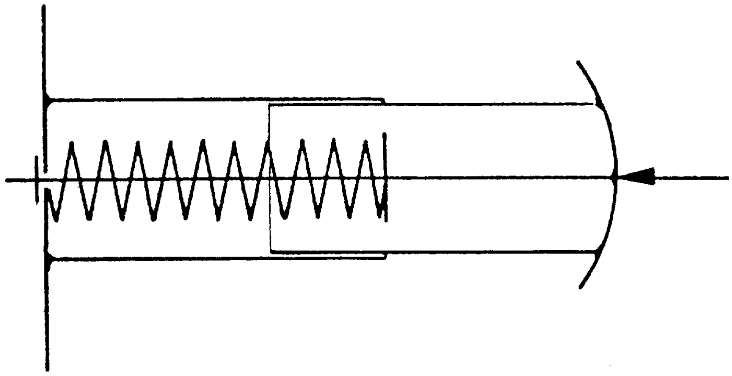
1. példa

Vasúti kocsinak a 6. ábrán látható ütközőjébe épített tekercsrugóban 44,5 kN előfeszítő erő ébred. A rugó állandója 0,18 mm/kN. Az ütközőre fékezéskor 370 kN erő hat.

Mennyit nyomódik össze a rugó fékezéskor? Mennyi munka szükséges ehhez?



Kidolgozás:

A feladat megoldását a rugóerő (F) - összenyomódás (Δl) diagramon szemléltetjük.

A rugó jelleggörbe meredeksége 1/c, c a rugóállandó.

Így

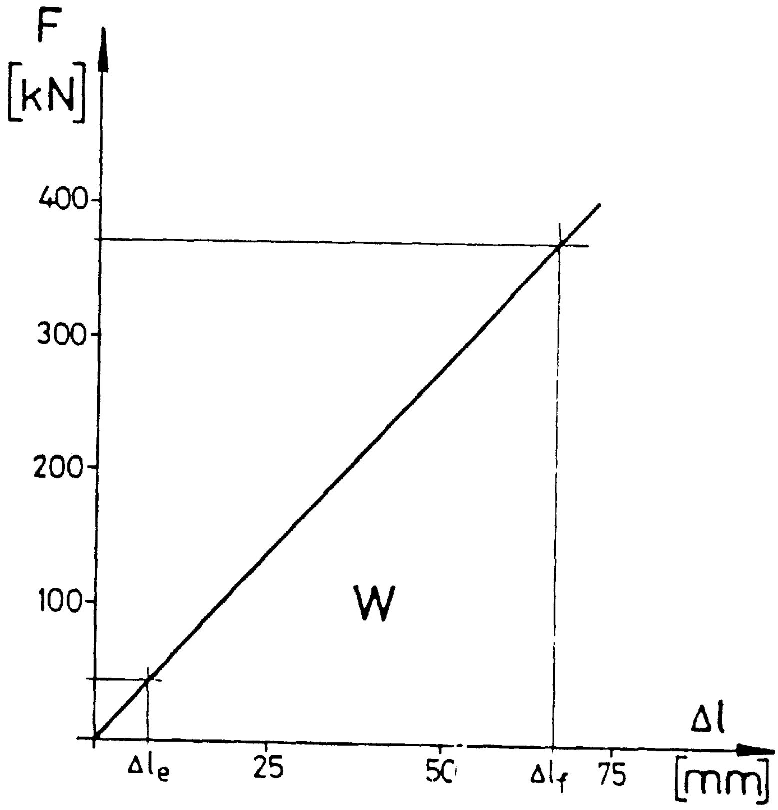
$F = 1/c \cdot \Delta l$

Számítsuk ki a rugó Δl_e összenyomódását előfeszítéskor!

$\Delta l_e = c F_e = 0{,}18$ mm/kN . 44,5 kN = 8,0 mm.

Fékezéskor a rugóra F_f = 370 kN erő hat, ennek hatására a rugó összenyomódása

$\Delta l_f = c F_f = 0{,}18$ mm/kN . 370 kN = 66,6 mm.



