

Technische Fachhochschule Berlin
Fachbereich VI (Informatik und Medien)

Manfred Ottens

**GRUNDZÜGE DER REGELUNGSTECHNIK
IM ZUSTANDSRAUM**

Skript zur Lehrveranstaltung

Berlin, Sommersemester 2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung**
- 2 Systembeschreibung auf der Basis des mathematischen Zustandsmodells**
 - 2.1 Strukturell besondere Formen des Zustandsmodells
 - 2.1.1 Transformation auf Diagonalform
 - 2.1.2 Transformation auf Übertragungsfunktionsform (Beobachter-Normalform)
 - 2.1.3 Transformation auf Regler-Normalform
- 3 Systemeigenschaften**
 - 3.1 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit
 - 3.2 Stabilität
- 4 Regelkreise im Zustandsraum**
 - 4.1 Entwurf eines Zustandsreglers
 - 4.2 Entwurf eines Zustandsbeobachters
 - 4.3 Zustandsregelkreise mit Beobachter
 - 4.4 Geführte und gestörte Zustandsregelkreise
- 5 Zeitdiskrete Systeme im Zustandsraum**

Literaturverzeichnis

Anhang

- A1 Lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren**

1 Einleitung

Die klassische System- und Regelungstechnik, deren Grundlagen wir in den vorangegangenen Vorlesungen (/1/ und /2/) kennengelernt haben, bediente sich zur Systemanalyse und -synthese (Reglerentwurf) primär des Bild- und Frequenzbereiches.

Beginnend ab ca. 1960 entwickelte sich eine neue Methode zur Behandlung von Systemanalyse und -Synthesaufgaben, die sogenannte Zustandsraummethode, die überwiegend im Zeitbereich arbeitet.

Die Beschreibung von Systemen im Zustandsraum basiert auf der uns schon bekannten Darstellung des mathematischen Modells in Form eines Systems von n Differentialgleichungen 1. Ordnung, dem mathematischen Zustandsmodell.

Bis zu diesem Zeitpunkt war eine Systemmodellierung im Zeitbereich in Form einer Differentialgleichung n . Ordnung üblich.

Es zeigte sich, daß sich insbesondere zeitvariable Systeme und Mehrgrößensysteme sehr gut mit dieser Methode beschreiben ließen. Durch weitgehende Nutzung des Matrizenkalküls ist die Zustandsraum-Methode darüber hinaus sehr formal und damit zur Problemlösung auf dem Digitalrechner sehr gut geeignet. Einige Erkenntnisse ließen sich erst mit der Einführung der Zustandsraum-Methode schöpfen, z.B. die später noch zu besprechende Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemzuständen oder die Entwicklung sog. dynamischer Beobachter.

Mathematische Grundlagen der Zustandsraum-Methode sind die lineare Algebra und die Matrizenrechnung, woher auch der etwas abstrakte Begriff des Zustandsraumes (Vektorraumes) abzuleiten ist. Aus Zeitgründen können wir auf diese grundlegende Theorie nicht eingehen. Notwendige Grundlagenkenntnisse über Matrizen können in einem Anhang von /1/ und in /5/ und /6/ nachgelesen werden.

2 Systembeschreibung auf der Basis des mathematischen Zustandsmodells

Im Skript "Grundlagen der Systemtheorie" /1/ haben wir uns ausführlich mit der Systembeschreibung von Übertragungssystemen in Form von Zustandsmodellen auseinandergesetzt. An einigen Beispielen haben wir gezeigt, daß sich jedes lineare oder linearisierte, zeitinvariante Eingrößensystem durch folgendes Zustandsmodell beschreiben läßt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad ; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$y(t) = \underbrace{[c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]}_{\underline{c}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) \quad (2.0.1)$$

Weiterhin hatten wir noch eine abgekürzte Schreibweise des Zustandsmodells eingeführt

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ y(t) &= \underline{c}'\underline{x}(t) \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

Dabei sind bei einem System n-ter Ordnung:

- \underline{A} : die n x n Systemmatrix
- \underline{b} : der n x 1 Eingangsvektor
- \underline{c} : der 1 x n Ausgangsvektor, der auch häufig als \underline{c}' geschrieben wird, um anzudeuten, daß es sich um einen Zeilenvektor handelt.
- $\dot{\underline{x}}(t)$: der n x 1 Vektor der Differentialquotienten des Zustandsvektors
- $\underline{x}(t)$: der n x 1 Vektor der Zustandsgrößen
- $u(t)$: die skalare Eingangsgröße

- $y(t)$: die skalare Ausgangsgröße
- $\underline{x}(0)$: Vektor der Anfangszustände der Zustandsgrößen
- \underline{x}_0 : Vektor der Werte der Anfangszustände
- n : Ordnung des Systems (Anzahl der Differentialgleichungen 1. Ordnung, Anzahl der unabhängigen Energiespeicher im System).

Wie man erkennt, wurde der skalare Durchgangsfaktor d in der Systembeschreibung weggelassen. Dies ist i.a. keine Einschränkung, da d keinen Einfluß auf die Zustandsgrößen hat und in den meisten realen Systemen nicht vorkommt. Diese Maßnahme soll der Übersichtlichkeit dienen.

Zustandsmodelle lassen sich auch in Form von Strukturbildern anschaulich grafisch darstellen. Man benötigt dazu die Strukturbilderelemente aus Bild 2.0.1 .

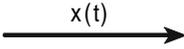
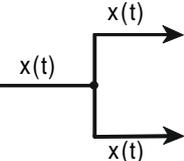
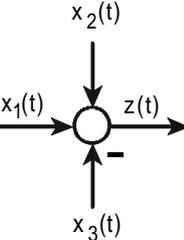
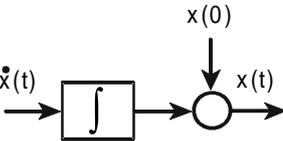
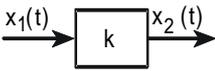
	<p><u>Wirkungslinie</u> eines Signals $x(t)$; das Signal wirkt rückwirkungsfrei von links nach rechts.</p>
	<p><u>Verzweigungsstelle</u> des Signals $x(t)$; das Signal wird ausschließlich verzweigt und erfährt sonst keine Veränderung.</p>
	<p><u>Signalsummationsstelle</u>; das Ausgangssignal ist die vorzeichengerechte Summe der Eingangssignale: $z(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t)$.</p>
	<p><u>Integrator</u> $x(t) = x(0) + \int \dot{x}(t) dt$</p>
 <p>$k = \text{konstant}$</p>	<p><u>Verstärkungsfaktor</u> , Koeffizient $x_2(t) = k x_1(t)$</p>

Bild 2.0.1 : Strukturbilderelemente für Strukturbilder kontinuierlicher Systeme im Zeitbereich

Damit lassen sich Strukturbilder direkt aus der Gleichung des Zustandsmodell ableiten.

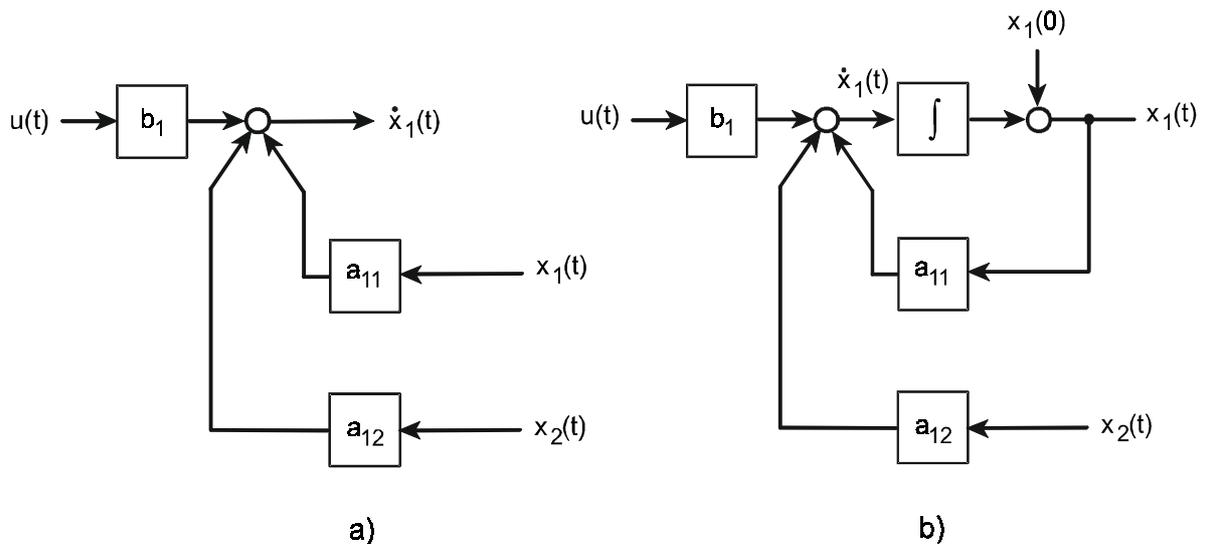
Beispiel 2.0.1: Zeichne das Strukturbild des folgenden Zustandsmodells

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (2.0.3)$$

Wir multiplizieren (2.0.3) zunächst aus

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \end{aligned} \quad (2.0.4)$$

und sehen, daß sich z.B. $\dot{x}_1(t)$ aus der Summe $a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t)$ zusammensetzt. Dies können wir wie folgt bildlich darstellen (a):



Mit Hilfe des Integrators (b) kann aus $\dot{x}_1(t)$ die Zustandsgröße $x_1(t)$ berechnet werden:

$$x_1(t) = x_1(0) + \int x_1(t) dt = x_1(0) + \int (a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1(t) u(t)) dt,$$

Führt man diese Operation auch für die zweite Differentialgleichung aus und berücksichtigt die Ausgangsgleichung, erhält man das Strukturbild des gesamten Zustandsmodells (2.0.3):

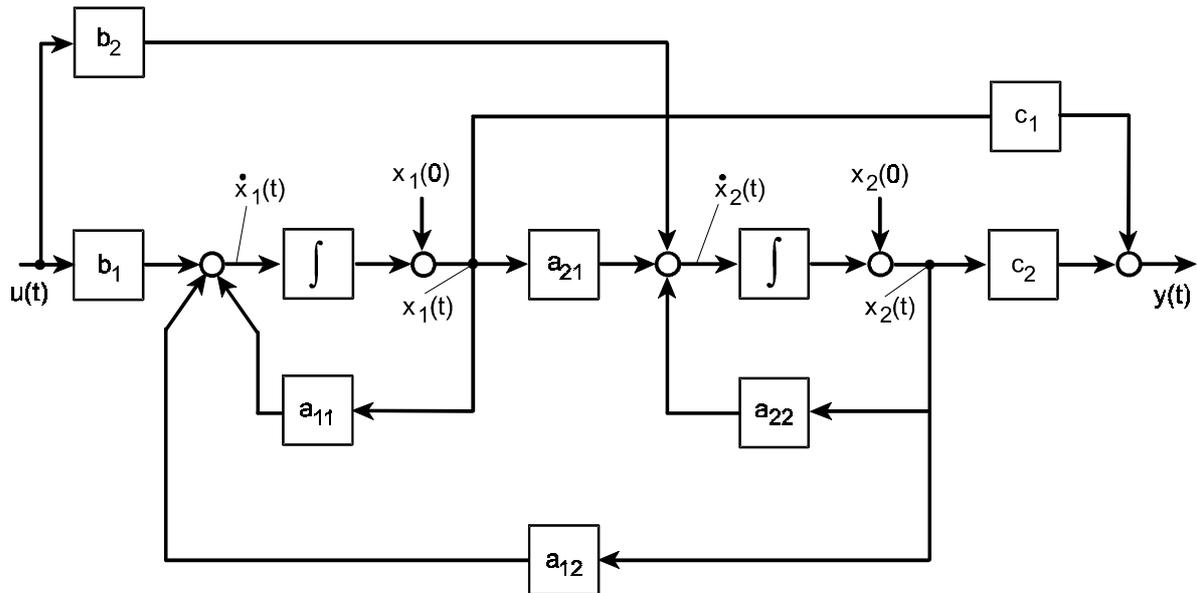


Bild 2.0.2 : Strukturbild des Zustandsmodells (2.0.3)

Für mathematische Zustandsmodelle kann man mit Hilfe des Matrizenkalküls eine geschlossene Lösung angeben, d.h. einen analytischen Ausdruck, mit dem man die Ausgangsgröße $y(t)$ und die Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ als Funktion der Eingangsgröße $u(t)$ und der Anfangswerte der Zustandsgrößen für jedes beliebige, lineare, kontinuierliche System berechnen kann. Zur Ableitung dieser Beziehung transformieren wir (2.0.2) in den Laplace-Bereich

$$s \underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A} \underline{X}(s) + \underline{b} U(s) \quad (2.0.5a)$$

$$Y(s) = \underline{c}' \underline{X}(s) . \quad (2.0.5b)$$

Bringt man in (2.0.5a) $\underline{X}(s)$ auf die linke und $\underline{x}(0)$ auf die rechte Seite

$$s \underline{X}(s) - \underline{A} \underline{X}(s) = \underline{b} U(s) + \underline{x}(0) \quad (2.0.6)$$

und klammert $\underline{X}(s)$ aus (nach den Gesetzen der Matrizenrechnung muß s dabei mit der Einheitsmatrix \underline{E} multipliziert werden)

$$(s \underline{E} - \underline{A}) \underline{X}(s) = \underline{b} U(s) + \underline{x}(0) , \quad (2.0.7)$$

kann man die Gleichung nach $\underline{X}(s)$ auflösen

$$\underline{X}(s) = (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} U(s) + (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{x}(0) . \quad (2.0.8)$$

Setzt man schließlich (2.0.8) in (2.0.5b) ein

$$Y(s) = \underline{c}' (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} U(s) + \underline{c}' (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{x}(0) \quad (2.0.9)$$

und nennt, wie in der Literatur üblich

$$(s \underline{E} - \underline{A})^{-1} = \underline{\phi}(s) , \quad (2.0.10)$$

kann man (2.0.9) mit Hilfe des Faltungs- und Linearitätssatzes der Laplace-Transformation /1/ in den Zeitbereich zurücktransformieren. Wir erhalten dann

$$y(t) = \int_0^t \underline{c}' \underline{\phi}(t-\tau) \underline{b} u(\tau) d\tau + \underline{c}' \underline{\phi}(t) \underline{x}(0) \quad (2.0.11)$$

und mit

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \underline{\phi}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \} \quad (2.0.12)$$

die geschlossene Lösung des Zustandsmodells (2.0.2). $\phi(t)$ wird häufig als Übergangs- oder auch als Transitionsmatrix bezeichnet. Der erste Term auf der rechten Seite von (2.0.11) beschreibt die Wirkung des Eingangssignals $u(t)$ auf das Ausgangssignal, der zweite Term die Wirkung der Anfangszustände der Zustandsgrößen $\underline{x}(0)$ auf $y(t)$.

