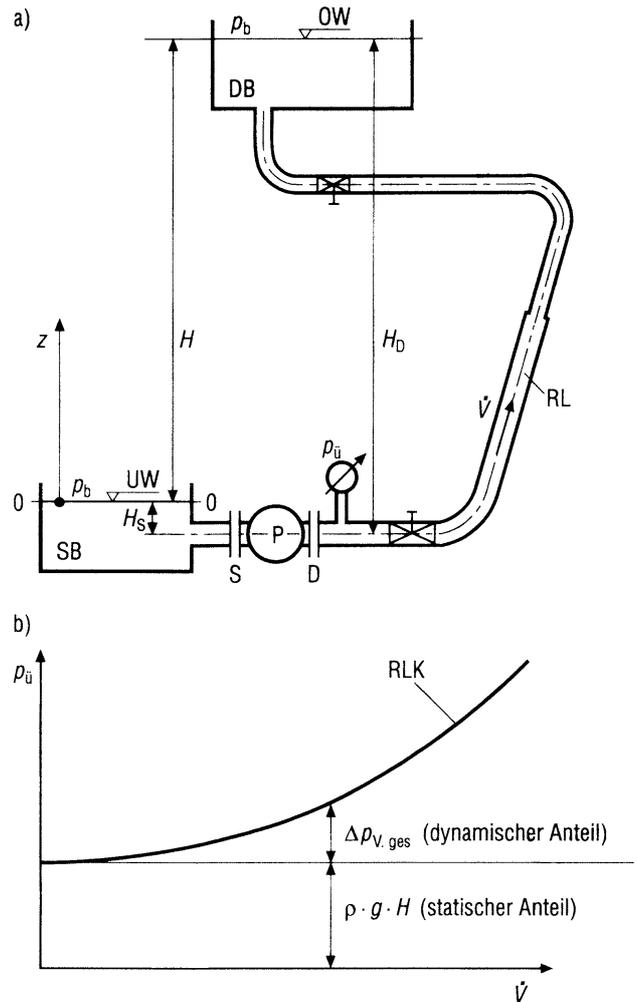


Bild 4-34. Rohrsystem (Prinzipdarstellung).

a) Anordnung, b) Rohrleitungs-Kennlinie RLK; SB Saugbehälter, DB Druckbehälter, P Pumpe, UW Unterwasser, OW Oberwasser, RL Rohrleitung, S Saugstutzen, D Druckstutzen(-Stelle),  $H_s$  Saughöhe (hier negativ, da Zulauf),  $H_D$  Druckhöhe,  $H = H_D + H_s$  (geodätische) Förderhöhe, hier  $H = H_D - |H_s|$ .

##### Versuchsauswertung:

Das Übertragen der Messergebnisse des Modell-Versuches auf die Wirklichkeit, d. h. die geplante Größenausführung, beruht auf der Ähnlichkeitstheoretischen Erkenntnis (Abschnitt 3.3.1.2): Bei geometrischer und physikalischer Ähnlichkeit sind alle Kennzahlen konstant, d. h. an Groß- und Modellausführung je gleich groß. Wird demnach erfüllt  $Re_M = Re_G$ , muss auch  $Eu_M = Eu_G$  gelten. Bei  $Ma > 0,3$  ist jedoch zudem  $Ma_M = Ma_G$  notwendig.

Am Modell mit

- verwendetem Medium, d. h. Dichte  $\rho_M$ , kinetischer Viskosität  $\nu_M = \eta_M / \rho_M$
- verwirklichter Strömungsgeschwindigkeit des fließenden Versuchsmediums

$$c_M = Re_M \cdot \nu_M / D_M = Re_G \cdot \nu_M / D_M$$

$$= (c_G \cdot D_G / \nu_G) \cdot (\nu_M / D_M)$$

$$c_M = c_G \cdot (D_G / D_M) \cdot (\nu_M / \nu_G)$$

folgt über den gemessenen Druckverlust  $\Delta p_{V,M}$  die gehörige EULER-Zahl gemäß (3-36):