Mivel szerelt állapotban a rugó Δl_e-vel össze van nyomva, a rugó Δl összenyomódása fékezéskor

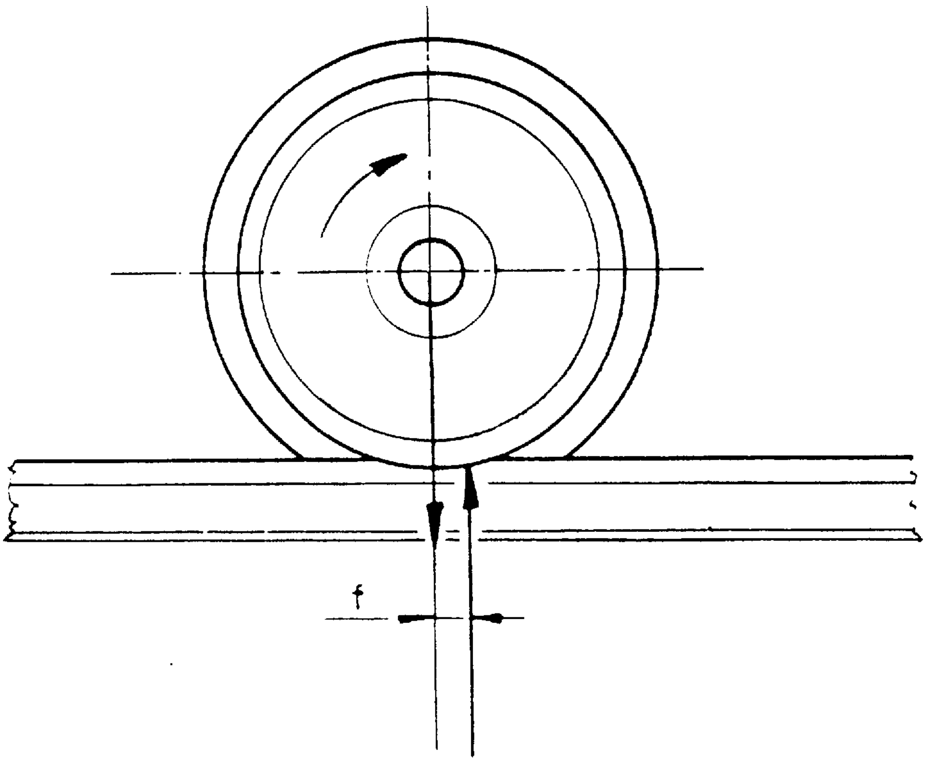
$$\Delta l = \Delta l_f - \Delta l_e = 66{,}6 \text{ mm} - 8{,}0 \text{ mm} = \mathbf{58{,}6 \text{ mm}}$$

A második kérdés az összenyomáshoz szükséges (rugalmas energia formájában tárolt) W munka. W a rugóerő-görbe alatti területtel arányos a Δl_f-
Δl_e hosszúságú szakaszon.

$$W = (F + F)/2\,(\Delta l_f - \Delta l_e) = (44{,}5 \text{ kN} + 370 \text{ kN}) / 2 \cdot 0{,}0586 = \mathbf{12{,}14 \text{ kJ}}$$

2. példa

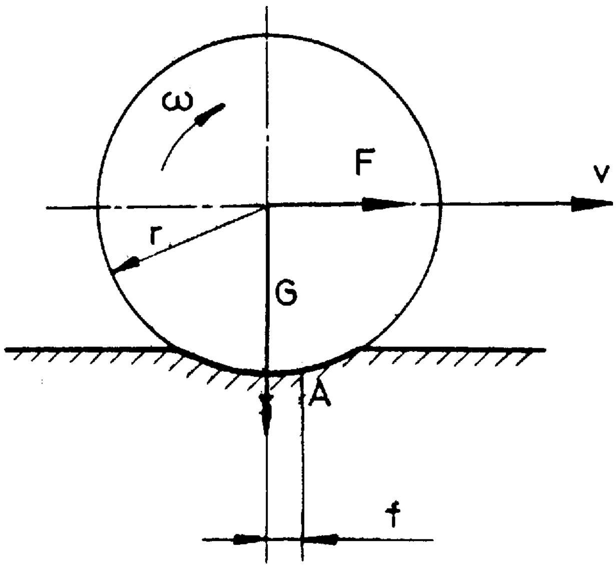
Milyen átmérőjű kerekeket kell készíteni ahhoz a pályán mozgó robothoz, amelynek súlya teherrel együtt 20 kN? Az acélsínen gördülő acélkerekekre ható pálya-nyomóerő karja (ld. ábra) várhatóan f = 2 mm és célunk, hogy a vízszintes pályán 140 N legyen a szükséges vonóerő.



