Bernoulligleichung

Stromfadenvorstellung

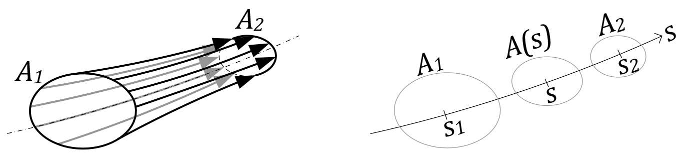

Bild 1: Stromfaden als Sonderform der Stromröhre

Im Arbeitsblatt „Kontinuitätsgleichung“ wurde die Stromröhre eingeführt. Sie ist ein Bilanzgebiet mit einer Mantelfläche aus Stromlinien. Massenströme können nur durch die Endflächen hindurchtreten. Bild 1 zeigt links eine einfache Stromröhre mit den beiden Endflächen A_1 und A_2.

Ein Stromfaden ist eine Stromröhre, in der die interessierenden Größen über den Querschnitt hinweg konstant sind. Der schmalste denkbare Stromfaden ist eine Stromlinie. Breitere Stromfäden können durch ihre Achslinie dargestellt werden, wie es Bild 1 rechts zeigt. Die interessierenden Größen können als $p(s)$, $c(s)$ usw. dargestellt oder nach den zugehörigen Querschnitten als p_1, c_1 usw. indiziert werden. Mit den Endflächen wird in gleicher Weise verfahren.

Die Stromfadenvorstellung liefert die Grundlage für eine eigene Theorie. Sie wird Stromfadentheorie oder auch Theorie der eindimensionalen Strömung genannt. Ähnlich wie die Theorie der eindimensionalen Wärmeleitung ist sie leicht anzuwenden und liefert eine besonders einfache und übersichtliche Darstellung der interessierenden Zusammenhänge.

Reibungsfreies Fluid

Bevorzugtes Anwendungsfeld der Stromfadentheorie sind Rohrströmungen (Bild 2). In geraden Rohrabschnitten deckt sich der Mantel des Stromfadens mit der Rohrwand. Beginn und Ende des jeweiligen Abschnitts bilden die Endflächen.

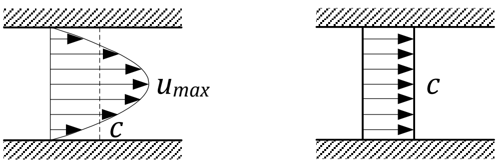

Bild 2: reale Strömung (links) und ideale Strömung (rechts) in einem Rohr

In einer realen Rohrströmung haften Teilchen an der Wand und bremsen die vorbeiströmenden Teilchen, die wiederum weitere Teilchen im Inneren bremsen. In Ergebnis bildet sich ein gekrümmtes Geschwindigkeitsprofil mit einer Spitzengeschwindigkeit u_{max} in der Rohrmitte aus, wie es Bild 2 links für eine laminare Rohrströmung zeigt. Die auftretenden Schergeschwindigkeiten sind mit Schubspannungsaufnahmen verbunden. Deswegen ist die Strömung nur unter Kraftaufwand zu erreichen.

Durch das gekrümmte Profil sind die Voraussetzungen der Stromfadentheorie eigentlich außer Kraft gesetzt. In einem geraden Stromfaden müßte das Profil für ein reibungsfreies Fluid vollkommen gerade sein, wie es Bild 2 rechts zeigt. In solch einer Strömung würden keine Schergeschwindigkeiten bestehen, und das das Fluid müßte folglich auch in der Bewegung keine Schubspannungen aufnehmen. Die zugehörige Rohrströmung wird als ideale Rohrströmung bezeichnet. Sie ist erfordert keinen Kraftaufwand. Reibungsfreie Medien treten in der Natur nicht auf. Trotzdem ist das Modell eines reibungsfreien Fluids für viele technische Rohrströmungen nützlich.