Führt man sich die Definition der Übertragungsfunktion vor Augen (vergleiche /1/)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} ; \quad \underline{x}(0) = 0 , \quad (2.0.13)$$

kann man aus (2.0.9) direkt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{c}' (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} \quad (2.0.14)$$

ablesen. Der Ausdruck

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \quad (2.0.15)$$

wird nach den Gesetzen der Matrizeninversion wie folgt berechnet (vergleiche Anhang A2 von /1/ "Grundlagen der Matrizenrechnung und linearer Gleichungssysteme")

$$\underline{\phi}(s) = (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s \underline{E} - \underline{A})}{\det(s \underline{E} - \underline{A})} \quad (2.0.16)$$

Der Nenner von $\phi(s)$ wird häufig als charakteristisches Polynom $\Delta(s)$ von (2.0.2) bezeichnet

$$\Delta(s) = \det(s \underline{E} - \underline{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0. \quad (2.0.17)$$

Bei einem Zustandsmodell n-ter Ordnung ist das charakteristische Polynom auch vom Grad n. Die n Nullstellen von $\Delta(s)$ werden häufig als Eigenwerte der Systemmatrix A bezeichnet.

Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge berechnen wir folgendes

Beispiel 2.0.2: Gegeben ist das folgende Zustandsmodell eines Übertragungssystems

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ +0,5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} u(t); \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad (2.0.18)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Berechne den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$

- für $u(t) = \sigma(t)$; $\Delta u = 1$ und $x_{10} = x_{20} = 0$,
- für $x_{10} = 1$ und $x_{20} = u(t) = 0$ und
- bestimme die Übertragungsfunktion.

Lösung a):

- Berechnung der Transitionsmatrix

$$\underline{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \underline{\phi}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s \underline{E} - \underline{A})^{-1} \}$$

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = [s\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})},$$

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+2 \end{bmatrix} = (s+2) \cdot (s+2) - [(-2) \cdot (-0,5)] \\ &= s^2 + 4s + 3 = (s+1) \cdot (s+3) = \Delta(s), \quad (2.0.19) \end{aligned}$$

$$\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \text{adj} \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 0,5 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+4s+3} & \frac{2}{s^2+4s+3} \\ \frac{0,5}{s^2+4s+3} & \frac{s+2}{s^2+4s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Bei der Operation $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}$ können die Matrixelemente $\varphi_{i,k}$ einzeln transformiert werden. Um sie mit Hilfe der Transformationstabelle aus /1/ transformieren zu können, müssen die $\varphi_{i,k}$ in Partialbrüche zerlegt werden:

$$\varphi_{11}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+3}$$

$$\varphi_{12}(s) = \frac{2}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$\varphi_{21}(s) = \frac{0,5}{s^2+4s+3} = \frac{0,25}{s+1} - \frac{0,25}{s+3}$$

$$\varphi_{22}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+3}.$$

Nach der Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man damit folgende Transitionsmatrix:

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \underline{\phi}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) & (e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,25(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix} .\end{aligned}\tag{2.0.20}$$

- Berechnung von $y(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$; $\Delta u = 1$; $\underline{x}(0) = 0$

$$y(t) = \underbrace{\underline{c}' \underline{\phi}(t) \underline{x}(0)}_{=0} + \int_0^t \underline{c}' \underline{\phi}(t - \tau) \underline{b} u(\tau) d\tau .$$

Der erste Term wird gleich Null, da laut Aufgabenstellung $\underline{x}(0) = 0$ ist. $\underline{\phi}(t-\tau)$ wird realisiert, indem in (2.0.20) t formal durch $(t - \tau)$ ersetzt wird. $u(\tau)$ ist gleich 1, da $u(t) = 1 \cdot \sigma(t)$ gleich 1 ist für $t \geq 0$:

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5(e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}) & (e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}) \\ 0,25(e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}) & 0,5(e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5(e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}) \\ 0,75(e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}) \end{bmatrix} d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t 0,75(e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}) d\tau$$

$$y(t) = 0,75 e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau + 0,75 e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau$$

$$y(t) = 0,75 e^{-t} (e^t - 1) + 0,75 e^{-3t} \left(\frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\underline{\underline{y(t) = 1 - 0,75 e^{-t} - 0,25 e^{-3t} .}}\tag{2.0.21}$$

Lösung b): Berechnung von $y(t)$ für $x_{10} = 1$ und $x_{20} = u(t) = 0$

$$y(t) = \underline{c}' \underline{\phi}(t) \underline{x}(0) + \underbrace{\int_0^t \underline{c}' \underline{\phi}(t - \tau) \underline{b} u(\tau) d\tau}_0$$

$$y(t) = \underline{c}' \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \underline{x}(0) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \end{bmatrix} = \varphi_{21}(t) = \underline{\underline{0,25 (e^{-t} - e^{-3t})}}. \quad (2.0.22)$$

Lösung c): Berechnung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \underline{c}' \underline{\phi}(s) \underline{b} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1,5\varphi_{12}(s) \\ 1,5\varphi_{22}(s) \end{bmatrix} = 1,5 \varphi_{22}(s)$$

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{1,5(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{1,5s + 3}{s^2 + 4s + 3}}}. \quad (2.0.23)$$

Man erkennt, daß bis auf noch zu besprechende Ausnahmefälle das Nennerpolynom von $G(s)$ (2.0.23) und das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ der Systemmatrix des Zustandsmodells identisch sind.

2.1 Strukturell besondere Formen des Zustandsmodells

Wenn ein Zustandsmodell aus einer physikalisch/mathematischen Modellbildung eines realen Übertragungssystems hervorgeht, bestimmt die Physik des Übertragungssystems die Struktur des Zustandsmodells. Wir haben die Zusammenhänge relativ intensiv bei verschiedenen mathematisch/physikalischen Modellbildungen in /1/ kennengelernt. Für bestimmte Systemanalyse und -Synthesezwecke kann es jedoch sinnvoll sein, wenn die Modellstruktur eine bestimmte ausgezeichnete Form hat, z.B. möglichst viele Nullen in der Systemmatrix \underline{A} .

Mit Hilfe sogenannter Ähnlichkeitstransformationen kann man ein beliebiges Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \\ y(t) &= \underline{c}' \underline{x}(t)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

in ein anderes ähnliches Modell wandeln

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t)^* &= \underline{A}^* \underline{x}(t)^* + \underline{b}^* u(t) \\ y(t) &= \underline{c}'^* \underline{x}(t)^*,\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

das diese strukturell besonders ausgezeichnete Matrizen \underline{A}^* , \underline{b}^* und \underline{c}'^* besitzt. Zu dieser Transformation muß eine bestimmte reguläre $n \times n$ - Matrix \underline{T} gewählt werden, die die Zustandsvektoren wie folgt transformiert

$$\underline{x}(t)^* = \underline{T} \underline{x}(t) \quad \text{bzw.} \tag{2.1.3a}$$

$$\underline{x}(t) = \underline{T}^{-1} \underline{x}(t)^* . \tag{2.1.3b}$$

Substituiert man in (2.1.1) $\underline{x}(t)$ durch (2.1.3b), ergibt sich

$$\begin{aligned}\underline{T}^{-1} \dot{\underline{x}}(t)^* &= \underline{A} \underline{T}^{-1} \underline{x}(t)^* + \underline{b} u(t) \\ y(t) &= \underline{c}' \underline{T}^{-1} \underline{x}(t)^* .\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Um wieder ein mit (2.1.1) vergleichbares Modell zu erhalten, muß \underline{T}^{-1} auf der linken Seite der ersten Gleichung von (2.1.4) verschwinden. Zu diesem Zweck wird von links mit \underline{T} multipliziert

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t)^* &= \underbrace{\underline{T} \underline{A} \underline{T}^{-1}}_{\underline{A}^*} \underline{x}(t)^* + \underbrace{\underline{T} \underline{b}}_{\underline{b}^*} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\underline{c}' \underline{T}^{-1}}_{\underline{c}'^*} \underline{x}(t)^* .\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

Damit ist (2.1.1) in die Form (2.1.2) transformiert und es gelten die Beziehungen

$$\underline{A}^* = \underline{T} \underline{A} \underline{T}^{-1} \quad ; \quad \underline{b}^* = \underline{T} \underline{b} \quad ; \quad \underline{c}'^* = \underline{c}' \underline{T}^{-1} . \tag{2.1.6}$$

Obwohl beide Systembeschreibungen verschiedene Zustandsgrößenverläufe haben, sind

- die Nullstellen von $\Delta(s)$ von \underline{A} und \underline{A}^* identisch,
- $\det \underline{A} = \det \underline{A}^*$
- und das Eingangs- /Ausgangsverhalten ist gleich.

Selbstverständlich ist auch die Systemordnung die gleiche.

Die Frage, die sich nun erhebt, ist, welche Transformationsmatrix \underline{T} bzw. \underline{T}^{-1} gewählt werden muß, um auf eine bestimmte strukturell ausgezeichnete Form der Matrizen \underline{A}^* , \underline{b}^* und \underline{c}^* zu gelangen. An den drei folgenden Beispielen wollen wir diese Frage klären.

2.1.1 Transformation auf Diagonalform

Wählt man als Transformationsmatrix \underline{T}^{-1} die sogenannte Matrix der Eigenvektoren \underline{v}_i von \underline{A} (siehe Anhang A1)

$$\underline{T}^{-1} = \underline{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.1.7)$$

die durch folgende Bestimmungsgleichung definiert ist

$$\underline{A} \underline{v}_i = s_i \underline{v}_i, \quad (2.1.8a)$$

erhält man (sofern \underline{A} nur einfache Eigenwerte s_i hat) nach der Transformation (2.1.6) eine Systemmatrix, die außer den Eigenwerten s_i auf der Hauptdiagonalen nur mit Nullen besetzt ist. Die strukturell ausgezeichnete Form des transformierten Übertragungssystem-Modells besteht darin, daß es in eine entkoppelte Parallelstruktur, wie man sie auch durch eine Partialbruchzerlegung erhalten würde, umgeformt ist. Wir wollen den Vorgang der Transformation an einem Beispiel verdeutlichen und das Ergebnis diskutieren.

Beispiel 2.1.1: Bilde das entkoppelte Modell mit der Diagonalform der Systemmatrix von unserem Beispielmodell (2.0.18).

Um die Auswirkung der Transformation deutlicher erkennen zu können, soll zunächst das Strukturbild des Originalmodells gezeichnet werden

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ +0,5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} u(t) ; \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) .$$

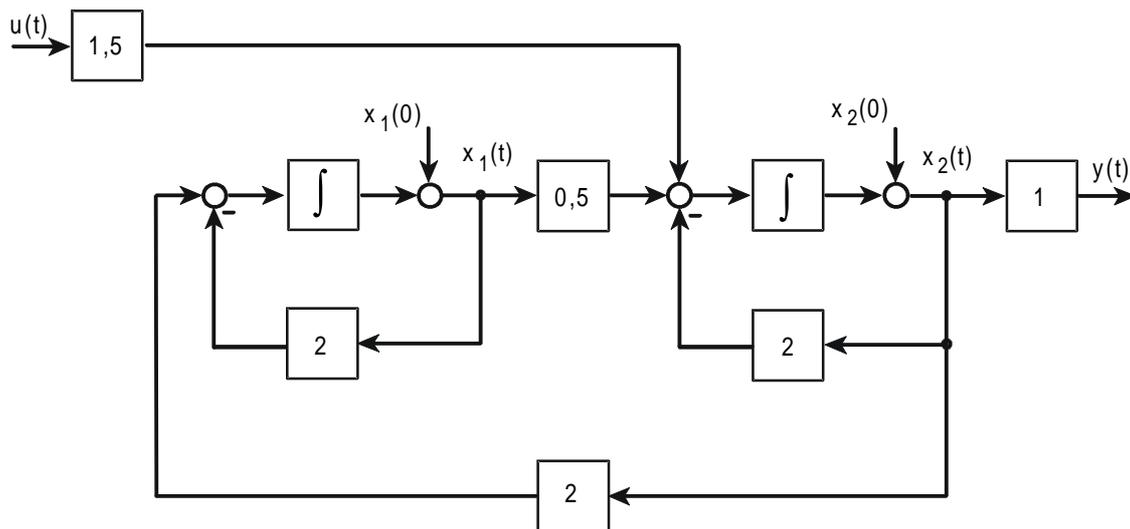


Bild 2.1.1: Strukturbild des Zustandsmodells (2.0.18)

Zur Berechnung der Transformationsmatrix \underline{T}^{-1} benötigen wir die Eigenwerte von \underline{A} , die wir weiter vorn (2.0.19) bereits berechnet hatten: $s_1 = -1$; $s_2 = -3$.