Kidolgozás:

F = 140 N, G = 20 kN, f = 2 mm.

A következő ábra jelöléseivel írjuk fel a F vonóerő és a G súlyerő nyomatéki egyensúlyát (v = áll) az A pontra



$$F\,r = G\,f$$

Ebből a kerékátmérő számolható.

d = 2r = 2 f (G / F) = 2, 2 mm (20kN / 0,14kN) **= 571 mm**

3. példa

7° hajlásszögű havas lejtőn 4 kg tömegű szánkót, rajta egy 20 kg tömegű gyermekkel egyenletes sebességgel vontatunk felfelé. A szántalp és a hó közötti csúszósúrlódási együttható 0,032.

a.) Hány % emelkedésű a lejtő?

b.) Mekkora erőt kell a vontatáshoz kifejteni, ha a vontatókötél a lejtővel 14^0-os szöget zár be (a lejtőnél meredekebb)?

C.) Mennyi a súrlódás legyőzéséhez szükséges munka 200 m-es vontatás során?

Kidolgozás

A feladat a) kérdése egy lejtő hajlásszögének átszámítása %-os emelkedésre. A kőutak és vasutak emelkedését mindig 100 m útra vagy 1000 m útra eső szintkülönbséggel adják meg.

Adott az $\alpha = 7°$ hajlásszög.

Az emelkedés tg α = 0,122 = 12,2%

Az α = 7° szög közel van ahhoz az értékhez, amelynél kisebb szögek szinuszát és tangensét a radiánban kifejezett szöggel vehetjük egyenlőnek.

b) kérdés:

Adott

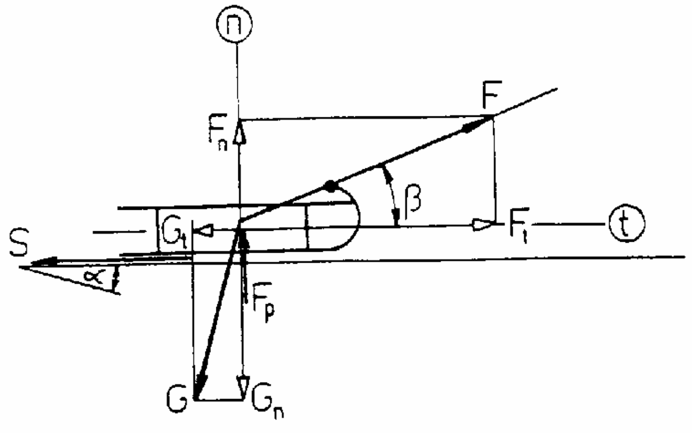
- a szánkó és gyermek tömege $m_{sz} = 4$ kg $m_{gy} = 20$ kg
- a csúszósúrlódási együttható $\mu = 0{,}032$,
- a vontatókötél és a lejtő hajlásszöge (ennek mind nagysága, mind értelme) $\beta = 14°$, valamint a lejtő hajlásszöge, $\alpha = 7°$,
- végül a leglényegesebb adat, ami a feladat megoldásának elvi módszerét meghatározza, az, hogy a vontatás egyenletes sebességgel történik felfelé.

Kérdés a szükséges vonóerő: F.

A legutolsó adat elegendő a feladatban kérdezett vonóerő és az előző négy adatcsoport közötti kapcsolat (függvénykapcsolat) meghatározásához.

Newton I. törvénye szerint az egyenletes sebességű haladás feltétele a tömegekre ható haladásirányú külső erők eredőjének zérus volta. Képletben

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$$



A szánkóra hat az F húzóerő, a G - két tömegre együttesen ható - súlyerő F_p pályanyomóerő és az S haladást fékező súrlódóerő. Legyen a t irány a szánkó haladási irányával párhuzamos irány. Az ilyen irányú erőkomponenseket t indexszel jelölve, a newtoni feltétel

$$F_t = G_t + S \qquad (1)$$

A lejtőre merőleges a irányban a szán nyugalomban van, így szintén Newton l. törvénye érvényes, F_p a pálya által kifejtett nyomóerő

$$F_n + F_p = G_n \qquad (2)$$

További szabály vonatkozik az S súrlódóerő kiszámítására

$$S = \alpha F_p \qquad (3)$$

ahol F_p nagyságát (2) összefüggés szabja meg.