Damit das Modell auf technische Rohrströmungen angewendet werden kann, wird die mittlere Fließgeschwindigkeit c einer Rohrströmung als Fließgeschwindigkeit der idealen Rohrströmung aufgefaßt. Ein weiterer Kunstgriff betrifft die Reibung: In der Herleitung der grundlegenden Gleichung der Stromfadentheorie, der Bernoulligleichung, wird die Reibung zunächst vernachlässigt und hinterher, über einen speziellen Verlustterm, in die fertige Gleichung eingeführt.

Eulersche Bewegungsgleichung

Die Bernoulligleichung ist eine spezielle Form der Eulerschen Bewegungsgleichung. Die Eulersche Bewegegungsgleichung weist wiederum, wenn man die vertikale Richtung betrachtet, eine gewisse Verwandtschaft zum Eulerschen Grundgesetz der Hydrostatik auf.

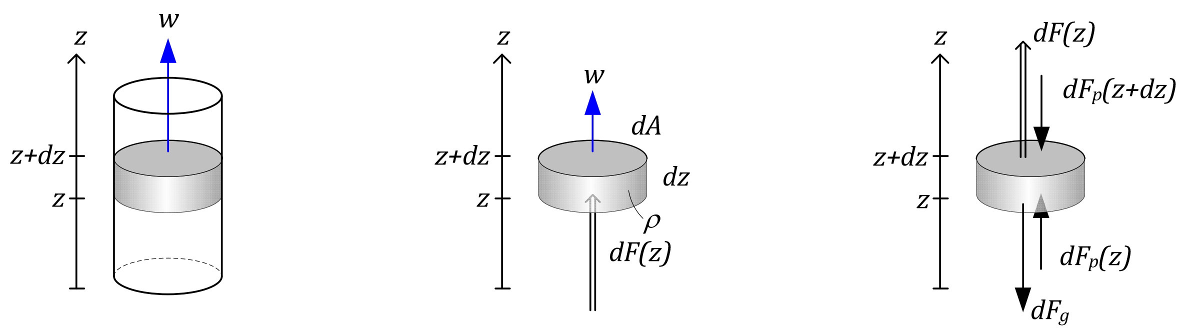

Bild 3: beschleunigtes Fluidvolumen in vertikaler Richtung

Bild 3 zeigt die gleiche Situation, wie sie auch schon für die Herleitung des Eulerschen Grundgesetzes der Hydrostatik im Arbeitsblatt „Berechnungsformeln der Hydrostatik" herangezogen wurde. Neu ist, daß das betrachtete Fluidvolumen nicht mehr ruht, sondern in z-Richtung beschleunigt wird. Dazu ist eine resultierende Kraft $\mathrm{d}F(z)$ erforderlich. Sie ist unendlich klein, weil der Querschnitt $\mathrm{d}A$ unendlich klein ist. Von den äußeren Kräften muß die Druckkraft $\mathrm{d}F_p(z)$ hier nicht nur die entgegengerichtete Druckkraft $\mathrm{d}F_p(z+dz)$ und die Gewichtskraft $\mathrm{d}F_g$ ausgleichen, sondern auch noch eine Impulsänderung bewerkstelligen, die sich in einer substantiellen Beschleunigung $\mathrm{D}w/\mathrm{D}z$ ausdrückt.

Bernoulligleichung

Die vollständige Eulersche Bewegungsgleichung ist vektoriell und besteht aus drei Gleichungen in verschiedenen Richtungen, eine davon in Strömungsrichtung s, das ist die Bernoulligleichung.