$$Eu_M = \Delta p_{V,M} / (\rho_M \cdot c_M^2)$$

Hiermit ergibt sich aus  $Eu_G = \Delta p_{V,G} / (\rho_G \cdot c_G^2)$ , da gilt  $Eu_G = Eu_M$ , der gesuchte Druckverlust  $\Delta p_{V,G}$  zu

$$\Delta p_{V,G} = Eu_G \cdot \rho_G \cdot c_G^2 = Eu_M \cdot \rho_G \cdot c_G^2$$

bei den Stoffwerten, Dichte  $\rho_G$  und Viskosität  $\nu_G = \eta_G / \rho_G$  des Fluides der Großausführung mit der bei ihm zu verwirklichenden Strömungsgeschwindigkeit  $c_G$  dieses fließenden Mediums.

#### Grenzen:

Die Modellgröße, d. h. deren Kleinheit ist begrenzt durch:

- Möglichkeit, die geometrische Nachbildung in allen Einzelheiten zu verwirklichen, auch hinsichtlich Oberflächenausführung, d. h. Rauigkeit,
- Erfüllen der REYNOLDS- und evtl. MACH-Bedingung, d. h.  $Re = \text{konst}$  sowie  $Ma = \text{konst}$
- erreichbare Messgenauigkeit, bestimmt durch Messmittel (Fühler, Geräte).

Es gilt: Je exakter das geforderte Ergebnis und je geringer die erreichte Messgenauigkeit, mit desto größeren Modellen sollte experimentiert werden, damit die Übertragungsmaßstäbe (geometrische und physikalische) möglichst günstig, d. h. klein (dicht bei 1) sind. Auch reicht partielle und/oder ungefähre Ähnlichkeit in der Regel nicht aus.

#### 4.1.1.9 Übungsbeispiele

**Ü 28** An einem oben offenen Behälter zweigt 2,5 m unter dessen Wasserspiegel ein gebrauchtes, mäßig angerostetes Gussrohr von 8 m Länge und 160 mm lichtem Durchmesser scharfkantig ab. Es ist gegen die Waagrechte um  $30^\circ$  geneigt und verjüngt sich 3 m vor dem Ende plötzlich auf den halben Durchmesser.

Gesucht:

- Austretender Volumenstrom bei einer Wassertemperatur von  $10^\circ\text{C}$ .
- Druck unmittelbar nach der Ansatzstelle des Rohres am Behälter.

**Ü 29** Zur Wasserförderung aus einer Grube soll eine Hebeleitung eingesetzt werden. Das Gussrohr ist gebraucht und leicht angerostet. Die Krone, über welche die Heberleitung zu führen ist, liegt 4 m über dem Grubenwasserspiegel (OW). Die Bezeichnungen gehen aus der Systemskizze, Bild 4-35, hervor.

Bekannt: Rohr I

$$\begin{array}{ll} \text{Länge} & L_I = 8 \text{ m} \\ \text{Durchmesser} & D_I = 150 \text{ mm} \end{array}$$

Rohr II

$$\begin{array}{ll} \text{Länge} & L_{II} = 50 \text{ m} \\ \text{Durchmesser} & D_{II} = 120 \text{ mm} \end{array}$$

Rohr III

$$\begin{array}{ll} \text{Länge} & L_{III} = 29 \text{ m} \\ \text{Durchmesser} & D_{III} = 100 \text{ mm} \\ \text{Neigungswinkel} & \alpha_1 = 45^\circ \\ & \alpha_2 = 15^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Höhenunterschiede} & H_1 = 3,5 \text{ m} \\ & H_2 = 4 \text{ m} \end{array}$$

$$\text{Wasser: Temperatur} \quad 20^\circ\text{C}$$

Gesucht:

- Wie groß ist der Volumenstrom?
- Wo tritt der kleinste Druck im System auf und wie groß ist dieser?
- Welche Verhältnisse ergeben sich, wenn das Rohrsystem durchweg den gleichen Durchmesser von 150 mm hat und die äquivalente Sandrauhigkeit des Rohres 0,6 mm beträgt?