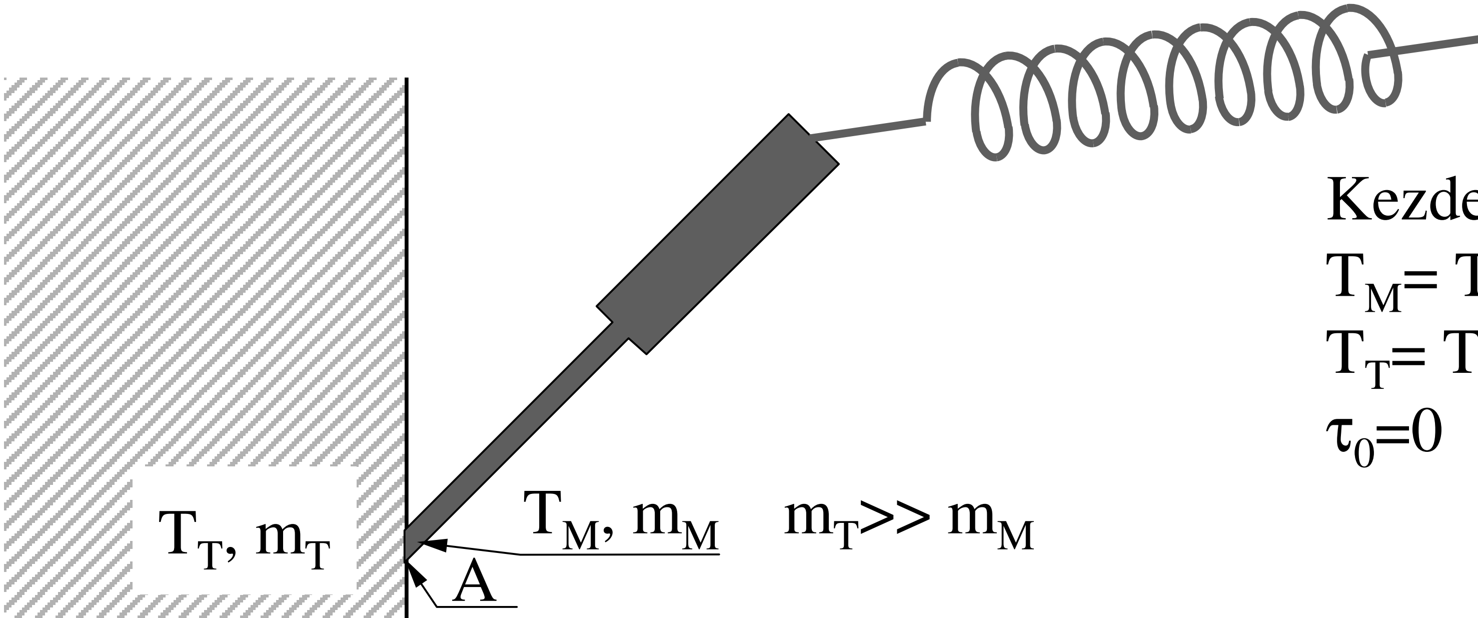
Hőmérsékletmérő átmeneti függvényének és időállandójának meghatározása



Kezdeti feltételek:

$T_M = T_{M0}$,

$T_T = T_{T0}$,

$\tau_0 = 0$

A hőmérséklet-különbség hatására létrejövő hőáram:

$\dot{Q} = k \cdot A \cdot (T_T - T_M) \left(\frac{J}{s}\right)$, ahol *k* a hőátviteli tényező,

mértékegysége: $\left(\frac{J}{s \cdot m^2 \cdot K}\right)$

A hőmérő felmelegedése:

A hőmérő felmelegedése: $Q = c \cdot m_M \cdot \Delta T_M$, vagyis a *c* fajhőjű, *m* tömegű hőmérő *Q* közölt hő hatására *ΔT* hőmérséklettel melegszik fel. Mindkét oldalt deriválva a hőáram ($\dot{Q}$) és a mérőműszer hőmérsékletváltozásának sebességének ($\dot{T}_M$) összefüggését kapjuk meg:

$\dot{Q} = c \cdot m_M \cdot \frac{dT_M}{d\tau}$ A két hőáramot egyenlővé téve:

$c \cdot m_M \cdot \frac{dT_M}{d\tau} = k \cdot A \cdot \left(T_T - T_M\right)$ Az egyenlet rendezve:

$\frac{c \cdot m_M}{k \cdot A} \cdot \frac{dT_M}{d\tau} + T_M = T_T$ bevezetve a *K* időállandót

$$K = \frac{c \cdot m_M}{k \cdot A} \quad \left(\frac{J \cdot s \cdot kg \cdot m^2 \cdot K}{kg \cdot K \cdot J \cdot m^2}\right) = (s)$$

$$K \cdot \frac{dT_M}{d\tau} + T_M = T_T$$ megkapjuk a rendszer differenciálegyenletét

A rendszer egyenlete egy elsőrendű, inhomogén differenciál-egyenlet, melynek megoldását két lépésből kapjuk meg. Az első lépés (A) a homogénné alakított egyenlet általános megoldásának megkeresése, majd az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának előállítása (B). Az egyenlet megoldása a kettő őszzege.