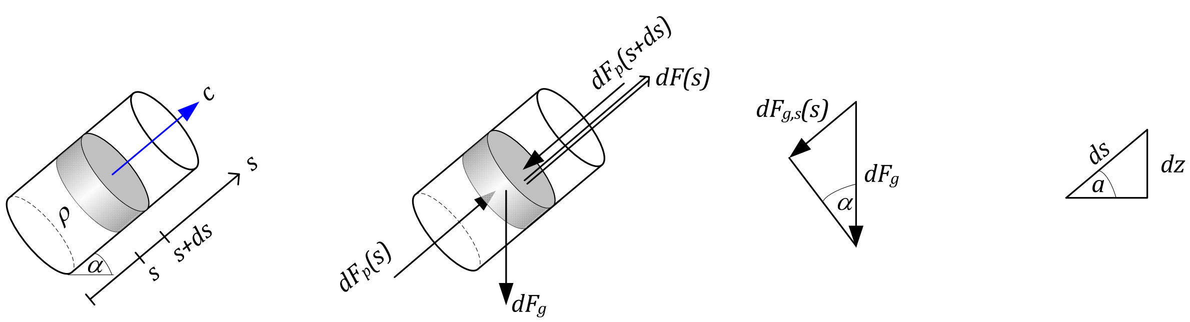

Bild 4: beschleunigtes Fluidvolumen in beliebiger Strömungsrichtung

In Bild 4 wird ein infinitesimal kleines zylindrisches Fluidvolumen mit der Dichte ρ betrachtet. Seine Masse ist

$$(1) \qquad \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s.$$

ρ ist hier konstant und wird auch im folgenden als konstant angenommen (inkompressibles Fluid). Der Fluidzylinder bewegt sich durch einen Stromfadenabschnitt, der am Punkt s einen Anstellwinkel α hat. Wie das äußerst rechte Teilbild zeigt, besteht zwischen unendlich kleinen Teilstrecken der Strömungsrichtung und der Höhenrichtung die Beziehung

$$(2) \qquad \mathrm{d}z = \sin(\alpha)\mathrm{d}s.$$

Deswegen wirkt gegen die Strömung nur eine Komponente der Gewichtskraft mit dem Betrag

$$(3) \qquad \mathrm{d}F_{g,s}(s) = \sin(\alpha)\,\mathrm{d}F_g(s) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}F_g = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}m\,g = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\rho\,g\,dA\,\mathrm{d}s$$

auf den Zylinder. Des weiteren wirken auf ihn Druckkräfte

$$(4) \qquad \mathrm{d}F_p(s) = \mathrm{d}A\,p(s) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}F_p(s+ds) = \mathrm{d}A\,p(s+ds).$$

Die Impulsänderung des bewegten Zylinders ergibt sich, wie im folgenden gezeigt wird, als

$$(5) \qquad \dot{I} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}(\mathrm{d}m\,c) = \mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}\tau} = \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}\tau} = \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} + c\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}\right) = \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s}\right).$$

Weil ein bewegtes Fluidvolumen betrachtet wird, handelt es sich um eine substantielle Impulsänderung, die im nächsten Rechenschritt als Produkt einer konstanten Masse und einer substantiellen Beschleunigung $\mathrm{D}c/\mathrm{D}\tau$ dargestellt ist. Auf die substantielle Beschleunigung wird im nächsten Schritt das Transporttheorem angewendet und im letzten Schritt noch der konvektive Term umgewandelt (vgl. Arbeitsblatt „Transporttheorem").

Nach dem 2. Newtonschen Axiom (vgl. Arbeitsblatt „Impulssatz") gilt:

$$(6) \qquad \dot{I} = \sum F_a = \mathrm{d}F_p(s) - \mathrm{d}F_p(s+ds) - \mathrm{d}F_{g,s}(s).$$

Gemäß der Stromfadenvorstellung wird hier noch keine Reibungskraft berücksichtigt. Mit den zuvor aufgestellten Beziehungen wird Gleichung 6 zu

$$(7) \qquad \rho\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s}\right) = \mathrm{d}A\,p(s) - \mathrm{d}A\,p(s+ds) - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\rho\,g\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}s$$

Geteilt durch ρ dA ds entsteht daraus nach Umordnung:

$$\boxed{(8) \qquad -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{\rho}\frac{p(s+ds)-p(s)}{\mathrm{d}s} + g\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + g\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.}$$

Diese Gleichung ist die instationäre Bernoulligleichung in differentieller Form. Sie gilt für ein reibungsfreies und inkompressibles Fluid. Umgestellt nach dem Druckkgradienten entsteht

$$(9) \qquad -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = \rho\,g\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} + \rho\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s}\right).$$

