

Lineare Systeme im Zustandsraum

1 Linearisierung

1.1 Problematik und Lösung

Die meisten Zusammenhänge in der Wirklichkeit sind nichtlinearer Natur. Falls dennoch lineare Zusammenhänge beobachtet werden, wie z. B. beim ohmschen Gesetz (bei Metallen ist die Stromstärke proportional zur Spannung), ist dies eine Ausnahme und nicht die Regel!

Nichtlinearitäten sind aber für den Ingenieur meistens schwierig zu meistern. Für nichtlineare Systeme gibt es keine entsprechende Theorie wie sie für die linearen Systeme existiert. Nichtlineare Systeme weisen ausserdem „merkwürdige“ Eigenschaften auf, wie z. B. ihre (unter bestimmten Umständen) extreme Empfindlichkeit auf Anfangsbedingungen (chaotische Systeme). Abgesehen davon, sind die im Laufe der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelten Mittel zur Darstellung und Berechnung linearer Systeme so mächtig, dass damit in der Ingenieurpraxis die meisten der Probleme gelöst werden konnten und auch in Zukunft gelöst werden können. In Klartext: Auch nichtlineare Systeme werden, wenn immer möglich, mit „linearen Methoden“ behandelt.

Als Beispiel für dieses Vorgehen kann das Dimensionieren einer Verstärkerstufe genannt werden. Das Kennlinienfeld eines Transistors ist nichtlinear (und zudem noch stark Temperaturabhängig). Diese Aufgabe wird durch Aufteilen der Problemstellung in zwei Teilprobleme gelöst: der (zeitlich) konstante Arbeitspunkt wird statisch dimensioniert und das dynamische „Kleinsignalverhalten“ des Verstärkers kann als lineares Problem behandelt werden.

Wie und unter welchen Voraussetzungen kann also ein nichtlineares System mit „linearen Methoden“ behandelt werden? Um den nichtlinearen Zusammenhang zwischen zwei Grössen linearisieren zu können, muss der dynamische Arbeitsbereich dieser Grössen eingegrenzt bzw. begrenzt werden. Dies kann durch Festlegen eines (statischen) Arbeitspunkts erreicht werden. Der dynamische Arbeitsbereich liegt dabei in der Umgebung dieses Arbeitspunkts. Eine Linearisierung ist dann möglich, wenn zwischen der nichtlinearen Modell-Realität und der linearen Näherung keine grossen Abweichungen im betrachteten Arbeitsbereich existieren. Im Allgemeinen sind aber Nichtlinearitäten wie z. B. Signalbegrenzungen infolge Sättigung nicht linearisierbar.

Eine erste Möglichkeit der Linearisierung besteht darin, den nichtlinearen Zusammenhang um den Arbeitspunkt herum mit der **Tangente im Arbeitspunkt** anzunähern:

Sei eine differenzierbare, nichtlineare Funktion/Abbildung $y = f(x)$ für einen bestimmten Definitionsbereich von x gegeben. Die unabhängige Variable x führe kleine (zeitliche) Schwankungen Δx um einen mittleren Arbeitspunkt x_0 aus: $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$ (Δx kann dabei positiv oder negativ werden, x bleibt dabei im Definitionsbereich). Die Grösse $y = f(x)$ führt daher ebenfalls Schwankungen um y_0 aus: $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$. Durch Benutzen der Ableitung $y'(x) = df(x)/dx$ im Arbeitspunkt, kann für Δy folgende Näherung aufgestellt werden:

$$y - y_0 \approx \tilde{y} - y_0 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Geht man davon aus, dass sich die Grössen x und y nur unwesentlich um ihren "Arbeitspunkt" (x_0, y_0) verändern, so können durch die folgende Variablen-Substitution die Verhältnisse linearisiert werden:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta \tilde{y} &= \tilde{y} - y_0 \end{aligned} \quad \text{Die Beziehung zwischen } \Delta x \text{ und } \Delta \tilde{y} \text{ ist somit linear, d. h. } \Delta \tilde{y} \text{ ist proportional zu } \Delta x.$$