Durch Umstellung der Gleichung (2.1.8a) erhalten wir die Bestimmungsgleichung für die \underline{v}_j :

$$(\underline{s}_i \underline{E} - \underline{A}) \underline{v}_i = 0 . \quad (2.1.8b)$$

Mit $s_1 = -1$ ergibt sich

$$(\underline{s}_1 \underline{E} - \underline{A}) \underline{v}_1 = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{11} - 2v_{21} = 0 \\ -0,5v_{11} + v_{21} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_{11} = 2 v_{21}$$

Da für unsere Betrachtungen nur das Komponentenverhältnis der Eigenvektoren wichtig ist, wählen wir $v_{21} = 1$. Damit wird

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (2.1.9)$$

Mit $s_2 = -3$ wird der zweite Eigenvektor berechnet

$$(s_2 \underline{E} - \underline{A}) \underline{v}_2 = \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -0,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -v_{12} - 2v_{22} = 0 \\ -0,5v_{12} + v_{22} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_{12} = -2v_{22} .$$

Mit der Wahl $v_{22} = 1$ ergibt sich der zweite Eigenvektor zu

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

und damit die gesuchte Transformationsmatrix (2.1.7)

$$\underline{T}^{-1} = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.1.11)$$

Mit der Beziehung $\underline{T} = (\underline{T}^{-1})^{-1}$ kann die auch benötigte nicht inverse Transformationsmatrix \underline{T} berechnet werden

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} . \quad (2.1.12)$$

Mittels der Beziehungen (2.1.6) können nun die Matrizen \underline{A}^* , \underline{b}^* und \underline{c}^* des transformierten Modells gebildet werden:

$$\underline{A}^* = \underline{T} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T}^{-1} :$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & +2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{\underline{A} \cdot \underline{T}^{-1}} ; \underbrace{\begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}}_{\underline{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{\underline{A} \cdot \underline{T}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\underline{A}^*}$$

$$\underline{b}^* = \underline{T} \cdot \underline{b} \quad ; \quad \underline{c}^{1*} = \underline{c}' \cdot \underline{T}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Das sich ergebende transformierte Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t)^* &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t)^* + \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)^* \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

hat die angestrebte entkoppelte Parallelstruktur

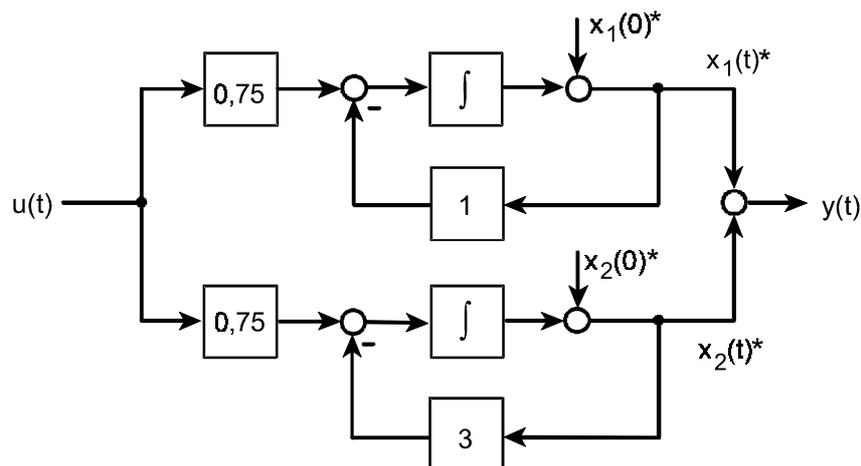


Bild 2.1.2: Entkoppelte Struktur des Zustandsmodells (2.0.18)

Der vorangehend beschriebene Transformationsvorgang entspricht der Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich. Auch dort entstand aus einer Gesamtübertragungsfunktion eine Parallelstruktur aus Teilübertragungsfunktionen (vergleiche /1/).

Treten mehrfache Eigenwerte der Systemmatrix auf, führt der vorgestellte Transformationsvorgang nicht auf eine Diagonalform von \underline{A} , sondern auf eine sogenannte JORDANform der Systemmatrix. Auch hier sind deutliche Parallelen zur Partialbruchzerlegung zu erkennen. Aus Zeitgründen können wir auf die JORDANform nicht näher eingehen, Einzelheiten können in /3/ und /4/ nachgelesen werden.

2.1.2 Transformation auf Übertragungsfunktions-Form (Beobachter-Normalform)

Eine weitere strukturell ausgezeichnete Form des Zustandsmodells entsteht, wenn zur Bildung der Transformationsmatrix \underline{T} die folgende Matrix \underline{B} , die wir später Beobachtbarkeitsmatrix nennen werden, zugrunde gelegt wird.

Aus

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{c}' \\ \underline{c}' \cdot \underline{A} \\ \underline{c}' \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}' \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{berechnet man} \quad \underline{B}^{-1} = [\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_n]. \quad (2.1.14)$$

Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\underline{T}^{-1} = [\underline{t}_n, \underline{A} \underline{t}_n, \underline{A}^2 \cdot \underline{t}_n, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{t}_n] \quad (2.1.15)$$

und daraus mit $(\underline{T}^{-1})^{-1}$ auch \underline{T} . Durch Anwendung von \underline{T} und \underline{T}^{-1} auf das allgemeine Zustandsmodell (2.0.1) im Sinne der Transformationsvorschrift (2.1.6) ergibt sich dann das transformierte Zustandsmodell (2.1.16):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)^* \\ \dot{x}_2(t)^* \\ \dot{x}_3(t)^* \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & -a_2 \\ \cdot & & 1 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t)^* \\ x_2(t)^* \\ x_3(t)^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t)^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t); \quad (2.1.16)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t)^* \\ x_2(t)^* \\ x_3(t)^* \\ \vdots \\ x_n(t)^* \end{bmatrix}$$

Die strukturelle Auszeichnung dieses Zustandsmodells liegt darin, daß in den Parametermatrizen neben Nullen und Einsen nur noch die Koeffizienten der dazugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (2.1.17)$$

aufzutreten.

Wir haben diese Transformation bereits in /1/ als geeignete Beziehung zur Umformung einer Übertragungsfunktion in ein Zustandsmodell kennengelernt, wenn von einem vorliegenden Systemmodell in Form einer Übertragungsfunktion die Sprungantwort rechnergestützt bestimmt werden sollte.

2.1.3 Transformation auf Regler-Normalform

Abschließend soll noch eine dritte Zustandsmodell-Normalform angesprochen werden.

Zur Bildung der sogenannten Regler-Normalform des Zustandsmodells

$$\dot{\underline{x}}(t)^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t)^* + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.1.18)$$

$$y(t) = [b_0, b_1, b_2 \quad \dots \quad \dots \quad b_{n-1}] \underline{x}(t)^* ,$$

die sich auch dadurch auszeichnet, daß sich neben Nullen und Einsen nur die Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion (2.1.17) in den Parametermatrizen befinden, allerdings in einer etwas anderen Anordnung als bei der Beobachter-Normalform.

Den dazu notwendigen Transformationsmatrizen \underline{T} und \underline{T}^{-1} liegt die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix \underline{S} , auf die wir später auch noch zurückkommen, zu Grunde.

Aus

$$\underline{S} = \left[\underline{b}, \underline{A} \cdot \underline{b}, \underline{A}^2 \cdot \underline{b}, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{b} \right] \quad \text{berechnet man} \quad \underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{p}'_1 \\ \underline{p}'_2 \\ \underline{p}'_3 \\ \vdots \\ \underline{p}'_n \end{bmatrix}, \quad (2.1.19a)$$

daraus ergibt sich die Transformationsmatrix \underline{T} :

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{p}'_n \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A} \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \underline{T}^{-1} = (\underline{T})^{-1}. \quad (2.1.19b)$$

Eine Reihe weiterer, aber nicht so wichtiger Normalformen werden in /3, 4/ dargestellt.

3 Systemeigenschaften

Beim später zu besprechenden Entwurf von sog. Zustandsreglern wird es notwendig sein, daß die vom Zustandsregler zu beeinflussende Regelstrecke die Eigenschaft haben muß, von der Eingangsgröße $u(t)$ aus alle Zustände $\underline{x}(t)$ des Systems steuern zu können. Wir werden diese Eigenschaft des Systems als Steuerbarkeit definieren.

Für den Entwurf eines später auch noch zu beschreibenden sog. Zustandsbeobachters wird es darüberhinaus notwendig sein, vom Ausgang der Regelstrecke $y(t)$ aus, die Zustände $\underline{x}(t)$ innerhalb des Systems beobachten zu können. Falls das betrachtete System dies erlaubt, besitzt es die Eigenschaft der Beobachtbarkeit. Diese Systemeigenschaften sollen im Folgenden untersucht werden.

3.1 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Wir wollen uns den Zugang zu den Begriffen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit an Hand eines Beispiels verschaffen.

Beispiel 3.1.1: Untersuche, ob das folgende Übertragungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

im Sinne der vorangehenden Erläuterungen steuerbar bzw. beobachtbar ist.

Da ein Strukturbild die besten Einblicke in die internen Verknüpfungen eines Übertragungssystems bietet, soll dies als erstes untersucht werden:

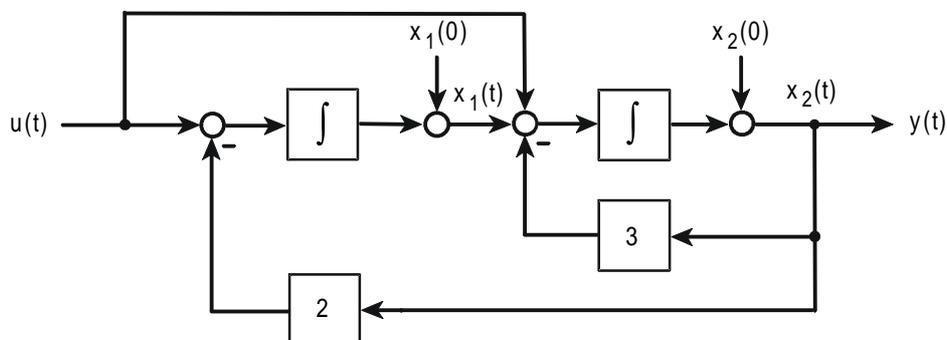


Bild 3.1.1: Strukturbild des Zustandsmodells (3.1.1)

Das Bild suggeriert eine Steuerbarkeit beider Systemzustände, da $u(t)$ sowohl auf den ersten Zustand $x_1(t)$ als auch auf den zweiten Zustand $x_2(t)$ einwirkt. Die Struktur läßt weiterhin vermuten, daß der Systemzustand $x_2(t)$ sicher beobachtbar ist, beim Systemzustand $x_1(t)$ könnte die Beobachtbarkeit angezweifelt werden.

Da eine entkoppelte Parallelstruktur des Systems (3.1.1) eine deutlichere Aussage über die Verknüpfung der Zustände mit der Eingangs- und Ausgangsgröße erlaubt (vergleiche die Bilder 2.1.1 und 2.1.2), soll zunächst die entkoppelte Parallelstruktur berechnet werden. Aus dem charakteristischen Polynom

$$\Delta(s) = \det[s \cdot \underline{E} - \underline{A}] = s^2 + 3s + 2 = (s + 1) \cdot (s + 2) \quad (3.1.2)$$

können die Eigenwerte des Systems $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$ abgelesen werden, so daß die transformierte Systemmatrix der Diagonalform sofort hingeschrieben werden kann:

$$\underline{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Die Transformationsmatrix für \underline{b} und \underline{c} , die Matrix der Eigenvektoren berechnet sich zu

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.4)$$

womit die transformierten Vektoren \underline{b}^* und \underline{c}'^* angegeben werden können

$$\underline{b}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{c}'^* = [1 \quad 1]. \quad (3.1.5)$$

Das Strukturbild

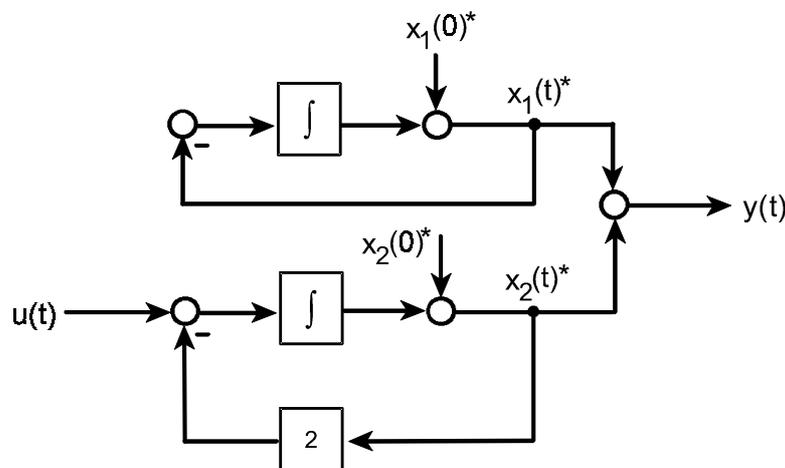


Bild 3.1.2: Strukturbild des entkoppelten Zustandsmodells (3.1.1)

des transformierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t)^* &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t)^* + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t)^* \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

offenbart eine eindeutige Aussage über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems: es ist vollständig beobachtbar aber nicht vollständig steuerbar, da der Zustand $x_1(t)$ von $u(t)$ nicht erreicht werden kann.

Eine exakte Definition von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wurde 1961 von R. KALMAN angegeben. Er formulierte auch einfache Vorschriften zur Prüfung dieser Systemeigenschaften. Wir wollen es bei der vorangehend dargestellten anschaulichen Beschreibung der Steuer- und Beobachtbarkeit belassen und die Prüfvorschriften ohne Ableitung angeben:

Systemprüfung auf Steuerbarkeit

Ein Übertragungssystem, das durch ein Zustandsmodell der Form (2.0.1) beschrieben wird, ist steuerbar, wenn seine Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{S} = \left[\underline{b}, \underline{A} \cdot \underline{b}, \underline{A}^2 \cdot \underline{b}, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{b} \right] \quad (3.1.7)$$

regulär, d.h. die Determinante $\det \underline{S} \neq 0$ ist.

