Maxwell-Boltzmann féle eloszlás

Ha nincs külső erőterek, akkor a $d\tau \in V$ altérben lévő és a $d\Omega$ elemi impulzus-térhez tartozó részecskék átlagszáma (dN), Maxwell eloszlás szerint,

$$dN = \frac{n}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_0 kT}\right) d\Omega d\tau\,, \tag{1}$$

ahol n a molekulák(részecskék) koncentrációja. Derítsük ki, hogy néz ki az eloszlási funkció egy erőtér jelenlétének esetében. Ebben az esetben a részecskék eloszlása nem egyenletes és egy elemi térfogatban, $d\tau$,

$$n(\vec{\mathbf{r}})d\tau \tag{2}$$

darab részecske van; $n(\vec{\mathbf{r}})$ a részecskék koncentrációja. Impulzus eloszlás Maxwell-szerinti marad, tehát, a valószínűsége annak, hogy egy molekula(részecske) impulzusa $d\Omega$-hez tartozik:

$$dW = \frac{1}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_0 kT}\right) d\Omega \tag{3}$$

Most

$$dN = n(\vec{\mathbf{r}})d\tau dW = \frac{n(\vec{\mathbf{r}})}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_0 kT}\right) d\tau d\Omega\,. \tag{4}$$

Ez a képlet csak abban különbözik (1)-től, hogy állandó n helyett $n(\vec{\mathbf{r}})$ hely-funkció áll. Mivel a koncentrációt, mint az $\vec{\mathbf{r}}$ függvénye, Bolzmann-féle eloszlás határozza meg, (4)es képlet a következő

$$dN = n(\vec{\mathbf{r}}_1)\frac{1}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}) - \varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}_1)}{kT}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_0 kT}\right) d\tau d\Omega\,. \tag{5}$$

Ha jelöljük az $\vec{\mathbf{r}}$-től függetlenül mennyiséget

$$C_N = n(\vec{\mathbf{r}}_1)\frac{1}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}_1)}{kT}\right), \tag{6}$$

akkor képlet (5)

$$dN = C_N \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}) + p^2/2m_0}{kT} \right) d\tau d\Omega, \tag{7}$$

A C_N konstans a normálizáció feltételből kiszámítható:

$$N = C_N \int \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}) + p^2/2m_0}{kT} \right) d\tau d\Omega, \tag{8}$$

ahol N a V térfogatban lévő részecskék száma. Összefoglalva, képletek (7) és (8)

$$\boxed{\begin{gathered} dN = C_N \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}) + p^2/2m_0}{kT} \right) d\tau d\Omega, \\[2ex] C_N = \frac{N}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_p(\vec{\mathbf{r}}) + p^2/2m_0}{kT} \right) d\tau d\Omega} \end{gathered}}$$

Maxwell-Boltzmann féle eloszlást definiálják.