Bemerkung: Dieses Linearisierungsverfahren entspricht der Näherung des Funktionsverlaufs durch die **Taylor-Reihe**, wobei die Glieder mit "höheren" Ableitungen weggelassen werden:

$$\text{Taylor-Reihe: } y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} y'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \dots$$

$$\text{Näherung erster Ordnung: } y(x_0 + \Delta x) \approx \tilde{y}(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} y'(x_0) = y(x_0) + y'(x_0) \Delta x$$

Eine weitere Möglichkeit der Linearisierung besteht darin, den nichtlinearen Funktionsverlauf im betrachteten Bereich durch eine **Regressionsgerade** (lineare Regression) anzunähern:

Sei eine kontinuierliche nichtlineare Funktion/Abbildung $y = f(x)$ für den Definitionsbereich $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ gegeben. Die Grösse y kann durch eine Gerade angenähert werden: $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$. Die Koeffizienten a_0 und a_1 können so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen y und \tilde{y} in mehreren Punkten der Funktion minimiert¹ werden. Für die Linearisierung ergibt sich somit:

$$\text{Für } x \text{ im Bereich } x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x \text{ gilt } \Delta \tilde{y} = \tilde{y} - a_0 = a_1 x.$$

1.2 Beispiel

Der Zusammenhang zwischen der pro Zeiteinheit abgestrahlten Energie eines Körpers (Energiestromstärke) und seiner (absoluten) Temperatur T ist gegeben durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$I_{\text{Wab}} = \frac{dW_{\text{ab}}}{dt} = \sigma F T^4$$

dabei bedeuten:

$I_{\text{Wab}} = dW_{\text{ab}}/dt$	Energiestromstärke in W durch die Körperoberfläche infolge Strahlung
$\sigma = 5.67051 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	(Stefan-Boltzmann-Konstante)
F	abstrahlende Oberfläche des Körpers in m^2
T	Absolute Oberflächentemperatur des Körpers in K

Berücksichtigt man zusätzlich die Strahlung der Umgebung (mit Temperatur T_U) auf den Körper, so gilt für die resultierende Energiestromstärke (vom Körper an die Umgebung):

$$I_W = I_{\text{Wab}} - I_{\text{Wzu}} = \frac{dW}{dt} = \sigma F (T^4 - T_U^4)$$

Der Zusammenhang zwischen der Energiestromstärke I_W und der Temperaturdifferenz $\theta = T - T_U$ soll für den Bereich $80 \text{ }^\circ\text{C} \leq \theta \leq 120 \text{ }^\circ\text{C}$ und einer Umgebungstemperatur von $20 \text{ }^\circ\text{C}$ linearisiert werden. Die Körperoberfläche betrage 2 cm^2 .

a) Linearisierung durch Tangente

Der Arbeitspunkt für θ wird in der Mitte des Intervalls gelegt: $\theta_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, d. h. $T_0 = 393.15 \text{ K}$. Die entsprechende Arbeitsenergiestromstärke beträgt

$$I_{W0} = I_W|_{T=T_0} = \sigma F (T_0^4 - T_U^4) = 187.17 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Für die Tangente im Arbeitspunkt ergibt sich

¹ Methode der minimalen Fehlerquadrate, Gauss'sche Fehlerquadratmethode

$$\frac{dI_W}{d\vartheta} = \frac{dI_W}{dT} \frac{dT}{d\vartheta} = 4\sigma F T^3 \cdot 1 \quad \text{und damit} \quad \left. \frac{dI_W}{d\vartheta} \right|_{T=T_0} = 4\sigma F T_0^3 = 2.7564 \cdot 10^{-3} \text{ W K}^{-1}$$

Damit ergibt sich für die lineare Näherung:

$$\tilde{I}_W - I_{W0} = \left. \frac{dI_W}{d\vartheta} \right|_{T=T_0} (\vartheta - \vartheta_0) \quad \text{bzw.} \quad \Delta \tilde{I}_W = \left. \frac{dI_W}{d\vartheta} \right|_{T=T_0} \Delta \vartheta$$

b) Linearisierung durch Regressionsgerade

Die lineare Regression für das betrachtete Intervall liefert die Koeffizienten (ohne Herleitung²):

$$a_0 = -87.4739 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$a_1 = 2.7608 \cdot 10^{-3} \text{ W K}^{-1}$$