Systemprüfung auf Beobachtbarkeit

Ein Übertragungssystem, das durch ein Zustandsmodell der Form (2.0.1) beschrieben wird, ist beobachtbar, wenn seine Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{c}' \\ \underline{c}' \cdot \underline{A} \\ \underline{c}' \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}' \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{regulär ist, d.h. die Determinante } \det \underline{B} \neq 0 \text{ ist.} \quad (3.1.8)$$

Exakte Einzelheiten zu diesen beiden Systemeigenschaften finden sich in /3,4/.

Im Normalfall ist ein System sowohl steuerbar als auch beobachtbar. Diese Eigenschaft kann anhand einer einfachen Vorschrift geprüft werden:

Systemprüfung auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Ein Übertragungssystem, das durch ein Zustandsmodell der Form (2.0.1) beschrieben wird, ist sowohl steuerbar als auch beobachtbar, wenn sein charakteristisches Polynom $\Delta(s)$ gleich dem Nennerpolynom $N(s)$ der dazugehörigen Übertragungsfunktion $G(s) = Z(s)/N(s)$ ist. (3.1.9)

Der Fall $\Delta(s) = N(s)$ liegt immer vor, wenn $Z(s)$ und $N(s)$ der Übertragungsfunktion teilerfremd sind, das heißt keine gemeinsamen Nullstellen haben, die sich somit nicht kürzen lassen. Ist $\Delta(s) \neq N(s)$, z.B. durch Kürzungen in der Übertragungsfunktion, ist das Übertragungssystem entweder nicht steuerbar, nicht beobachtbar oder beides nicht. In diesem Fall muß mit (3.1.7) und (3.1.8) spezifisch geprüft werden, welche Eigenschaft das System hat.

Die vorangehend geschilderten Zusammenhänge wollen wir an folgenden Beispielrechnungen verdeutlichen.

Beispiel 3.1.2: In Beispiel 2.1.1 hatten wir durch Bildung der entkoppelten Diagonalstruktur anschaulich festgestellt, daß das Übertragungssystem (3.1.1) beobachtbar aber nicht steuerbar war. Nach Satz (3.1.9) muß demnach $\Delta(s) \neq N(s)$ sein. Um dies zu zeigen, müssen wir die Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.1.1) bilden. Beim genauen Hinsehen erkennt man, daß (3.1.1) in Beobachter-Normalform vorliegt, so daß die Übertragungsfunktion direkt aus dem Zustandsmodell abgelesen werden kann:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{s + 1}{(s + 1) \cdot (s + 2)} = \frac{1}{s + 2} . \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Mit dem charakteristischen Polynom (2.0.17)

$$\Delta(s) = \det [s \cdot \underline{E} - \underline{A}] = s^2 + 3s + 2$$

ergibt sich, daß

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + 2 \neq N(s) = s + 2$$

ist, was nach den vorangehenden Betrachtungen auch zu erwarten war. Auch die formale Steuerbarkeitsprüfung nach (3.1.7)

$$\det \underline{S} = \det [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b}] = ?; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{A}\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{S} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -2 - (-2) = 0 \quad (3.1.11)$$

führt zum erwarteten Ergebnis, daß das System nicht steuerbar ist. Verbleibt noch die formale Prüfung auf Beobachtbarkeit nach (3.1.8):

$$\det \underline{B} = \det \begin{bmatrix} \underline{c}' \\ \underline{c}'\underline{A} \end{bmatrix} = ?; \quad \underline{c}' = [0 \quad 1]; \quad \underline{c}'\underline{A} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = [1 \quad -3]$$

$$\det \underline{B} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0. \quad (3.1.12)$$

Auch diese Berechnung bestätigt unsere anschauliche Interpretation: das System ist beobachtbar.

Es sei an dieser Stelle noch hervorgehoben, daß ein System, welches sich in der Beobachter-Normalform (2.1.16) modellieren läßt, immer beobachtbar ist. Zur Bildung der Transformationsmatrix \underline{T} bzw. \underline{T}^{-1} muß nämlich u.a. die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{B} invertiert werden (2.1.4). Invertierbarkeit setzt aber voraus, daß \underline{B} regulär ist und Regularität von \underline{B} garantiert nach (3.1.8) die Beobachtbarkeit des betrachteten Systems. Aus äquivalenten Gründen ist ein System, welches sich in Regler-Normalform (2.1.18) modellieren läßt, immer steuerbar.

3.2 Stabilität

Analog zur klassischen Regelungstechnik (vergleiche /1/) kann man zeigen, daß ein in der Form (2.0.1) beschriebenes Übertragungssystem genau dann stabil ist, d.h. seine Sprungantwort $h(t)$ gegen einen stationären Endwert läuft, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ der Systemmatrix ausschließlich negative Realteile haben, d.h. in der linken s-Halbebene liegen. (In /1/ trafen wir diese Aussage über die

Polstellen der Übertragungsfunktion. Im Normalfall sind diese Polstellen identisch mit den Nullstellen von $\Delta(s)$.

Wir wollen nun im Folgenden klären, wie sich die Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ bei einem so definierten stabilen oder instabilen System verhalten, wenn die Anfangszustände $\underline{x}(0) \neq \underline{0}$ und die Eingangsgröße $u(t) = 0$ sind. Wir betrachten dazu unser Systemmodell (2.0.2) unter diesen Bedingungen und lassen, da uns nur die Zustandsgrößen interessieren, die Ausgangsgleichung $y(t) = \underline{c}' \underline{x}(t)$ weg:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 . \quad (3.2.1)$$

Verfolgen wir nun die Ableitung der geschlossenen Lösung des Systemmodells in Kapitel 2 mit der reduzierten Modellbeschreibung (3.2.1), geht die Beziehung (2.0.8) über in

$$\underline{X}(s) = (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{x}(0) = \underline{\phi}(s) \cdot \underline{x}(0).$$

Nach der Laplace-Rücktransformation führt diese Beziehung direkt auf den Zustandsgrößenverlauf bei $u(t) = 0$ und $\underline{x}(0) \neq \underline{0}$:

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t) \cdot \underline{x}(0) \quad \text{mit} \quad \underline{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \right\}. \quad (3.2.2)$$

Anhand des folgenden Beispiels können wir uns nun anschaulich klar machen, welchen charakteristischen Verlauf die Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ bei $u(t) = 0$ und $\underline{x}(0) \neq \underline{0}$ für $t \rightarrow \infty$ haben.

Beispiel 3.2.1: Wir greifen auf unser Systemmodell (2.0.18) im Beispiel 2.0.2 zurück und nehmen an, daß die Eingangsgröße $u(t) = 0$ ist, und daß die Anfangswerte folgende konstante Größen haben

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; \quad a, b : \text{konst.} . \quad (3.2.3)$$

Zur Berechnung des Verlaufs der Zustandsgrößen setzen wir in (3.2.2) die im Beispiel 2.0.2 berechneten Elemente der Transitionsmatrix $\underline{\phi}(t)$ (2.0.20) und die gerade festgelegten Anfangszustände ein

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t) \cdot \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.2.4a)$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= a \cdot \varphi_{11}(t) + b \cdot \varphi_{12}(t) = 0,5a(e^{-t} + e^{-3t}) + b(e^{-t} - e^{-3t}) \\
x_2(t) &= a \cdot \varphi_{21}(t) + b \cdot \varphi_{22}(t) = 0,25a(e^{-t} - e^{-3t}) + 0,5b(e^{-t} + e^{-3t}). \quad (3.2.4b)
\end{aligned}$$

Wie man deutlich erkennt, ziehen die stabilen Eigenwerte $s_1 = -1$ und $s_2 = -3$ (vergleiche (2.0.19)) in der Transitionsmatrix e-Funktionen mit negativem Exponenten (e^{-1t} , e^{-3t}) nach sich. Betrachtet man (3.2.4) für $t \rightarrow \infty$, erkennt man, daß in diesem Fall die Zustandsgrößen $\underline{x}(t)$ bei einem beliebigen Anfangszustand $\underline{x}(0)$ gegen Null gehen. Instabile Nullstellen von $\Delta(s)$ führen in der Transitionsmatrix zu e-Funktionen mit positiven Exponenten, was für $t \rightarrow \infty$ zu wachsenden e-Funktionen, also zu einem instabilen Systemverhalten führt. Damit ist anschaulich klar, daß folgender Satz gilt:

|| Die Zustandsgrößen eines stabilen Übertragungssystems der Form (2.0.2) mit $u(t) = 0$ und $\underline{x}(0) \neq 0$ gehen für $t \rightarrow \infty$ immer gegen Null. (3.2.5)

Selbstverständlich gilt auch das in /1/ eingeführte Pollage-Stabilitätskriterium für Zustandsmodelle. Um mit Hilfe dieses Kriteriums die Stabilität prüfen zu können, muß die Übertragungsfunktion des Systems berechnet werden, deren Polstellen bei Stabilität dann ausschließlich in der linken s-Halbebene liegen dürfen. Da das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ des Zustandsmodells i.a. identisch mit dem Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ist, kann auch an ihm die Stabilitätsprüfung vorgenommen werden.

4 Regelkreise im Zustandsraum

Wie in der klassischen Regelungstechnik geht man beim Reglerentwurf im Zustandsraum von einer vorgegebenen Strecke aus, deren Systembeschreibung jedoch in Form eines Zustandsmodells vorliegen muß. Zweckmäßigerweise sollte diese Systembeschreibung aus einer mathematisch/physikalischen Modellbildung hervorgegangen sein.

Anders als in der klassischen Regelungstechnik wird jedoch nicht die Ausgangsgröße der Regelstrecke zum Regler zurückgeführt, sondern alle Zustandsgrößen.

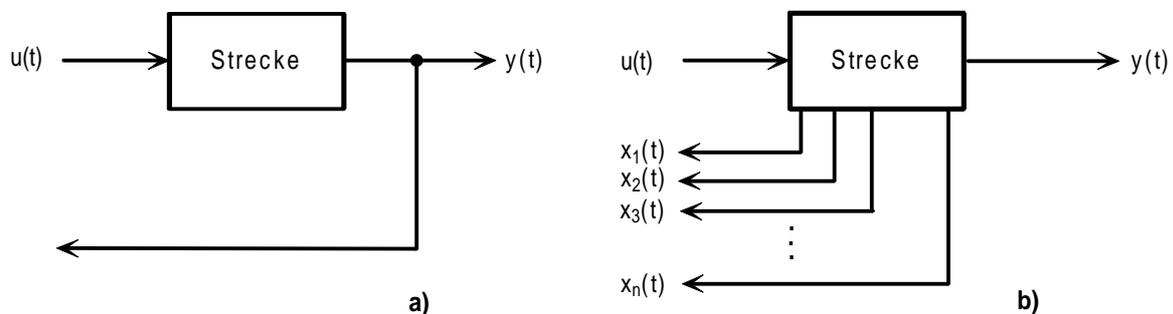


Bild 4.0.1: a) Ausgangsrückführung der klassischen Regelungstechnik
b) Zustandsrückführung einer Regelstrecke bei Zustandsregelung

Es ist einsichtig, daß dem Regler damit eine umfassendere Information über die Regelstrecke zugeführt wird, als bei einem normalen Regelkreis mit Ausgangsrückführung und damit ein besseres Regelergebnis erwartet werden kann. Ziel der Regelung ist das gleiche wie in der klassischen Regelungstechnik: optimales Folgeverhalten der Regelgröße bei einer Führungsgrößenänderung und optimale Ausregelung von Störungen, die auf die Regelstrecke wirken. Was als optimal bezeichnet werden kann, gibt auch hier die Problemstellung vor und kann z.B. in den Regelgüteparametern Anstiegszeit und Überschwingweite der Führungssprungantwort und in der statischen Regelgenauigkeit (bleibende Regelabweichung) ausgedrückt werden.

Da bereits die Führbarkeit von Zustandsregelkreisen hinsichtlich der bleibenden Regelabweichung gewisse Probleme birgt und stationäre Störungen mit einem Zustandsregler i.a. gar nicht ausgeregelt werden können, wollen wir uns zunächst auf die sog. Optimierung der Eigendynamik von Regelkreisen beschränken und in Kapitel 4.4 kurz auf geführte und gestörte Zustandsregelkreise eingehen.

Wir gehen bei unseren Betrachtungen von einem Streckenmodell der Form (2.0.1) bzw. (2.0.2) aus

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ y(t) &= \underline{c}' \cdot \underline{x}(t) , \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

das wir als Strukturbild wie folgt symbolisch darstellen

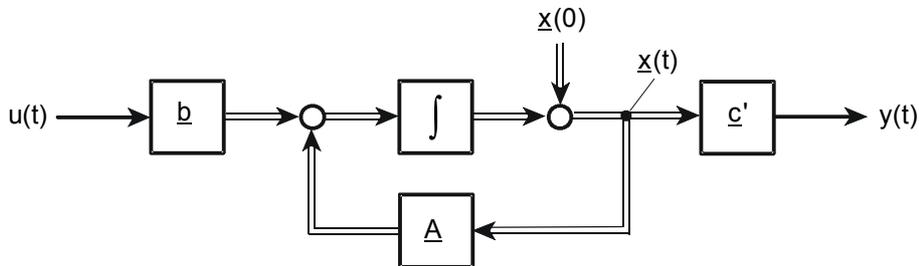


Bild 4.0.2: Strukturbild einer Zustandsregelstrecke

Dabei bedeuten die Doppelstrich-Pfeile n-Stück Wirkungslinien der Zustandsgrößen.

4.1 Entwurf eines Zustandsreglers

Bei der Optimierung der Eigendynamik einer Regelstrecke geht man davon aus, daß die Führungsgröße $w(t)$ und die Störgröße $z(t)$ gleich Null sind. Dagegen können die Anfangszustände der Zustandsgrößen $\underline{x}(0)$ einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Des einfacheren Ausdrucks wegen, wollen wir diese Erregungsform zukünftig Anfangsstörung nennen.