In dieser Form läßt sich die Bernoulligleichung besonders gut interpretieren. – $\mathrm{d}p/\mathrm{d}s$ ist ein Druckgradient, der mit einem Abfallen des Drucks in Strömungsrichtung verbunden ist. Wenn das Fluid in

Ruhe ist oder wenn es sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gleicht er, wie im Eulerschen Grundgesetz der Hydrostatik, die Ortsgröße der Schwerkraft aus. Ein reibungsfreies Fluid, wie es hier vorausgesetzt ist, würde also tatsächlich schon strömen können, ohne daß dafür ein Druckgradient aufrecht erhalten werden muß. Bei konstanter Höhe wird er nur benötigt, um das Fluid zu beschleunigen.

Die übliche Darstellungsform der Bernoulligleichung ist allerdings nicht Gleichung 9, sondern

$$(10)\quad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} - g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.$$

Wenn die Gleichung zwischen zwei Querschnitten integriert wird, wie sie Bild 1 zeigt, ergibt sich:

$$(11)\quad -\int_1^2 \frac{\partial c}{\partial \tau}\,\mathrm{d}s = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g\,z_2 - \left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g\,z_1\right).$$

Die Integration liefert auf der rechten Seite sehr einfache Ausdrücke, weil die Stammfunktion einer Ableitung die abgeleitete Funktion selbst ist. Links verbleibt ein Integral mit einer lokalen Ableitung der Geschwindigkeit, das den instationären Term der Bernoulligleichung darstellt. Ohne den instationären Term geht Gleichung 9 in die stationäre Bernoulligleichung

$$(12)\quad \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g\,z_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g\,z_2 = H$$

über. Da sie zwischen beliebigen Punkten eines Stromfadens gilt, ist die Summe der Terme immer eine Konstante H, die Bernoullikonstante genannt wird.

Bernoullidiagramm

Mithilfe der Bernoullikonstante lassen sich sog. Bernoullidiagramme aufstellen, die die Aufteilung der Konstante in ihre drei Anteile zeigen. Bild 5 zeigt Beispiele für solche Diagramme anhand verschiedener physikalischer Vorlagen.

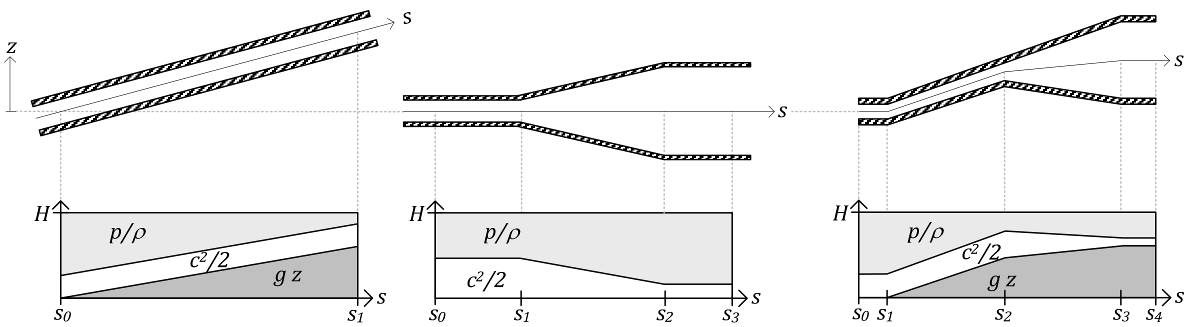

Bild 5: Bernoullidiagramm eines Diffusors

Das Arbeiten mit den Diagramm beginnt mit dem Zeichnen des Diagramms einschließlich der Bernoullikonstanten, dem Einzeichnen einer Stromlinie in die Vorlage und dem Anzeichnen einer Koordinatenachse für die Höhenrichtung. Ihr Ursprung wird auf den tiefsten Punkt der Stromlinie gelegt. Anschließend werden von allen Punkten der Vorlage, in denen sich der Höhenverlauf oder der Querschnitt ändert, Hilfslinien in das Diagramm gelotet.