Damit ergibt sich für die lineare Näherung:

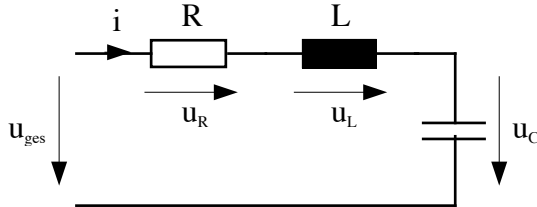
$$\tilde{I}_W - a_0 = a_1 \vartheta \quad \text{bzw.} \quad \Delta \tilde{I}_W = a_1 \vartheta$$

² Diese Koeffizienten können z. B. numerisch mit Matlab bestimmt werden.

2 Darstellung im Zustandsraum

2.1 Einführendes Beispiel

Bei einem RLC-Serieschwingkreis wird die Gesamtspannung $u_{\text{ges}}(t)$ als Eingangssignal $u(t)$ und die Spannung $u_C(t)$ über der Kapazität als Ausgangssignal $y(t)$ betrachtet.



Die mathematische Beschreibung dieses Systems führt auf folgende Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$LC\ddot{u}_C(t) + RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u_{\text{ges}}(t), \quad \text{d. h.} \quad LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y = u$$

Diese Beschreibungsform ist zwar mathematisch korrekt, aber aus folgenden Gründen nicht zweckmässig:

1. Die Beschreibung bzw. die Modellierung des Systems sollte so weit möglich die Struktur (den Aufbau) des Systems wiedergeben und die Variablen in den Gleichungen sollten eine physikalische Bedeutung aufweisen. Wie ist z. B. $\ddot{u}_C(t)$ zu interpretieren? Eine Modellierung des Schwingkreises wird sinnvollerweise von der Kapazität und der Induktivität, d. h. von den Energiespeichern ausgehen und diese Elemente abbilden.
2. Damit die Anfangsbedingungen einfach berücksichtigt werden können, sollten in der Beschreibung die Grössen vorkommen, aus denen der Energiegehalt des Systems direkt bestimmt werden kann. Im betrachteten Beispiel wären dies $u_C(t)$ und $i(t)$. Solche Grössen werden **Zustandsgrössen** genannt.
3. Die numerische Integration (Simulation) kann nicht direkt für eine Differentialgleichung n. Ordnung (mit $n > 1$) ausgeführt werden. Dafür ist es notwendig diese zuerst in ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln. Also ist es zweckmässig direkt ein solches Gleichungssystem aufzustellen.
4. Das numerische Verhalten von "physiknahen" Modellen mit (gekoppelten) Gleichungen 1. Ordnung für jeden Energiespeicher ist in vielen Fällen numerisch gutmütiger als andere Formen, insbesondere bei Systemen höherer Ordnung ($n > 10$).

Eine diesen Kriterien entsprechende Modellierung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} i = C\dot{u}_C & \quad \rightarrow \quad \dot{u}_C = \frac{1}{C}i \\ u_L = L\dot{i} & \quad \rightarrow \quad \dot{i} = \frac{1}{L}u_L \end{aligned}$$

Die Grösse u_L muss aus diesen Gleichungen eliminiert und durch die Grössen u_C , i und u_{ges} ausgedrückt werden. Dies kann mit dem Maschensatz erfolgen:

$$u_{\text{ges}} = u_R + u_L + u_C \quad \rightarrow \quad u_L = u_{\text{ges}} - Ri - u_C$$

Das Gleichungssystem mit zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung lautet also:

$$\begin{aligned}\dot{u}_c &= \frac{1}{C} i \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u_{\text{ges}}\end{aligned}$$

mit der Einführung der Zustandsvariablen $x_1(t) = u_c(t)$ und $x_2(t) = i(t)$ und den Eingangs- und Ausgangsvariablen $u(t) = u_{\text{ges}}(t)$ und $y(t) = u_c(t)$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann in Matrixform wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dazu kommen die Anfangsbedingungen:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_c(0) \\ i(0) \end{pmatrix}$$

2.2 Grundform

Der Zusammenhang zwischen den Ein- und den Ausgangsgrößen eines *linearen, dynamischen* Systems n-ter Ordnung kann allgemein (in Matrixform) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