Die Anfangsstörung $\underline{x}(0) \neq \underline{0}$ soll im Rahmen der Optimierung der Eigendynamik mit Hilfe des sog. Zustandsreglers möglichst schnell gegen Null ausgeregelt werden. Im Falle der Instabilität der Strecke soll die Optimierung der Dynamik die Stabilisierung der Strecke bedeuten. Zu diesem Zwecke setzen wir den Zustandsregler wie folgt an

$$\begin{aligned} u(t) &= -\underline{k}' \cdot \underline{x}(t) = \\ &= -k_1 \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_2(t) - \dots - k_n \cdot x_n(t); \quad k_i = \text{konst.}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

d.h. die Stellgröße $u(t)$ der Regelstrecke wird aus einer Linearkombination der Streckenzustände gebildet, wobei jeder Zustand separat mit einem k_i gewichtet werden kann. Damit ergibt sich folgender Zustandsregelkreis

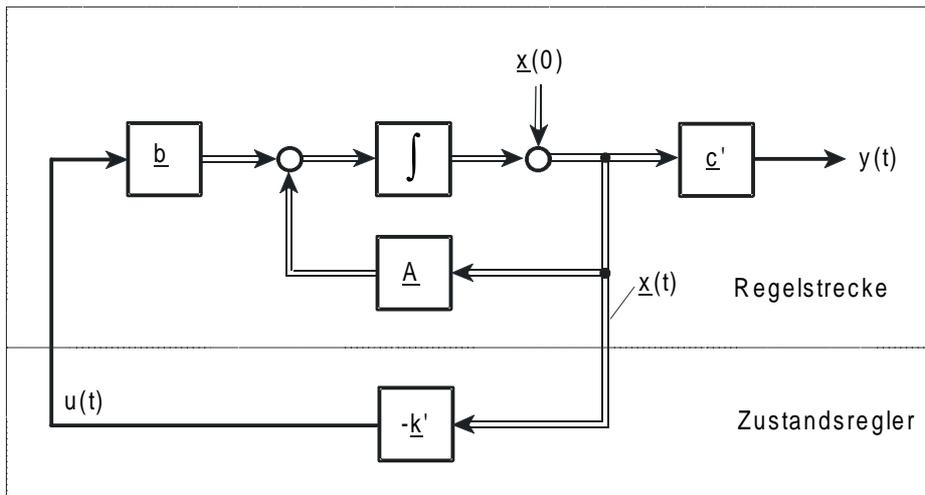


Bild 4.1.1: Regelstrecke mit Zustandsregler

Eine notwendige Voraussetzung zum Entwurf eines Zustandsreglers ist die Steuerbarkeit der Regelstrecke. Wir gehen deshalb bei der Ableitung des Zustandsreglers davon aus, daß die Strecke in Regler-Normalform (2.1.18), die die Steuerbarkeit garantiert, vorliegt (Index R). Durch Zusammenfassung der Strecken- und Reglergleichung zu einem geschlossenen Regelkreis

$$\dot{\underline{x}}(t)^* = \underline{A}_R \cdot \underline{x}(t)^* + \underline{b}_R \cdot u(t); \quad u(t) = -\underline{k}'_R \cdot \underline{x}(t)^* \quad (4.1.2)$$

$$\dot{\underline{x}}(t)^* = \underline{A}_R \cdot \underline{x}(t)^* - \underline{b}_R \cdot \underline{k}'_R \cdot \underline{x}(t)^*$$

$$\dot{\underline{x}}(t)^* = (\underline{A}_R - \underline{b}_R \cdot \underline{k}'_R) \cdot \underline{x}(t)^* \quad (4.1.3)$$

ergibt sich die Systemmatrix $(\underline{A}_R - \underline{b}_R \underline{k}'_R)$ des geschlossenen Zustandsregelkreises, die näher betrachtet wie folgt aussieht:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_R} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}_R} \cdot \underbrace{[k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]}_{\underline{k}'_R} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_R} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{bmatrix}}_{(\underline{b}_R \cdot \underline{k}'_R)} = \\
& = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_{n-1} \end{bmatrix}}_{(\underline{A}_R - \underline{b}_R \underline{k}'_R)} \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

Da sowohl die Systemmatrix der Strecke \underline{A}_R als auch die Systemmatrix $(\underline{A}_R - \underline{b}_R \underline{k}'_R)$ des geschlossenen Zustandsregelkreises Regler-Normalform besitzen, können aus ihnen auf Grund der Beziehungen zwischen (2.1.18) und (2.1.17) und der Tatsache, daß $\Delta(s) = N(s)$ ist, die charakteristischen Polynome abgelesen werden:

$$\Delta(s)_{\text{Strecke}} = s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 \quad (4.1.5)$$

$$\Delta(s)_{\text{Kreis}} = s^n + \gamma_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \gamma_2 \cdot s^2 + \gamma_1 \cdot s + \gamma_0 \quad (4.1.6)$$

Aus (4.1.4) geht weiterhin hervor, daß die Koeffizienten γ_i des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises mit Hilfe der frei wählbaren Elemente des Reglervektors \underline{k} nach folgender Beziehung

$$\begin{bmatrix} -\gamma_0 \\ -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ \vdots \\ -\gamma_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

beliebig eingestellt werden können.

Führt man sich noch einmal vor Augen, daß das dynamische Verhalten eines Übertragungssystems maßgeblich von der Lage der Pole der Übertragungsfunktion abhängig ist (vergleiche /1/), die im Normalfall identisch mit der Lage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix sind, und daß wiederum die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms seine Nullstellenlage bestimmen,

können wir mit (4.1.7) die Nullstellenlage und damit die Dynamik des geschlossenen Kreises frei einstellen.

Durch Umstellung von (4.1.7) erhalten wir auf Grund dieser Überlegungen folgendes Ergebnis:

Hat eine in Regler-Normalform gegebene Regelstrecke das charakteristische Polynom (4.1.5) und soll das charakteristische Polynom des geschlossenen Zustandsregelkreises die Form (4.1.6) annehmen, so muß der Reglervektor wie folgt bestimmt werden:

$$\underline{k}_R = \begin{bmatrix} k_{R1} \\ k_{R2} \\ k_{R3} \\ \vdots \\ k_{Rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 - a_0 \\ \gamma_1 - a_1 \\ \gamma_2 - a_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Die vorangehende Entwurfsvorschrift hat den entscheidenden Nachteil, daß sich die Regelstrecke physikalisch in Reglernormalform modellieren lassen muß. Dies gelingt äußerst selten. Wir leiten daher im Folgenden eine Zustandsregler-Entwurfsvorschrift für eine beliebig gegebene steuerbare Strecke ab.

Eine steuerbare Strecke kann mit der Beziehung (2.1.3a) $\underline{x}(t)^* = \underline{T} \cdot \underline{x}(t)$ auf Regler-Normalform transformiert werden, wenn die Transformationsmatrix \underline{T} die Form (2.1.19b) besitzt. Bei einem Streckenmodell in Reglernormalform (4.1.2) hatten wir folgendes Reglergesetz benutzt

$$u(t) = -\underline{k}'_R \cdot \underline{x}(t)^*. \quad (4.1.9)$$

Mit (2.1.3a) wird daraus

$$u(t) = -\underline{k}'_R \cdot \underline{T} \cdot \underline{x}(t), \quad (4.1.10)$$

womit man folgendes Ergebnis formulieren kann:

Hat eine steuerbare Regelstrecke das charakteristische Polynom (4.1.5) und soll das charakteristische Polynom des geschlossenen Zustandsregelkreises die Form (4.1.6) annehmen, so muß der Reglervektor wie folgt bestimmt werden

$$\underline{k}' = \underline{k}'_R \cdot \underline{T} = \left[\gamma_0 - a_0, \gamma_1 - a_1, \dots, \gamma_{n-1} - a_{n-1} \right] \begin{bmatrix} \underline{p}'_n \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A} \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{p}'_n \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.1.11)$$

wobei \underline{T} aus der Steuerbarkeitsmatrix \underline{S} (2.1.19) hervorgeht.

Das vorgestellte Entwurfsverfahren für einen Zustandsregler wird in der Literatur als sog. Polvorgabeverfahren bezeichnet, da man die Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (die den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix des geschlossenen Zustandsregelkreises entsprechen) frei vorgeben kann. Daneben existieren noch eine Reihe weiterer Entwurfverfahren, von denen der sog. RICCATI-Regler, der auf der Basis der Minimierung eines Gütekriteriums entwickelt wird, eine große Bedeutung hat. Mit diesem Entwurfsverfahren können z.B. Regler mit energieoptimaler Stellgröße bestimmt werden. Aus Zeitgründen wollen wir auf die Betrachtung dieser Regler verzichten, nähere Einzelheiten findet man in /4/.

Zum besseren Verständnis des Entwurfsvorganges soll im folgenden Beispiel ein Zustandsregler berechnet werden.

Beispiel 4.1.1: Für die in Beispiel 2.0.2 gegebene Regelstrecke

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

soll ein Zustandsregler entworfen werden, der die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Strecke $s_1s = -1$ und $s_2s = -3$ beide nach $s_{1,2K} = -4$ verschiebt und damit den Abklingvorgang der Zustandsgrößen gegen Null verkürzt (Optimierung der Eigendynamik).

Da das System (4.1.12) nicht in Regler-Normalform vorliegt, muß zunächst geprüft werden, ob das System steuerbar ist. Aus dem Beispiel 2.0.2 ist uns bereits die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{1,5s + 3}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1,5 \cdot (s + 2)}{(s + 1) \cdot (s + 3)} \quad (4.1.13)$$

bekannt. Nach Satz (3.1.9) ist ein System sowohl steuerbar als auch beobachtbar, wenn $\Delta(s) = N(s)$ ist. Dies ist beim vorliegenden System der Fall, da $Z(s)$ und $N(s)$ teilerfremd sind, d.h. unser System ist sowohl steuerbar als auch beobachtbar.

Mit dieser Erkenntnis kann der Satz (4.1.11) zur Reglerberechnung herangezogen werden

$$\underline{k}' = [\gamma_0 - a_0, \gamma_1 - a_1] \cdot \underline{T} \quad (4.1.14)$$

Wegen

$$\Delta(s)_{\text{Strecke}} = N(s) = s^2 + 4s + 3 = s^2 + a_1 \cdot s + a_0 \quad (4.1.15)$$

sind $a_1 = 4$ und $a_0 = 3$. Zur Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises werden die Linearfaktoren der gewünschten Nullstellen von $\Delta(s)_{\text{Kreis}}$ ($s_{1,2k} = -4$) ausmultipliziert

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Dem entstandenen charakteristischen Polynom des Kreises

$$\Delta(s)_{\text{Kreis}} = s^2 + 8s + 16 = s^2 + \gamma_1 \cdot s + \gamma_0 \quad (4.1.16)$$

können die Koeffizienten $\gamma_1 = 8$ und $\gamma_0 = 16$ entnommen werden.

Zur Lösung von (4.1.14) muß nun noch die Transformationsmatrix \underline{T} bestimmt werden. \underline{T} berechnet sich aus der Steuerbarkeitsmatrix \underline{S} nach der Vorschrift (2.1.19)

$$\underline{S} = [\underline{b}, \underline{A} \cdot \underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1,5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1,5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4,5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1,5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{p}'_1 \\ \underline{p}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} : \Rightarrow \underline{p}'_1 = \underline{p}'_2 = [1/3 \quad 0]$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{p}'_2 \\ \underline{p}'_2 \cdot \underline{A} \end{bmatrix}; \quad \underline{p}'_2 \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}. \quad (4.1.17)$$

Damit ergibt sich der Zustandsreglervektor zu

$$\begin{aligned} \underline{k}' &= [16-3, 8-4] \cdot \underline{T} = [13 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \\ &= [1,667 \quad 2,667]. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Mit Hilfe der Beziehung (4.1.3) kann man zeigen, daß sich mit den Reglerparametern (4.1.18) wirklich eine Nullstellenlage des Kreises von $s_{1,2k} = -4$ einstellt:

$$\Delta(s)_{\text{Kreis}} = \det (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}')) = \det (s \cdot \underline{E} - \underline{A} + \underline{b} \cdot \underline{k}')$$

$$s \cdot \underline{E} - \underline{A} + \underline{b} \cdot \underline{k}' = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \cdot [1,667 \quad 2,667]$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2,5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 2 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s)_{\text{Kreis}} = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 2 & s+6 \end{bmatrix} = (s+2) \cdot (s+6) + 4$$

$$\Delta(s)_{\text{Kreis}} = s^2 + 8s + 16 = (s+4)^2. \quad (4.1.19)$$

Zur Demonstration der Verbesserung der Eigendynamik wurden die Zustandsgrößenverläufe der reinen Strecke $\underline{x}_S(t)$ und des Kreises $\underline{x}_K(t)$ mit dem berechneten Zustandsregler in der Anordnung nach Bild 4.1.1 jeweils bei einer Anfangsstörung $\underline{x}'_S(0) = \underline{x}'_K(0) = [1 \quad 1]$ mit Matlab berechnet und in Bild 4.1.2 grafisch dargestellt. Man erkennt trotz der geringen Polverschiebung eine erhebliche Dynamikverbesserung des Kreises gegenüber der reinen Strecke: während die Zustände der reinen Strecke erst bei ca. $t = 5$ abgeklungen sind, erreichen die Zustände des Zustandsregelkreises schon bei $t = 2$ den Wert Null.