A: A homogén differenciál-egyenlet általános megoldása

$$K \cdot \frac{dT_M}{d\tau} + T_M = 0$$

$$\frac{dT_M}{d\tau} = -\frac{T_M}{K}$$

$$\frac{dT_M}{T_M} = -\frac{1}{K} d\tau$$

$$\int_0^T \frac{dT_M}{d\tau} = -\frac{1}{K} \cdot \int_0^\tau d\tau$$

$$\ln T_M = -\frac{1}{K} \cdot \tau + \ln C$$

$$T_M = C \cdot e^{-\frac{1}{K}\tau}$$

B: Az inhomogén differenciál-egyenlet egy partikuláris megoldása

$$T_M(\tau) = C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau}$$

$$T'_M(\tau) = C'(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} + C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau}\cdot\left(-\frac{1}{K}\right)$$

Visszahelyettesítve a rendszer differenciál-egyenletébe:

$$K\cdot\left(C'(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} + C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau}\cdot\left(-\frac{1}{K}\right)\right) + C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} = T_T$$

$$K\cdot C'(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} - C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} + C(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} = T_T$$

$$K\cdot C'(\tau)\cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} = T_T$$

$$C'(\tau) = \frac{T_T}{K}\cdot e^{\frac{1}{K}\tau}$$

$$C(\tau) = \frac{T_T}{K}\cdot e^{\frac{1}{K}\tau}\cdot K = T_T\cdot e^{\frac{1}{K}\tau}$$

A partikuláris megoldás végül:

$$T_{M(\tau)} = T_T \cdot e^{\frac{1}{K}\tau} \cdot e^{-\frac{1}{K}\tau}$$

$$T_{MP} = T_T$$

Az általános és a partikuláris megoldás összege:

$$T_{M(\tau)} = C \cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} + T_T$$

A *C* konstans meghatározása a kezdeti feltételekből:

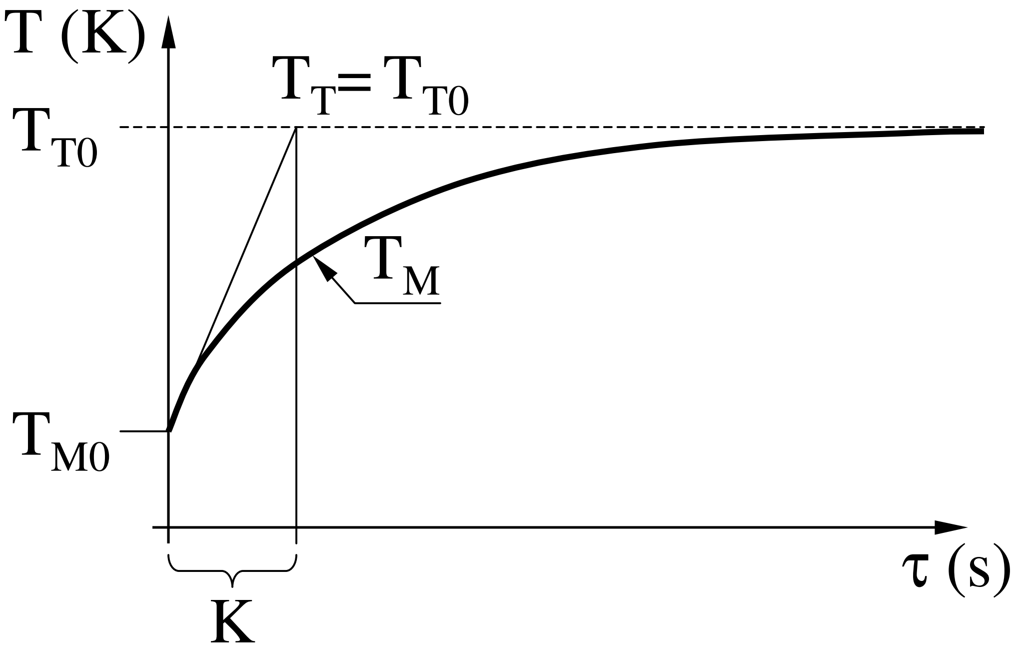
$$T_{Mo} = C \cdot e^{\frac{1}{K}\tau_0} + T_{To}$$

$$T_{Mo} = C + T_{To} \Rightarrow C = T_{Mo} - T_{To}$$

A rendszert leíró differenciálegyenlet teljes megoldása:

$$T_{M(\tau)} = \left(T_{Mo} - T_{To}\right) \cdot e^{-\frac{1}{K}\tau} + T_{To}$$

Az átmeneti függvény:



A *K* időállandó értékének meghatározása méréssel és regresszióval

$$\frac{T_{M(\tau)} - T_{To}}{T_{Mo} - T_{To}} = \frac{t_{M(\tau)} - t_{To}}{t_{Mo} - t_{To}} = e^{-\frac{1}{K}\tau} =: \varepsilon$$

$t_{T0} =$ $^\circ$C $t_{M0} =$ ($^\circ$C) $t_{M0} - t_{T0} =$ $^\circ$C

Sorszám	τ_i (s)	t_{Mi} ($^\circ$C)	t_{M0}-t_{Ti} ($^\circ$C)	τ_i^2	$\tau_i \, ln \, \varepsilon_i$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
Σ					

A *K* időállandó értéke: $K = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \ln\varepsilon_i} = (s)$