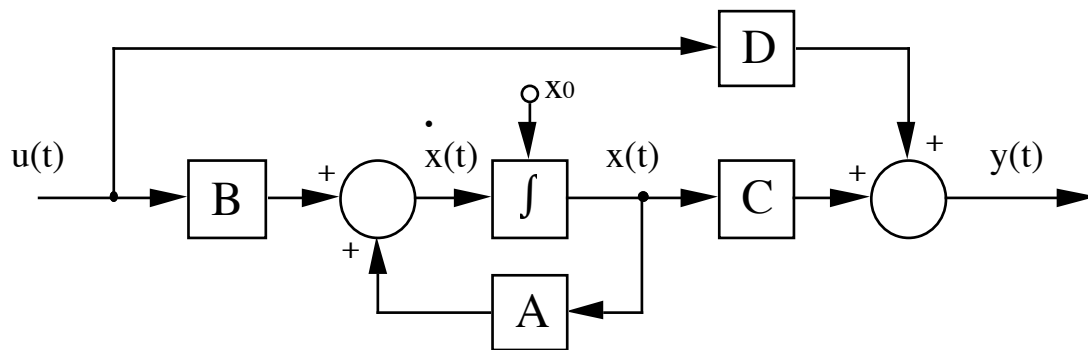
Die erste Gleichung, die **Zustandsdifferentialgleichung**, ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit n (gekoppelten) Gleichungen 1-ter Ordnung³. Die Elemente des Vektors x sind die Zustandsvariablen⁴. Zu diesem Differentialgleichungssystem gehören die n Anfangsbedingungen⁵: $x(t=0) = x_0$. Der zeitliche Verlauf der m Eingangsgrößen des Systems wird durch den Vektor u(t) dargestellt. Die zweite Gleichung ist die **Ausgangsgleichung**. Der zeitliche Verlauf der p Ausgangsgrößen wird durch den Vektor y(t) dargestellt.

³ Jede gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung kann als System mit n Differentialgleichungen 1-er Ordnung dargestellt werden. Dies gilt sogar für nichtlineare Gleichungen. Es gibt allerdings beliebig viele Systeme die mathematisch der DGL n-ter Ordnung äquivalent sind.

⁴ Physikalische Systeme mit n unabhängigen Energiespeichern haben genau n Zustandsvariablen. Aus diesen kann der Energiegehalt des Systems bestimmt werden. Die einzelnen Zustandsvariablen sollten wenn möglich so gewählt werden, das aus ihnen der entsprechende Energiegehalt der einzelnen Speichern direkt bestimmt werden kann: z. B. Spannungen bei Kapazitäten, Stromstärken bei Induktivitäten, Geschwindigkeit bei Trägheit (Masse, kinetische Energie).

⁵ Für physikalische Systeme lassen sich die Anfangsbedingungen aus dem Energiegehalt der unabhängigen Energiespeichern ermitteln.

Diese Gleichungen können als Blockschaltbild⁶ dargestellt werden. Die Verbindungen (Pfeile) stellen hier vektorielle Grössen dar.



Dabei sind

u	Eingangs- oder Steuervektor	$m \times 1$ -Vektor
x	Zustandsvektor	$n \times 1$ -Vektor
x_0	Anfangswert des Zustandsvektors	$n \times 1$ -Vektor
y	Ausgangs- oder Messvektor	$p \times 1$ -Vektor
A	Systemmatrix	$n \times n$ -Matrix
B	Eingangs- oder Steuermatrix	$n \times m$ -Matrix
C	Ausgangs- oder Messmatrix	$p \times n$ -Matrix
D	Durchgangsmatrix	$p \times m$ -Matrix

Die Anzahl der Zustände n entspricht der Ordnung, bzw. der voneinander unabhängigen Energiespeichern des Systems. Die n Komponenten des Zustandsvektors können als Koordinaten in einem n -dimensionalen Raum aufgefasst werden. Dieser Vektor-Raum wird als **Zustandsraum** bezeichnet.