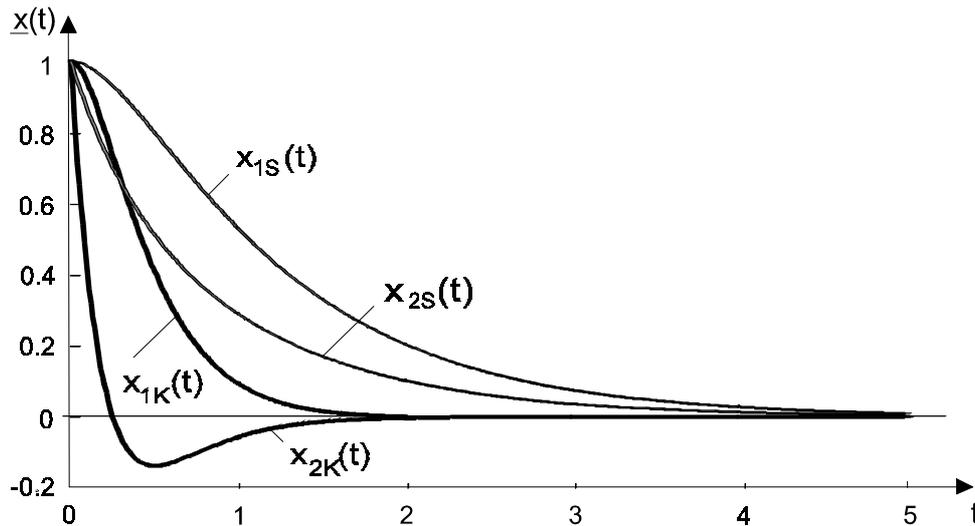


Bild 4.1.2: Zustandsgrößenverläufe einer Regelstrecke mit und ohne Zustandsrückführung

Leider erkauft man sich diese Dynamikverbesserung häufig mit erheblichen Stell-signalamplituden $u(t)$. Die freie Polvorgabe ist also ähnlich wie die freie Wahl der Anstiegszeit der Führungssprungantwort in der klassischen Regelungstechnik vom Aussteuerbereich der Stellgröße beschränkt.

Wegen der leichten Durchschaubarkeit des Polvorgabeverfahrens können mit einem Zustandsregler auch sehr leicht instabile Regelstrecken stabilisiert werden. Ist durch eine solche Maßnahme die Eigendynamik eines Systems stabilisiert, kann man um diesen Zustandsregelkreis herum einen konventionellen Regelkreis installieren, der dann wiederum mit dem vereinfachten Nyquistkriterium optimierbar ist. Wir gehen auf diese Zusammenhänge kurz im Kapitel 4.4 ein.

Der Entwurf eines Zustandsregelkreises setzt jedoch eine genaue Kenntnis des mathematischen Zustandsmodells der Regelstrecke voraus. Während Eingangs-/Ausgangsmodelle relativ leicht mit experimentellen Methoden bestimmt werden können [7], wird bei der Bestimmung eines Zustandsmodells i.a. eine aufwendigere physikalisch-/mathematische Analyse [1] notwendig sein.

4.2 Entwurf eines Zustandsbeobachters

Beim Entwurf eines Zustandsreglers sind wir davon ausgegangen, daß alle Zustände der Strecke gemessen werden können. Es gibt jedoch Fälle, wo dies gar nicht oder nur unter nicht vertretbarem Aufwand möglich ist. H.D. LUENBERGER führt ca. 1960 das sog. Beobachter-Prinzip ein, mit dessen Hilfe es möglich wurde, aus der gemessenen Eingangsgröße $u(t)$ und der gemessenen Ausgangsgröße $y(t)$ der Regelstrecke auf ihre inneren Zustände $\underline{x}(t)$ zu schließen.

Grundidee dieses sog. Zustandsbeobachters ist es, ein möglichst genaues Modell der Regelstrecke zu bilden und es mit dem gleichen Eingangssignal der Strecke zu erregen. Wenn die Anfangswerte der Zustände der Strecke und die des Beobachters identisch sind, ergeben sich dann auch identische Zustandsgrößenverläufe. Dies ist i.a. aber nicht der Fall. Mißt man darüber hinaus noch das Ausgangssignal $y(t)$ der Strecke, vergleicht es mit dem Ausgangssignal $\hat{y}(t)$ des Beobachters und führt die Differenz $y(t) - \hat{y}(t)$ über einen Rückkopplungsvektor $\underline{\ell}$ auf den Beobachtereingang zurück, kann man sich vorstellen, daß sich irgendwann der Zustand $\hat{y}(t) = y(t)$ einstellt. Wegen der strukturellen und Parameteridentität von Strecke und Beobachter müssen dann auch die Zustände $\underline{x}(t)$ der Strecke und die des Beobachters $\hat{\underline{x}}(t)$ identisch sein. Dieser verbal formulierte Ansatz für einen Zustandsbeobachter, kann mathematisch wie folgt ausgedrückt

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{b} \cdot u(t) + \underline{\ell} \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.2.1a)$$

$$\hat{y}(t) = \underline{c}' \cdot \hat{\underline{x}}(t) \quad (4.2.1b)$$

und wie in Bild 5.2.5 grafisch dargestellt werden:

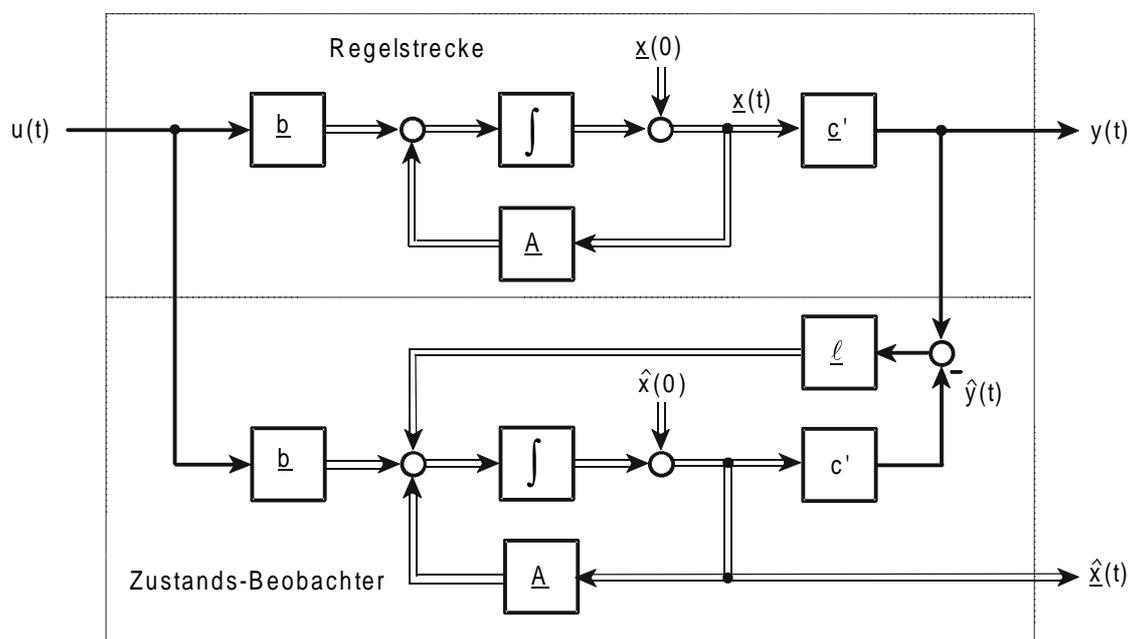


Bild 4.2.1: Prinzip eines Zustandsbeobachters

Wir wollen im Folgenden zeigen, daß mit dem Ansatz (4.2.1) der Schätzfehler

$$\underline{e}(t) = \hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t) \quad (4.2.2)$$

wirklich verschwindet. Dazu setzen wir (4.2.1b) in (4.2.1a) ein und fassen die zusammengehörigen Terme zusammen

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{b} \cdot u(t) + \underline{\ell} \cdot (y(t) - \underline{c}' \cdot \hat{\underline{x}}(t)) \\ \dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= (\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}') \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{b} \cdot u(t) + \underline{\ell} \cdot y(t) .\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

An (4.2.3) erkennen wir, daß die Systemmatrix des Beobachters die Form $(\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}')$ hat. Differenziert man weiterhin das Fehlersignal (4.2.2)

$$\dot{\underline{e}}(t) = \dot{\hat{\underline{x}}}(t) - \dot{\underline{x}}(t) \quad (4.2.4)$$

und setzt die Zustandsgleichungen des Beobachters (4.2.1a) und der Regelstrecke (2.0.2) ein

$$\dot{\underline{e}}(t) = \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) + \underline{b} \cdot u(t) + \underline{\ell} \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) - \underline{A} \cdot \underline{x}(t) - \underline{b} \cdot u(t) ,$$

faßt zusammen

$$\dot{\underline{e}}(t) = \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) - \underline{\ell} \cdot \hat{y}(t) - \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\ell} \cdot y(t)$$

und setzt weiterhin (4.2.1b) und die Ausgangsgleichung von (2.0.2) ein

$$\dot{\underline{e}}(t) = \underline{A} \cdot \hat{\underline{x}}(t) - \underline{\ell} \cdot \underline{c}' \cdot \hat{\underline{x}}(t) - \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\ell} \cdot \underline{c}' \cdot \underline{x}(t) ,$$

kann man die Gleichung folgendermaßen zusammenfassen

$$\begin{aligned}\dot{\underline{e}}(t) &= (\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}') \cdot \hat{\underline{x}}(t) - (\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}') \cdot \underline{x}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) &= (\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}') \cdot (\hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)) \\ \dot{\underline{e}}(t) &= (\underline{A} - \underline{\ell} \cdot \underline{c}') \cdot \underline{e}(t) .\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Vergleicht man die Systemmatrix des Beobachters (4.2.3) mit der Systemmatrix des Schätzfehlers der Zustandsgrößen (4.2.5), erkennt man, daß beide identisch sind.

(4.2.5) ist eine homogene Differentialgleichung deren Zustandsgrößen $\underline{e}(t)$ bei einer Anfangsstörung $\underline{e}(0)$ gegen Null abklingen, wenn das charakteristische Polynom der Systemmatrix nur Nullstellen in der linken s-Halbebene aufweist. (Diese Zusammenhänge hatten wir in Kapitel 3.2 besprochen.) Sorgt man nun dafür, daß

das identische charakteristische Polynom des Beobachters nur stabile Nullstellen besitzt, ist sichergestellt, daß der Schätzfehler (4.2.2) des Beobachters nach Null abklingt.

Wie man diese Nullstellenlage mit Hilfe des Rückkopplungsvektors \underline{l} beliebig verschieben und damit die Abklingdynamik des Beobachtungsfehlers beeinflussen kann, wird besonders anschaulich deutlich, wenn die Regelstrecke in Beobachternormalform vorliegt. Die Systemmatrix des Beobachters

$$\begin{aligned}
 (\underline{A}_B - \underline{l}_B \cdot \underline{c}'_B) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{B1} \\ l_{B2} \\ l_{B3} \\ \vdots \\ l_{Bn} \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-a_0 - l_{B1}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-a_1 - l_{B2}) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-a_2 - l_{B3}) \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & (-a_{n-1} - l_{Bn}) \end{bmatrix} \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

hat dann auch Beobachternormalform. Nennt man nun die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Beobachters ϑ_i , gilt folgende Beziehung

$$\begin{bmatrix} -\vartheta_0 \\ -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 \\ \vdots \\ -\vartheta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 - l_{B1} \\ -a_1 - l_{B2} \\ -a_2 - l_{B3} \\ \vdots \\ -a_{n-1} - l_{Bn} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

Durch Umstellung von (4.2.7) erhalten wir damit folgendes Ergebnis:

Hat eine in Beobachter-Normalform gegebene Regelstrecke ein charakteristisches Polynom mit dem Koeffizienten a_j und soll dazu ein Beobachter der Form (4.2.1) entworfen werden, dessen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ϑ_i heißen, so müssen die Elemente des Rückkopplungsvektors \underline{l}_B des Beobachters wie folgt gewählt werden

Für uns ist an dieser Stelle nur die bei der Ableitung hervortretende Identität

$$\underline{\ell}_B = \underline{T} \cdot \underline{\ell} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\ell} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{\ell}_B \quad (4.2.13)$$

wichtig. Setzt man nämlich (4.2.8) in (4.2.13) ein, kann man folgenden Satz formulieren:

Hat eine beobachtbare Regelstrecke ein charakteristisches Polynom mit dem Koeffizienten a_i und soll dazu ein Beobachter der Form (4.2.1) entworfen werden, dessen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ϑ_i heißen, so müssen die Elemente des Rückkopplungsvektors $\underline{\ell}$ des Beobachters wie folgt berechnet werden

$$\underline{\ell} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{\ell}_B = \left[\underline{t}_n, \underline{A} \cdot \underline{t}_n, \underline{A}^2 \cdot \underline{t}_n, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{t}_n \right] \begin{bmatrix} \vartheta_0 - a_0 \\ \vartheta_1 - a_1 \\ \vartheta_2 - a_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.2.14)$$

wobei \underline{T}^{-1} aus der Beobachtbarkeitsmatrix nach (2.1.4) und (2.1.5) hervorgeht.

Auch hier soll zum besseren Verständnis des Entwurfvorganges ein Zustandsbeobachter berechnet werden.

Beispiel 4.2.1: Für die schon öfter betrachtete Regelstrecke

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t)$$

soll ein Zustandsbeobachter entworfen werden, dessen Nullstellen des charakteristischen Polynoms bei $s_{B1,2} = -5$ liegen. Weshalb gerade diese Nullstellenlage gewählt wurde, wird etwas später begründet.

Da der Beobachterentwurf die Beobachtbarkeit der Strecke voraussetzt, müßte diese zunächst nachgewiesen werden. In Beispiel 4.1.1 hatten wir jedoch schon festgestellt, daß die Strecke sowohl steuerbar als auch beobachtbar ist, so daß wir uns den Nachweis an dieser Stelle ersparen können. Mit dieser Erkenntnis können

wir den Satz (4.2.14) zur Berechnung des noch unbekanntes Rückkopplungsvektors $\underline{\ell}$ des Beobachters heranziehen.