Das Eintragen der verschiedenen Anteil beginnt immer mit dem Anteil $g\,z$. Weil g konstant ist, deckt sich der Verlauf von $g\,z$ mit dem Höhenverlauf der Stromlinie. Als nächstes wird der Anteil $c^2/2$ eingetragen, indem für einen beliebigen Punkt mit endlichem Querschnitt eine bestimmte Höhe dieses Anteils angenommen wird und der weitere Verlauf auf diese Höhe bezogen wird. Die verbleibende Fläche des Diagramms bis zur Bernoullikonstanten ist dann der Anteil p/ρ.

Links in Bild 5 ist ein ansteigender Rohrabschnitt gezeigt. Weil sich sein Querschnitt nicht ändert, ist der Anteil $c^2/2$ immer gleich. Der Druck p nimmt in diesem Fall im gleichen Maß ab, wie die Höhe z zunimmt.

In der Mitte von Bild 5 ist ein Fall gezeigt, in dem die Höhenlage keine Rolle spielt. Man erkennt, daß der Druck p im gleichen Maße zunimmt, wie das Quadrat der Geschwindigkeit c aufgrund der Querschnittserweiterung abnimmt. Darin liegt eine wesentliche Schlußfolgereung aus der Bernoulligleichung: Bei konstanter Höhenlage verlaufen Druck und Geschwindigkeit gegensinnig.

Rechts in Bild 5 ist ein Fall gezeigt, in dem sich zusätzlich noch die Höhenlage ändert. Das Diagramm vermittelt den Eindruck, daß der Druck am Eintritt in den Diffusor am geringsten ist. Bei weniger stärker Betonung der Querschnittsveränderung könnte sich dieses Bild ändern. Das Bernoullidiagramm liefert nur in Teilen mit konstantem Querschnitt oder bei verschwindendem Höheneinfluß eindeutige Aufschlüsse über den Druckverlauf.

Druckanteile

Aus Gleichung 12 entsteht nach Multiplikation mit der Dichte ρ

$$(13) \quad \rho \frac{c_1^2}{2} + \mathrm{p}_1 + \rho \; g \, z_1 = \rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + \rho \, g \, z_2 = \rho \, H = p_{ges}.$$

Man erkennt, daß alle Anteile nun die Dimension eines Druckes haben und zusammen einen Gesamtdruck p_{ges} bilden, der sich in einer idealen Rohrströmung nicht ändern würde. Die einzelnen Anteile des Gesamtdrucks werden wie folgt bezeichnet:

- p: statischer Druck (auch p_{stat}),
- $\rho \, c^2/2$: dynamischer Druck (auch p_{dyn}),
- $\rho \, g \, z$: geodätischer Druck (auch p_{geo}).

Zusammenfassung

In einer idealen Rohrströmung gilt zwischen beliebigen Querschnitten die Bernoulligleichung

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \, z_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \, z_2 + \int_1^2 \frac{\partial c}{\partial \tau} \, \mathrm{d}s$$

Die Bedingungen, unter denen sie gilt, sind:

- keine Dichteunterschiede, aber inkompressibles Fluid, ρ = const.,
- Schwerefeld mit Beschleunigung g (auf der Erde 9,81 m/s²),
- keine Reibungseffekte, also reibungsfreies Fluid,
- die Orte der beteiligten Größen liegen auf einem gemeinsamem Stromfaden.

In stationären Strömungen bilden die drei Anteile $c^2/2$, p/ρ und $g \, z$ eine längs des Stromfadens konstante Summe, die Bernoullikonstante H:

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \, z_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \, z_2 = H.$$

Die Anteile lassen sich in Drücke umformen. Für den Gesamtdruck p_{ges} gilt:

$$p_{ges} = p_{\text{stat}} + p_{dyn} + p_{geo}$$

mit $p_{stat} = p$, $p_{dyn} = \rho\, c^2/2$ und $p_{geo} = \rho\, g\, z$.