Mimo- und siso-Systeme

Ein wesentlicher Vorteil der Zustandsraumdarstellung liegt in der Tatsache dass damit neben Systemen mit nur einer Eingangs- und einer Ausgangsgrösse (*siso-system*: single input single output), auch Systeme mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrössen (*mimo-system*: multiple input multiple output) kompakt beschrieben werden können.

⁶ Dieses Blockschaltbild beschreibt die Zusammenhänge im *Zeitbereich*: d.h. die Variablen u , x und y sind Funktionen der Zeit. Für *zeitinvariante* Systeme sind die Matrizen A , B , C und D konstant.

2.3 Ähnlichkeitstransformation (similarity transform)

Es zeigt sich, dass ein und dasselbe LTI-System mit verschiedenen Zustandsvariablen dargestellt werden kann, wie dies aus dem einführenden Beispiel ersichtlich ist. Als Zustandsgrößen können dort z. B. sowohl $u_c(t)$ und $i(t)$ als auch u_c und du_c/dt benutzt werden. Allgemein müssen die Zustandsgrößen nicht direkt messbaren physikalischen Größen entsprechen, es muss nur der Energiegehalt des Systems damit bestimmt werden können.

Die Umrechnung einer Zustandsraumdarstellung mit dem Zustandsvektor \underline{x}

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}\end{aligned}\quad \text{und den Anfangsbedingungen } \underline{x}(0)$$

in eine äquivalente Form mit dem neuen Zustandsvektor \underline{z} , kann Allgemein mit der $n \times n$ -Transformationsmatrix⁷ T wie folgt vorgenommen werden:

$$\underline{x} = T\underline{z} \quad \rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = T\dot{\underline{z}} \quad \rightarrow \quad T\dot{\underline{z}} = \underline{A}T\underline{z} + \underline{B}\underline{u}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\underline{z}} &= T^{-1}\underline{A}T\underline{z} + T^{-1}\underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}T\underline{z} + \underline{D}\underline{u}\end{aligned}\quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned}\dot{\underline{z}} &= \underline{A}_z\underline{z} + \underline{B}_z\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}_z\underline{z} + \underline{D}\underline{u}\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\underline{z}(0) = T^{-1}\underline{x}(0)$.

Zur numerischen Berechnung des entsprechenden Anfangswertproblems kann es günstig sein eine solche Transformation vorzunehmen. Dabei können die Gleichungen durch Diagonalisierung der Systemmatrix und Skalierung der Zustandsvariablen verändert werden. Dadurch wird das numerische Verhalten (des diskretisierten) Anfangswertproblems gegebenenfalls gutmütiger (besser konditioniert) als in der ursprünglichen Form.

Matlab kennt dafür die Funktion `balance`, die zu diesem Zweck wie folgt eingesetzt werden kann:

```
[T,Az]=balance(A); % Ausgleichen, Ausbalancieren
Bz=T\B;
Cz=C*T;
z0=T\x0;
```

Kompakter:

```
[T,Az]=balance(A);
[Az,Bz,Cz,Dz]=ss2ss(A,B,C,D,T);
```

⁷ T muss regulär sein, d.h. nicht-singulär. Die Transformation wird *Ähnlichkeitstransformation* der Matrix A genannt.

2.3 Normalformen

Die Bestimmung der Matrizen A, B, C und D aus dem Frequenzgang oder der Übertragungsfunktion kann auf mehreren Wegen erfolgen. Es gibt allerdings beliebig viele mathematisch äquivalente Darstellungen.

Frequenzgang (mit $s = j\omega$) oder Übertragungsfunktion (mit s als Laplace-Operator)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{mit } m \leq n \text{ und der Normierung}^8 \quad a_n = 1$$

2.3.1 Regelungsnormalform (Frobenius-Normalform)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad D = (b_n)$$

In dieser Normalform hat die Matrix A die sogenannte *Begleitmatrixform* (companion matrix): die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} entsprechen den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Matrix. Diese Normalform entspricht der direkten Programmierung des Frequenzgangs bzw. der Übertragungsfunktion.

Diese Darstellung ist günstig für einen Reglerentwurf⁹, weil die Eingangsgrösse $u(t)$ nur in der n -ten Zeile des Differentialgleichungssystems wirkt.