Mivel az n és t komponensekre vonatkoznak az egyenletek, ezeket a komponenseket ki kell fejezni az F és G erőkkel és az α és β szögek szögfüggvényeivel. Ez csupán matematikai átalakítás, míg az előzőekben fizikai törvényeket, szabályokat kellett alkalmazni.

$$F_t = F \cos \beta$$
$$F_n = F \sin \beta$$
$$G_t = G \sin \alpha,$$
$$G_n = G \cos \alpha. \qquad (4)$$

Végül (2)-t (3)-ba beírva és a kapott S-re vonatkozó egyenletet (1)-be helyettesítve a (4) képletek felhasználásával adódik, hogy

$$F_t = G_t + \mu(G_n - F_n), \text{ illetve}$$

$$F \cos \beta = G \qquad \sin \alpha + \mu G \cos \alpha - \mu F \sin$$

$$F = \frac{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \qquad (5)$$

β, ahonnan F-et kell kifejezni

Az (5) képlet a keresett függvénykapcsolat.

A G súlyt nem ismerjük, csak a két tömeget, azokkal fejezzük ki,

$$G = (m_{sz} + m_{gy})g.$$

Érdemes külön **kiszámítani** a súlyt:

$$G = (4\ kg + 20\ kg)\ 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 235{,}4\ N.$$

Behelyettesítve az (5) összefüggésbe:

$$F = \frac{235{,}4\ N \cdot (\sin 7° + 0{,}032 \cdot \cos 7°)}{\cos 14° + 0{,}032 \cdot \sin 14°} = \mathbf{37 N},$$ ami a feladat b) kérdésére a válasz.

A c) kérdés megválaszolásához egy adott úton az elmozdulás irányába eső erő által végzett munkát kell kiszámítani.

Adott az s út: s = 200 m, valamint mindaz, amit az előzőekben már felhasználtunk, vagy kiszámítottunk.

A végzendő munka egyenlő a súrlódást legyőző erő munkájával, azaz

$$W_S = s \cdot S \tag{6}$$

Fel kell használni a (3) és a (2) képletet, valamint az F erő értékét

$$S = \mu(G_n - F_n) = \mu(G \cos \alpha - F \sin \beta)$$

$$W_S = s \cdot \mu(G \cos \alpha - F \sin \beta) = 200\ m \cdot 0{,}032\ (235{,}4\ N \cdot \cos 7° - 37\ N \cdot \sin 14°) = \mathbf{1440\ J}$$

Ezzel a kérdésekre a választ megadtuk, célszerű ezután még egyszer végiggondolni a felhasznált fizikai és matematikai összefüggéseket és megpróbálkozni további, az adatok alapján megválaszolható kérdések feltevésével. Például ebben a feladatban ki lehet számítani a súly felemelésének munkaszükségletét, a súrlódás miatt keletkező hő által megolvasztott hó mennyiségét (ami a súrlódási együtthatót ilyen kis értékre csökkenti) stb. A magára hagyott szánkó mozgásának vizsgálata már átvezetne a változó sebességű mozgás témakörébe.

Fontos ezenkívül a kapott eredmények összvetése a tapasztalattal, annak mérlegelésére, hogy reálisak-e az eredmények. Így például az a) kérdésre adott válasz reális, a (10-12)%-os lejtésű autóutakat külön figyelmeztető táblákkal jelzik, és ilyen meredek lejtők valóban szánkózásra alkalmasak. Tapasztalatból tudjuk, hogy egy 24 kg tömegű szánkó + gyermek vontatásához valóban nem kell nagyobb erőt kifejteni, mint a 4 kg tömegű szánkó felemeléséhez, a kapott eredmény is ilyen nagyságrendű.

4. példa

Mekkora T vonóerő ébred az ábrán látható kerékpárláncban, ha a 70 kg-os kerékpáros egy pedálra teljes G testsúllyal ránehezedik? A pedálkar vízszintes, hossza k = 17 cm, a nagy lánckerék átmérője D = 20 cm, a kis keréké d = 7 cm. Mekkora a hátsó tengelyt hajtó nyomaték?