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Strecke sind aus vorangegangenen Betrachtungen bekannt: $a_0 = 3$; $a_1 = 4$. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des Beobachters erhalten wir wiederum durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren seiner gewünschten Nullstellen

$$\begin{aligned}\Delta(s)_{\text{Beob.}} &= (s + 5) \cdot (s + 5) \\ &= s^2 + 10s + 25 \\ &= s^2 + \vartheta_1 \cdot s + \vartheta_0 \\ &\Rightarrow \vartheta_0 = 25; \vartheta_1 = 10.\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

Die Transformationsmatrix $\underline{\Gamma}^{-1}$ berechnen wir nach (2.1.14) und (2.1.15) aus der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{c}' \\ \underline{c}' \cdot \underline{A} \end{bmatrix}; \quad \underline{c}' \cdot \underline{A} = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} = [0,5 \quad -2]$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix}; \quad \underline{B}^{-1} = -\frac{1}{0,5} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Rightarrow \underline{t}_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Gamma}^{-1} = [\underline{t}_n; \underline{A} \cdot \underline{t}_n]; \quad \underline{A} \cdot \underline{t}_n = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nach (4.2.14) ergibt sich damit der Rückkopplungsvektor $\underline{\ell}$ des Beobachters

$$\begin{aligned}\underline{\ell} &= \underline{\Gamma}^{-1} \cdot \underline{\ell}_B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 - 3 \\ 10 - 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

Zur Demonstration der Fähigkeit des entworfenen Beobachters, die Zustandsverläufe der Strecke schätzen zu können, wurde die Anordnung nach Bild 4.2.1 mit den Matrizen \underline{A} , \underline{b} und \underline{c}' der Regelstrecke und dem berechneten Rückkopplungsvektor $\underline{\ell}$ wiederum unter dem CAE-Programm Matlab/Simulink simuliert. Die Anfangszustände der Strecke wurden mit $\underline{x}'_s(0) = [1 \ 1]$ gewählt, die des Beobachters mit $\hat{\underline{x}}'(0) = [0 \ 0]$. Die in Bild 4.2.2 dargestellten Zustandsgrößenverläufe der Strecke $\underline{x}_s(t)$ und des Beobachters $\hat{\underline{x}}(t)$ zeigen, daß ab $t=1,5$ die berechneten Zustände des Beobachters mit denen der Strecke identisch sind. Wollte man diese Annäherung auf einen noch früheren Zeitpunkt verlagern, müßte man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Beobachters in der s -Ebene noch weiter nach links legen. Da der Beobachter i.a. auf einen Digitalrechner implementiert wird, ist bei einer genügend großen Zahlenbereichsdynamik des Rechners mit keiner Übersteuerung (wie z.B. beim Zustandsregler) zu rechnen. Dagegen wächst aber die Schwingneigung der Beobachterzustände im Bereich von $t = 0$. Dieser Effekt ist beim Beobachterzustand $\hat{x}_1(t)$ im Bild 4.2.2 schon deutlich zu erkennen.

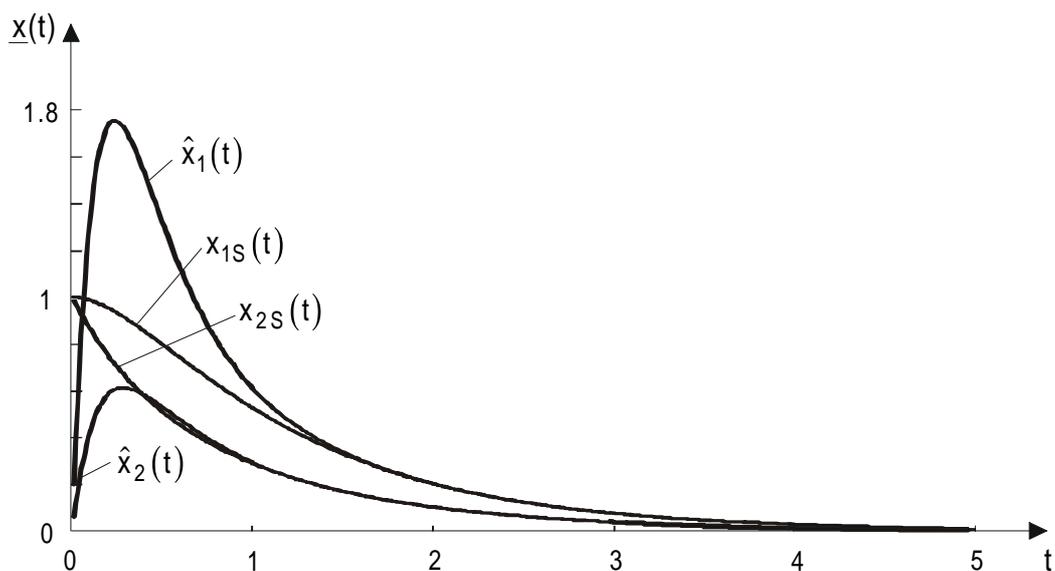


Bild 4.2.2: Zustandsgrößenverläufe von Strecke und Beobachter

Es muß jedoch an dieser Stelle kritisch angemerkt werden, daß nur gute Beobachtungsergebnisse erzielt werden, wenn das mathematische Modell der Strecke, dessen Parametermatrizen ja zur Konstruktion des Beobachters benötigt werden, sehr genau ist. Auch bei verrauschten Eingangs- und Ausgangsgrößen $u(t)$ und $y(t)$ liefert der vorangehend beschriebene Beobachter keine guten Zustandsgrößenverläufe. In solchen Fällen ersetzt man ihn durch ein sogenanntes "Kalman-Filter", das auch bei stochastisch gestörten Signalen $u(t)$ und $y(t)$ noch gute Schätzungen der Zustandsgrößenverläufe liefert.

Die Bedeutung des Zustandsbeobachters geht über rein regelungstechnische Zwecke hinaus. Auch in der Meß- und Diagnostik kann ein Beobachter mit Erfolg eingesetzt werden, wenn Systemgrößen beobachtet werden sollen, die einer direkten Messung nicht zugänglich sind.

4.3 Zustandsregelkreise mit Beobachter

Ausgangspunkt zum Entwurf eines Zustandsbeobachters war die Tatsache, daß es nicht immer möglich ist, alle Zustandsgrößen einer gegebenen Strecke zu messen, um dann mit Hilfe eines Zustandsreglers (4.2.1) die Eigendynamik der Strecke zu verbessern.

Mit Hilfe des Zustandsbeobachters sind wir nun in der Lage, auch bei Nichtmeßbarkeit der Zustände $\underline{x}_S(t)$ der Strecke einen Zustandsregelkreis zu entwerfen. Der über $u(t)$ und $y(t)$ mit der Strecke gekoppelte Beobachter berechnet die unbekannt Zustandsgrößen-verläufe $\hat{\underline{x}}(t)$, gibt diese an den Regler weiter, der wiederum die entsprechende Stellgröße für den Streckeneingang berechnet. Das Bild 4.3.1 zeigt eine solche Kreisstruktur mit Zustandsbeobachter und Zustandsregler.

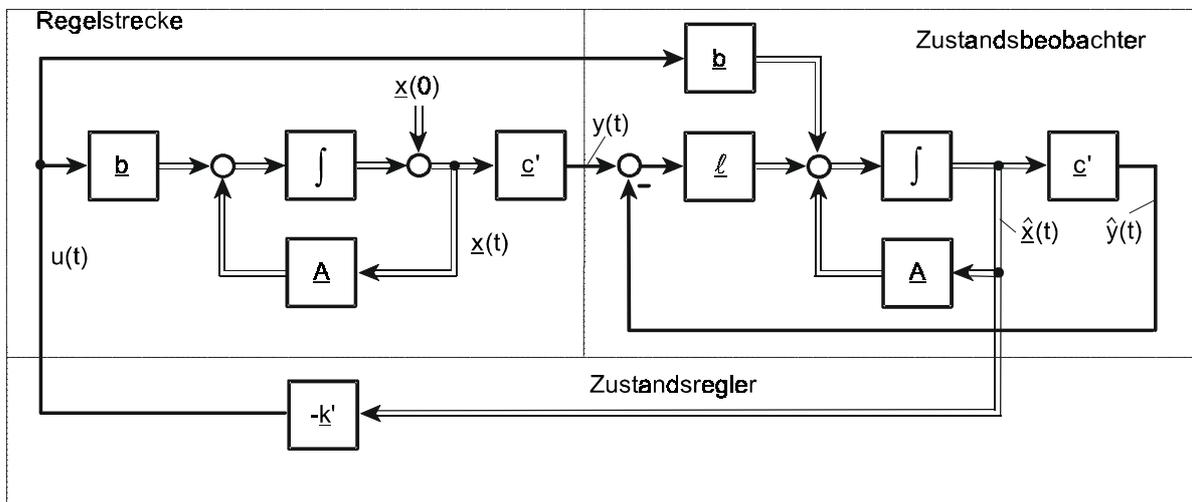


Bild 4.3.1: Regelkreis mit Zustandsbeobachter und Zustandsregler

Beim Entwurf eines solchen Regelkreises verschafft man sich zunächst ein mathematisches Zustandsmodell der Regelstrecke. Wenn dies sowohl steuer- als auch beobachtbar ist, wählt man zur Optimierung der Eigendynamik der Strecke eine günstige Lage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises. Damit berechnet man den Zustandsreglervektor \underline{k} .

Anschließend entwirft man den Zustandsbeobachter. Dabei sollte man beachten, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Beobachters etwas weiter links in der s -Halbebene liegen, als die Nullstellen des geschlossenen Kreises. Damit wird der Beobachter dynamisch etwas schneller als der Kreis, was sicherstellt, daß er aktuelle Schätzwerte der Zustandsgrößen $\hat{x}(t)$ an den Regler liefert.

Bei den vorangehend beispielhaft vorgenommenen Regler- und Beobachter-Entwürfen wurde dies berücksichtigt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises lagen beide bei $s_{1,2K} = -4$ und die des Beobachters bei $s_{1,2B} = -5$.

Das folgende Bild 4.3.2 zeigt die Verläufe der Zustandsgrößen (die jeweils in den Regler eingespeist werden) eines Zustandsregelkreises ohne (x_K) und mit Beobachter (\hat{x}_K). Dabei wurden die Anfangswerte der Streckenzustände $x_S(0) = [1 \ 1]'$ und die des Beobachters $\hat{x}(0) = [0 \ 0]'$ gesetzt.

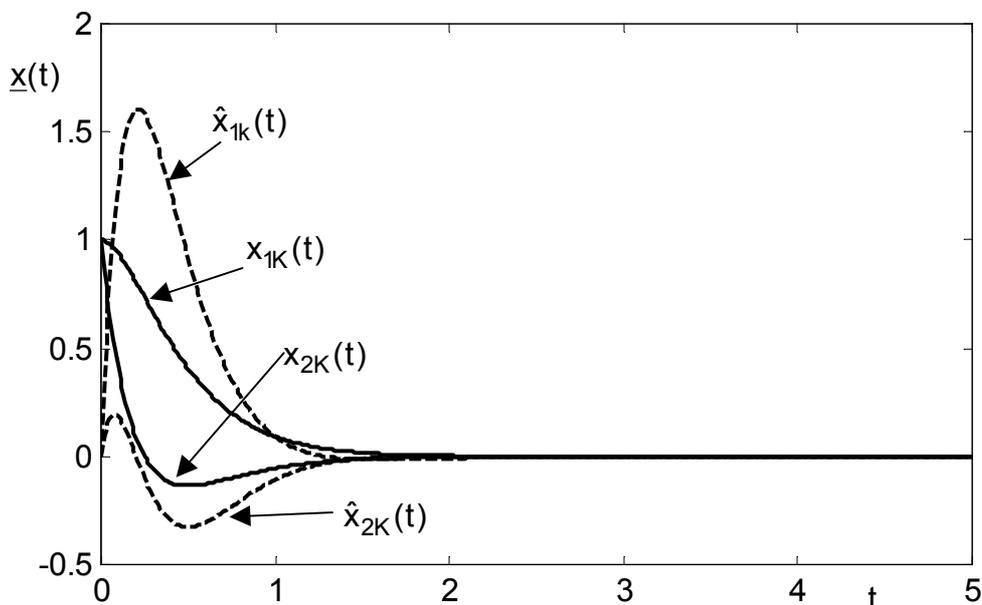


Bild 4.3.2: Zustandsgrößenverläufe eines Zustandsregelkreises mit Beobachter \hat{x}_K und ohne Beobachter x_K

Eine Dynamikverschlechterung (d.h. langsames Abklingen der Zustandsgrößen gegen Null) des Zustandsregelkreises mit Beobachter ist nicht zu erkennen. Der Kreis mit und der ohne Beobachter erreichen beide bei $t \approx 2$ die Ruhelage Null.

Wenn man Bild 4.3.1 betrachtet, scheint es auch nicht selbstverständlich zu sein, daß das Hinzufügen eines Zustandsbeobachters die Nullstellenlage des charakteristischen Polynoms der Regelstrecke mit Zustandsregler nicht verändert. Man kann aber zeigen /4/, daß die beiden folgenden Sätze allgemeingültig sind:

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms eines Zustandsregelkreises werden durch Hinzufügung eines Beobachters nicht verändert. (4.3.1)

An eine gegebene steuer- und beobachtbare Regelstrecke können die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises und die Nullstellen des charakteristischen Polynoms des Beobachters unabhängig voneinander vorgegeben werden (Separationsprinzip). (4.3.2)

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man bei teilweiser Meßbarkeit der Streckenzustände einen sog. reduzierten Beobachter entwerfen kann. Wir wollen darauf nicht eingehen, nähere Einzelheiten dazu findet man in /4/.