2.3.2 Beobachtungsnormalform (Beobachternormalform)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \quad D = (b_n)$$

Die Beobachtungsnormalform ist dual zur Regelungsnormalform. Sie kann aus dieser durch die Transposition der Systemmatrix und durch die Vertauschung (und Transposition) der Matrizen B und C erhalten werden.

Diese Darstellung ist günstig für den Beobachterentwurf¹⁰, weil der Zustand $x_n(t)$ mit der Ausgangsgrösse $y(t)$ identisch ist.

⁸ Die Normierung ist ohne Einfluss auf die Übertragungsfunktion, da im Fall wo $a_n \neq 1$ sein sollte, alle Koeffizienten des Zähler- und des Nennerpolynoms durch diese Grösse dividiert werden können. Bei den Koeffizienten a_k und b_k soll es sich also im folgenden Text um die normierten handeln.

⁹ Das *Regelungsproblem* besteht darin, ein Eingangssignal zu finden, dass zusammen mit den herrschenden Zustandsgrössen zu einem gewünschten Ausgangssignal führt.

2.3.3 Diagonalform

Sollte das Gleichungssystem durch Diagonalisierung entkoppelt werden, so kann dies durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Eigenvektormatrix (EV) als Transformations-Matrix werden. Wird für T die Matrix mit den Eigenvektoren¹¹ von A als Spalten verwendet, so ergibt diese Transformation eine Matrix A_z in Diagonalform¹². Damit werden die einzelnen Gleichungen des Differentialgleichungssystems entkoppelt.

Mit Matlab:

```
[EV,EW]=eig(A);
[Az,Bz,Cz,Dz]=ss2ss(A,B,C,D,EV);
```

Bei einer reinen Diagonalisierung werden die Eigenwerte der Systemmatrix (A bzw. A_z) nicht verändert.

Die Diagonalform kann aber auch ohne Bestimmung der Eigenvektoren gefunden werden. Dafür muss die Übertragungsfunktion als Partialbruchzerlegung vorliegen. Damit können die einzelnen Terme parallelgeschaltet werden.

Beispiel: System 5. Ordnung mit reellem Einfachpol ($-\lambda_1$), reellem Doppelpol ($-\lambda_2$) und konjugiert-komplexem Polpaar ($\lambda_3 = -\sigma \pm j\omega$)

Die Übertragungsfunktion liege in Partialbruchzerlegung vor:

$$H(s) = \beta_{00} + \frac{\beta_{10}}{s + \lambda_1} + \frac{\beta'_{20}}{s + \lambda_2} + \frac{\beta''_{20}}{(s + \lambda_2)^2} + \frac{\beta_{31}s + \beta_{30}}{s^2 + 2\sigma s + (\sigma^2 + \omega^2)}$$

Für die verschiedenen Terme können folgende Teilformen aufgestellt werden:

$A_0 = (0)$	$B_0 = (0)$	$C_0 = (0)$	$D_0 = (\beta_{00})$
$A_1 = (-\lambda_1)$	$B_1 = (1)$	$C_1 = (\beta_{10})$	$D_1 = (0)$
$A_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$	$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = (\beta'_{20} \quad \beta''_{20})$	$D_2 = (0)$
$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\sigma^2 + \omega^2) & -2\sigma \end{pmatrix}$	$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$C_3 = (\beta_{30} \quad \beta_{31})$	$D_3 = (0)$

¹⁰ Das Beobachterproblem besteht darin, aufgrund der Verläufe der Eingangs- und der Ausgangssignale die Werte der Systemzustände zu finden.

¹¹ Im Fall wo die Matrix A *vielfache Eigenwerte* besitzt, müssen die sogenannten *verallgemeinerten Eigenvektoren* für die Transformation verwendet werden.

¹² Im Fall wo die Matrix A *vielfache Eigenwerte* besitzt, ergibt sich keine reine Diagonalform mehr, sondern die *Jordan-Form* mit sogenannten Jordan-Blöcken in den Diagonalen.

Dies ergibt für die gesamte Übertragungsfunktion folgende Diagonalform:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\sigma^2 + \omega^2) & -2\sigma \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\beta_{10} \quad \beta'_{20} \quad \beta''_{20} \quad \beta_{30} \quad \beta_{31}) \quad D = (\beta_{00})$$