Kidolgozás:

m= 70kg
k=17cm
d =7cm
D = 20 cm

A feladat a nagy lánckerék tengelyére vonatkozó nyomatékok egyensúlya alapján oldható meg. T jelöli a felső (feszes) láncban ébredő húzóerőt. Az alsó láncág laza, benne a húzóerő elhanyagolható. Így

$$G\,k = T\,(D/2)$$

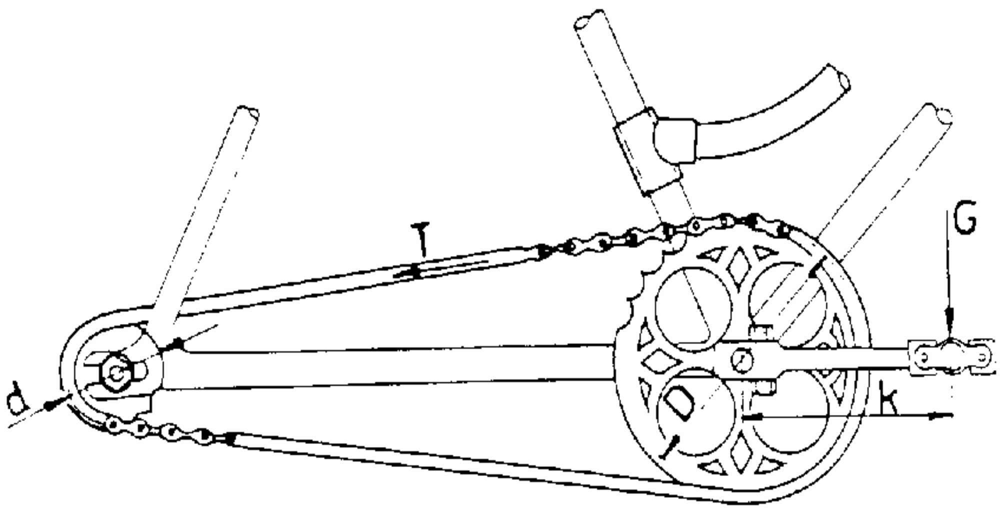
innen

$$T = \frac{2\,G\,k}{D} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot k}{D} = \frac{2 \cdot 70\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ 0{,}17\text{m}}{0{,}2\text{m}} = 1168\ \text{N}$$

Felhasználtuk, hogy $G = m \cdot g$.

A hátsó tengelyt ennek a T erőnek az M nyomatéka hajtja. (Az alsó láncágban nem ébred húzóerő.)

$$M = T \cdot \frac{d}{2} = 1168\ \text{N} \cdot \frac{0{,}07\text{m}}{2} = \mathbf{40{,}9\ \ N \cdot m}$$



5. példa

800/min fordulatszámú munkagépet szíjhajtással kívánunk hajtani. A hajtómotor fordulatszáma 1450 /min, tengelyén 200 mm átmérőjű szíjtárcsa van. 4%-os szlip esetén mekkora szíjtárcsát készítsünk a munkagép tengelyére?

K i d o g o z á s:

Induljunk ki a szlip értelmezéséből!

$$s = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = 1 - \frac{v_2}{v_1}$$

A szíjtárcsa v kerületi sebességét a D átmérőből és az n fordulatszámból $v = D\,\pi\,n$ alakban számíthatjuk ki. Az 1 és 2 index a hajtó, illetve a hajtott tárcsára utal. A szlipet fejezzük ki az átmérőkkel és a fordulatszámokkal:

$$s = 1 - \frac{D_2\ n_2}{D_1\ n_1}$$

A szlip $s = 4\% = 0{,}04$.
A hatótárcsa átmérője: $D_1 = 200\ \mathrm{mm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$,

fordulatszáma: $n_1 = 1450/\mathrm{min}$.

A hajtott tárcsa átmérője: D_2 , ismeretlen,

fordulatszáma: $n_2 = 800/\mathrm{min}$.

D_2-t kifejezve:

$$D_2 = (1-s)\ D_1\ \frac{n_1}{n_2} = \ (1-0{,}04),2\mathrm{m}\cdot\frac{1450\,/\,\mathrm{min}}{800\,/\,\mathrm{min}} = \ 0{,}348\mathrm{m} = \ \mathbf{348\ \ mm}$$

6. példa

Felvonó pillanatnyi hasznos teljesítménye 4 kW, hatásfoka ekkor 66%. A felvonó névleges hasznos teljesítménye 6,4 kW, üresjárási vesztesége 0,8 kW. A változó veszteség a terheléssel arányos.

a.) Mennyi a változó veszteség teljes terheléskor?
b.) Mennyi a hatásfok teljes terheléskor?
c.) Mennyi a hatásfok negyed- és félterhelésnél?

Kidolgozás:

A felvonó pillanatnyi terhelési tényezőjét x-nek nevezzük.

$P_{hx} = 4kW$

$\eta_x = 0,66$

$P_n = P_{h1} = 6,4\ kW$ (névleges teljesítmény)

$P_{vo} = 0,8kW$

a.) A pillanatnyi x terhelésnél a felvonóba bevezetett teljesítmény

$$P_{bx} = \frac{P_{hx}}{\eta_x} = \frac{4\ kW}{0,66} = \mathbf{6,06\ \ kW}$$

Az összes veszteség az x terhelésnél a bevezetett és a hasznos teljesítmény különbsége (24.ábra)

$$P_v = P_{bx} - P_{hx} = 6,06\ kW - 4\ kW = \mathbf{2,06\ \ kW}$$

Az összes veszteség az üresjárási (terheléstől független) és egy változó (terheléstől függő) veszteség összege:

$$P_v = P_{vo} + P_{vx}$$

A változó veszteszég x terhelésnél

$$P_{vx} = P_v - P_{vo} = 2,06\ kW - 0,8\ kW = \mathbf{1,26\ \ kW}$$

Az x terhelési tényező a pillanatnyi hasznos teljesítmény és a névleges teljesítmény hányadosa

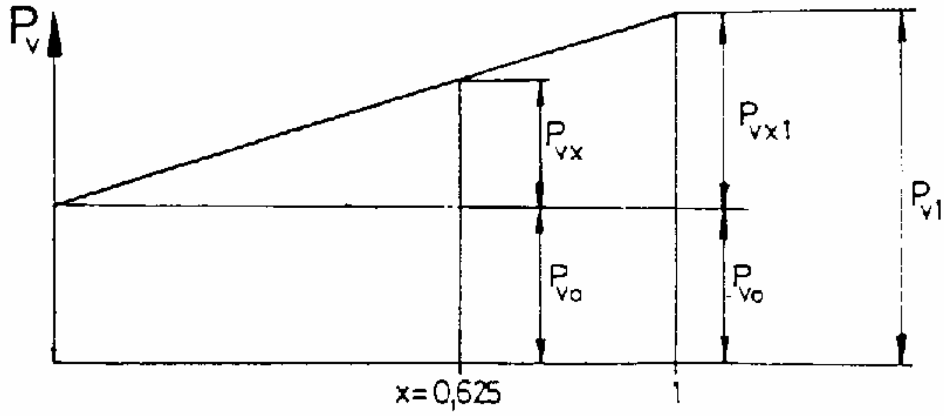
$$x = \frac{P_{hx}}{P_n} = \frac{4\ kW}{6,4\ kW} = \mathbf{0,625}$$

A mechanikai elven működő gépek veszteségei általában egyenesen arányosak a terheléssel (24.ábra). A névleges terhelésnél fellépő változó veszteség az x terhelési tényező segítségével határozható meg

$$P_{vx} = x \cdot P_{vx1}$$

ebből a változó veszteség teljes terheléskor

$$P_{vx1} = \frac{P_{vx}}{x} = \frac{1{,}26\ \text{kW}}{0{,}625} = \mathbf{2{,}02\ kW}$$



24. ábra

b.) A hatásfok teljes terheléskor a névleges és a teljes terhelésnél bevezetett teljesítmények hányadosaként számolható

$$\eta_1 = \frac{P_h}{P_{b1}}$$

A bevezetett teljesítmény a hasznos teljesítmény és a veszteségek (üresjárási és változó) összege

$$\eta_1 = \frac{P_h}{P_h + P_{vo} + P_{vx1}} = \frac{6{,}4\ \text{kW}}{6{,}4\ \text{kW} + 0{,}8\ \text{kW} + 2{,}02\ \text{kW}} = 0{,}694 = \mathbf{69{,}4\%}$$

c.) A hatásfok negyed, ill. félterhelésnél

$$\eta_{1/4} = \frac{0{,}25 \cdot P_h}{0{,}25 \cdot P_h + P_{vo} + 0{,}25 \cdot P_{vx1}} = \frac{0{,}25 \cdot 6{,}4\ \text{kW}}{0{,}25 \cdot 6{,}4\ \text{kW} + 0{,}8\ \text{kW} + 0{,}25 \cdot 2{,}02\ \text{kW}} = 0{,}55 = \mathbf{55\%}$$

$$\eta_{1/2} = \frac{0{,}5 \cdot P_h}{0{,}5 \cdot P_h + P_{vo} + 0{,}5 \cdot P_{vx1}} = \frac{0{,}5 \cdot 6{,}4\ \text{kW}}{0{,}5 \cdot 6{,}4\ \text{kW} + 0{,}8\ \text{kW} + 0{,}5 \cdot 2{,}02\ \text{kW}} = 0{,}639 = \mathbf{63{,}9\%}$$

7. példa

Mekkora nyomaték gyorsította az 5,4 kg tömegű, 0,28 m átmérőjű, gyűrű alakú gépészt, ha szögsebessége 300 fordulat közben 57 rad/s-ről 94 rad/s-ra nőtt?

K i d o l g o z á s:

A "300 fordulat" 300 · 2 π = 1884 rad szögelfordulást jelent. Így az adatok:

$\varphi = 1884$ rad
$m = 5{,}4$ kg
$D = 0{,}28$ m
$\omega_1 = 57$ rad/s
$\omega_2 = 94$ rad/s

Ha a géprész "gyűrű alakú" , akkor teljes tömege gyakorlatilag az adott átmérőn helyezkedik el. Így a tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = m \cdot R^2 = m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 5{,}4\ \text{kg} \cdot (0{,}14\text{m})^2 = 0{,}106\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

A gyorsító nyomaték munkája a mozgási energia növekedéssel egyenlő. Ez utóbbi:

$$\Delta E_m = \frac{\Theta\omega_2^2}{2} - \frac{\Theta\omega_1^2}{2} = \frac{0{,}106\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (94\text{rad}/\text{s})^2}{2} -$$
$$- \frac{0{,}106\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 (57\text{rad}/\text{s})^2}{2} = 468\ \text{J} - 172\ \text{J} = 296\ \text{J}$$

A gyorsító nyomaték így:

$$M = \frac{\Delta E_m}{\varphi} = \frac{296\ \text{J}}{1884\ \text{rad}} = \mathbf{0{,}157\ N \cdot m}$$

8. példa

Egy 1440/min fordulatszámmal forgó gépalkatrészben 135 mm-re a forgástengelytől egy 6 mm átmérőjű, 15 mm hosszú furat van. Az acélból készült forgó alkatrész ettől eltekintve a forgástengelyre szimmetrikus. Mekkora - forgástengelyre merőleges - erő ébred amiatt, hogy a furat megbontja a szimmetriát? Az acél sűrűsége 7800 kg/m^3.

K i d o l g o z á s :

A kérdéses erő a furat miatt hiányzó tömegmennyiséget kényszerítené körpályára.

Az adatok:

$n = 1440/\text{min}$
$R = 0{,}135\ \text{m}$
$r = 0{,}006\ \text{m}$
$l = 0{,}015\ \text{m}$
$\rho = 7800\ \text{kg/m}^3$

Számítsuk ki a szögsebességet!

$$\omega = \frac{2\pi n}{60\text{s}/\text{min}} = \frac{2\pi \cdot 1440/\text{min}}{60\text{s}/\text{min}} = \mathbf{150{,}8\ rad/s}$$

Számítsuk ki a hiányzó anyagmennyiséget!

Egy körhenger térfogatát kell első lépésben meghatároznunk,

$$V = r^2 \pi l = (0{,}006\ \text{m})^2 \pi \cdot 0{,}015\ \text{m} = 0{,}424 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$$

A hiányzó tömeg:

$$m = \rho V = 7800\ \text{kg}/\text{m}^3 \cdot 0{,}424 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 = 3{,}3\text{g}$$

A szimmetriát megzavaró, a forgástengelyre merőleges erő nagysága:

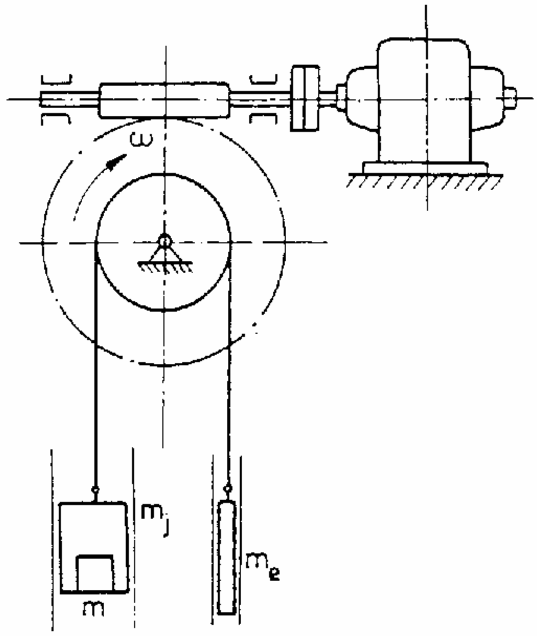
$$F_{cp} = mR\omega^2 = 0{,}0033\ \text{kg} \cdot 0{,}135\ \text{m} \cdot \left(150{,}8\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{10{,}1\ N}$$

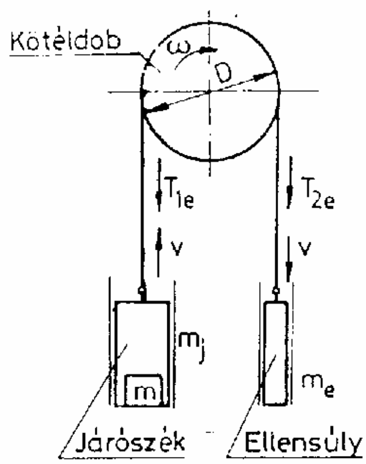
9. példa

Egy felsőgépházas személyfelvonó járószékének tömege 560 kg, a szállítható hasznos teher 320 kg, az ellensúly a szokásos nagyságú. Az aknahatásfok 76%. A kötéldob átmérője 0,52 m, fordulatszáma 26/min. a.) Mekkorák az elméleti kötélerők?
b.) Mekkora a teljesítmény igény a kötéldob tengelyén?

Kidolgozás:

$m_j = 560$ kg
$m = 320$ kg
$\eta_a = 0,76$
$D = 0,26$ m
$n = 26/\text{min}$
a.) $T_{1e} = ?$
$T_{2e} = ?$
b.) $P = ?$





78. ábra

Az ellensúly szokásos nagysága

$$m_e = m_j + \frac{m}{2} = 560\ \text{kg} + \frac{320}{2}\text{kg} = 720\ \text{kg}$$

a) Az elméleti kötélerők a 78. ábra alapján

$$T_{1e} = (m + m_j)g = (320\ \text{kg} + 560\ \text{kg})\ 9{,}81\ \text{m}/\text{s}^2 = \mathbf{8633\ N}$$

$$T_{2e} = m_e \cdot g = 720\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m}/\text{s}^2 = \mathbf{7063\ N}$$

b.) Az elméleti kerületi erő a teljes m teher emelésekor

$$F_e = T_{1e} - T_{2e} = 8633\ \text{N} - 7063\ \text{N} = \mathbf{1570\ N}$$

Az m teher emeléséhez szükséges elméleti nyomaték

$$M_e = \frac{D}{2} \cdot F_e = \frac{0{,}26}{2}\text{m} \cdot 1570\ \text{N} = \mathbf{408\ N \cdot m}$$

A hajtóművel szemben támasztott elméleti teljesítményigény:

$$P_e = M \cdot \omega$$

ω a kötéldob szögsebessége.

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60\ \text{s/min}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 26/\text{min}}{60\ \text{s/min}} = 2{,}72\ \text{rad/s}$$

$$P_e = 480\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot 2{,}72\ \text{rad/s} = 1110\ \text{W}$$

A kötéldobon fellépő - a hajtóművel szemben támasztott - valóságos teljesítményigény az aknahatásfok figyelembevételével

$$P = M \cdot \omega = \frac{P_e}{\eta_a} = \frac{1110\ \text{W}}{0{,}76} = \mathbf{1460\ W}$$