4.4 Geführte und gestörte Zustandsregelkreise

Bei den vorangehenden Betrachtungen sind wir immer von einem Regelkreis ohne Führungsgrößen ausgegangen, bei dem als einzige Störung von Null verschiedene Anfangszustände der Strecke (Anfangsstörungen) zugelassen waren. Dies ist für die praktische Regelungstechnik ein unrealistischer Ansatz. Im allgemeinen werden auch bei Zustandsregelkreisen von außen einwirkende Störgrößen vorhanden sein. Auch die Führbarkeit der Regelgröße, die auch im Mittelpunkt unseres Interesses steht, wird praktisch gefordert sein. Die Führbarkeit kann leicht dadurch herbeigeführt werden, daß der Zustandsregelkreis nach Bild 4.4.1 um einen Vergleich mit einer Führungsgröße erweitert wird:

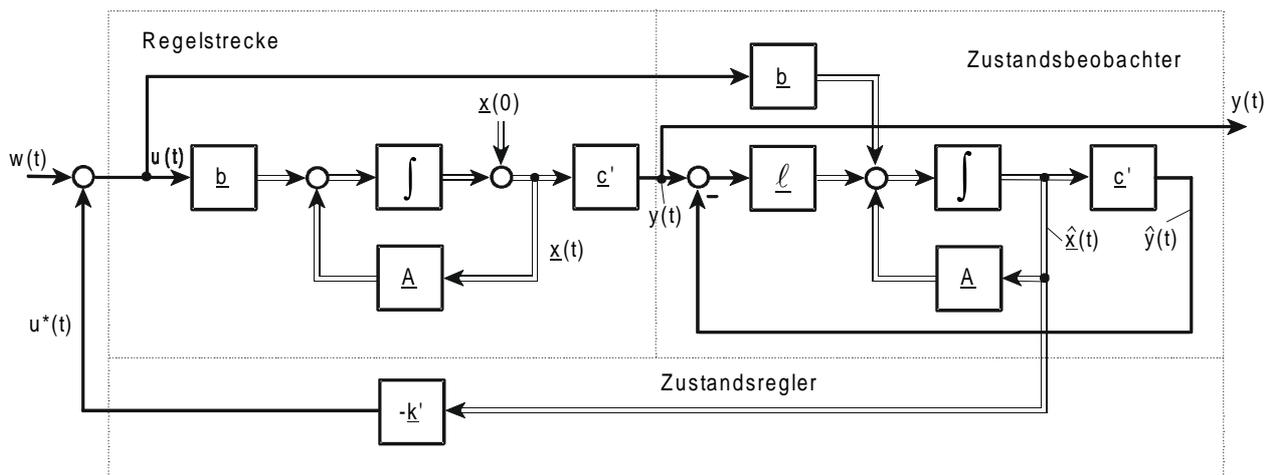


Bild 4.4.1 Geführter Zustandsregelkreis

Da in diesem Falle eine Linearkombination der Zustände $u^*(t) = -\underline{k}' \hat{x}(t)$ mit der Führungsgröße $w(t)$ verglichen wird, werden sich irgendwelche von der Größe von

$w(t) = \Delta w \cdot \sigma(t)$ abhängigen Endzustände der Zustandsgrößen und der Regelgröße einstellen. Während die Endwerte der Zustände i.a. geringe Bedeutung haben, wird von einem Regelkreis jedoch zwingend gefordert, daß die Regelgröße für $t \rightarrow \infty$ gegen den Wert der Führungsgröße strebt (statische Regelgenauigkeit). Wie man dies erreicht, soll im folgenden beschrieben werden. Wir betrachten dazu eine Regelstrecke mit Zustandsregler und Führungsgröße. (Den in Bild 4.4.1 integrierten Beobachter brauchen wir bei unseren Betrachtungen nicht mit einzubeziehen, da er nach Satz (4.3.1) die grundlegenden Eigenschaften des Regelkreises nicht beeinflusst):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \quad (4.4.1a)$$

$$u(t) = w(t) - \underline{k}' \cdot \underline{x}(t) \quad (4.4.1b)$$

$$y(t) = \underline{c}' \cdot \underline{x}(t) \quad (4.4.1c)$$

Da wir es jetzt mit einem Regelkreis mit einer Eingangsgröße $w(t)$ und einer Ausgangsgröße $y(t)$ zu tun haben, können wir mit (2.0.14) und den Systemgleichungen (4.4.1) die Führungsübertragungsfunktion bilden

$$T_{YW}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \underline{c}' \cdot \underline{\phi}(s) \cdot \underline{b}; \quad \underline{\phi}(s) = (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}'))^{-1}$$

$$\Rightarrow$$

$$T_{YW}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \underline{c}' \cdot (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}'))^{-1} \cdot \underline{b} \quad (4.4.2)$$

Mit Hilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation kann nun der stationäre Endwert $y(\infty)$ nach Aufschaltung einer sprungförmigen Führungsgröße $w(t) = \Delta w \cdot \sigma(t)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot T_{YW}(s) \cdot W(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\underline{c}' \cdot (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}'))^{-1} \cdot \underline{b} \right] \cdot \mathcal{L} \{ \Delta w \cdot \sigma(t) \} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\underline{c}' \cdot (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}'))^{-1} \cdot \underline{b} \right] \cdot \frac{1}{s} \cdot \Delta w = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\underline{c}' \cdot (s \cdot \underline{E} - (\underline{A} - \underline{b} \cdot \underline{k}'))^{-1} \cdot \underline{b} \right] \cdot \Delta w = \\ &= \left(\underline{c}' \cdot (\underline{b} \cdot \underline{k}' - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{b} \right) \cdot \Delta w \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Um den gewünschten Zustand $y(\infty) = w$ herzustellen, muß also $w(t)$ mit einem Vorfilter

$$m_w = \frac{1}{\underline{c}' \cdot (\underline{b} \cdot \underline{k}' - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{b}} \quad (4.4.4)$$

multipliziert werden.

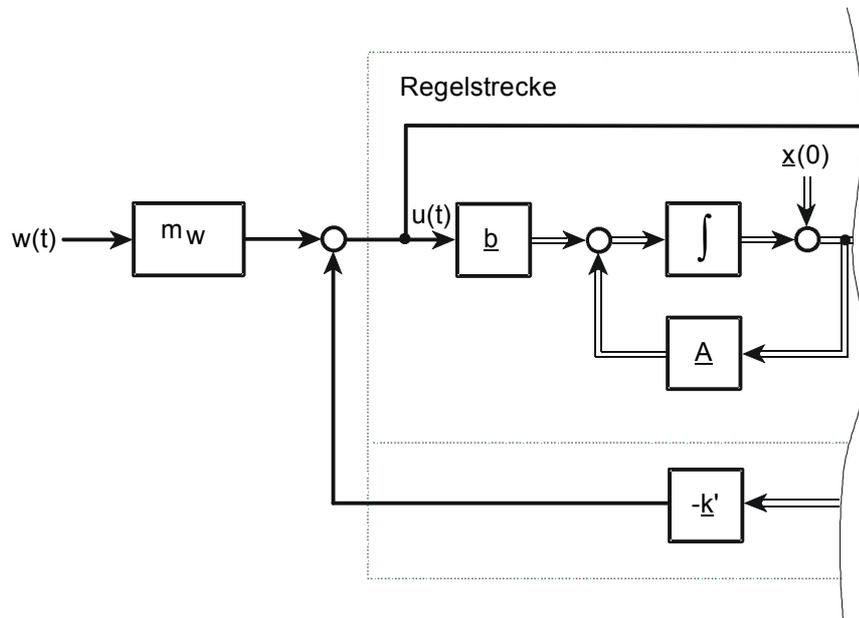


Bild 4.4.2: Zustandsregelkreis mit Führungsgrößenvorfilter

Da zur Bestimmung dieses Ausdrucks umfangreiche Matrixoperationen vorgenommen werden müssen, soll die Berechnung durch folgende Überlegungen weiter vereinfacht werden.

Der Ausdruck (4.4.2) führt immer (wenn der Durchgangsfaktor d des Systemmodells (2.0.2) gleich Null ist /1/) auf eine gebrochenrationale Funktion der Form

$$\begin{aligned} T_{YW}(s) &= \frac{Z_{YW}(s)}{N_{YW}(s)} = \\ &= \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} . \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Führt man mit diesem Ausdruck den Grenzübergang durch

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Z_{YW}(s)}{N_{YW}(s)} \cdot \Delta w \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Z_{YW}(s)}{N_{YW}(s)} \cdot \Delta w \\ &= \frac{Z_{YW}(0)}{N_{YW}(0)} \cdot \Delta w , \end{aligned}$$

erhält man folgenden einfachen Ausdruck

$$y(\infty) = \frac{Z_{YW}(0)}{N_{YW}(0)} \cdot \Delta w = \frac{b_0}{a_0} \cdot \Delta w . \quad (4.4.6)$$

Um $y(\infty) = \Delta w$ sicherzustellen, muß also ein Führungsgrößenvorfilter

$$m_w = \frac{a_0}{b_0} \quad (4.4.7)$$

in den Signalweg der Führungsgröße nach Bild 4.4.2 geschaltet werden:

Bevor wir zu diesem Problem eine Beispielaufgabe rechnen, sei in diesem Zusammenhang noch (ohne Ableitung) auf eine interessante Tatsache hingewiesen:

Bezeichnet man die Zähler- und Nennerpolynome der Übertragungsfunktionen der Regelstrecke $G_S(s)$ und des geschlossenen Zustandskreises $T_{YW}(s)$ wie folgt

$$G_S(s) = \frac{Z_S(s)}{N_S(s)} \quad ; \quad T_{YW}(s) = \frac{Z_{YW}(s)}{N_{YW}(s)} ,$$

so gilt immer

$$Z_{YW}(s) = Z_S(s). \quad (4.4.8)$$

Diese allgemeingültige Beziehung bei Zustandsregelkreisen galt beim klassischen Reglerentwurf i.a. nicht. Kehren wir jedoch zu dem angekündigten Beispiel zurück.

Beispiel 4.4.1: Für den in Beispiel 4.1.1 entworfenen Zustandsregelkreis mit der Regelstrecke

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t)$$

und dem Zustandsregler (4.1.18)

$$\underline{k}' = [1,667 \quad 2,667]$$

soll ein Führungsgrößenvorfilter m_w entworfen werden, das die Regelgröße $y(t)$ bei einer Streckenanfangsstörung $\underline{x}'_0 = [-2 \quad -2]$ und einer Führungsgröße $w(t) = \sigma(t)$; $w = 1$ auf den dazugehörigen stationären Endwert $y(\infty) = 1$ führt.

Zur Berechnung des Führungsgrößenvorfilters m_w benötigen wir die Führungsgrößenübertragungsfunktion

$$T_{YW}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Z_{YW}(s)}{N_{YW}(s)} .$$

Nach Satz 4.4.8 ist $Z_{YW}(s) = Z_S(s)$. Dieses Zählerpolynom haben wir schon berechnet und können es aus (2.0.23) ablesen. Auch $N_{YW}(s)$ ist durch den Polvorgabeentwurf des Zustandsreglers (4.1.19) bekannt, so daß $T_{YW}(s)$ folgende Form hat

$$T_{YW}(s) = \frac{1,5 \cdot (s + 2)}{s^2 + 8s + 16} = \frac{1,5s + 3}{s^2 + 8s + 16} .$$

Damit sind $b_0 = 3$ und $a_0 = 16$ bekannt, womit sich das Führungsgrößenvorfilter nach (4.4.7) berechnen läßt

$$m_w = \frac{a_0}{b_0} = \frac{16}{3} = 5,333 .$$

Ordnet man das Filter m_w , wie in Bild 4.4.2 dargestellt, vor dem Zustandsregelkreis an und simuliert die Anordnung unter den gegebenen Bedingungen, ergibt sich eine Führungssprungantwort, wie sie in Bild 4.4.3 dargestellt ist:

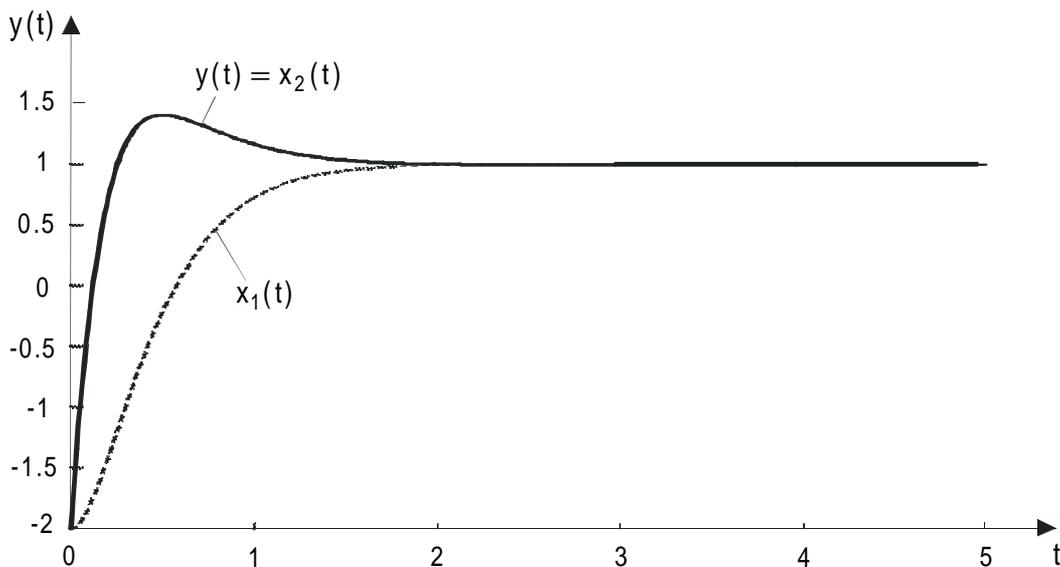


Bild 4.4.3: Führungssprungantwort eines Zustandsregelkreises mit Führungsgrößenvorfilter

$y(t)$ erreicht den gewünschten stationären Zustand $y(\infty) = 1$. Die Tatsache, daß die zweite Zustandsgröße $x_1(t)$ auch $x_1(\infty) = 1$ erreicht, ist Zufall und i.a. nicht der Fall.

Nachdem wir uns ausführlich mit der Führbarkeit von Zustandsregelkreisen auseinandergesetzt haben, wollen wir uns gestörten Regelkreisen zuwenden.

Das heißt, wir betrachten jetzt Regelstrecken, die neben einer unbekanntem Anfangsstörung auch noch durch von außen auf die Strecke wirkende Störungen beeinflusst werden. Vorübergehende Störungen, das sind solche, die kurzzeitig auf das System einwirken und dann wieder abklingen, haben den Charakter von Anfangsstörungen und werden i.a. ausgeregelt.

Bleibende Störgrößen, wie sie häufig in der Praxis vorkommen, werden von einem Zustandsregelkreis nicht ausgeregelt. Falls diese Störungen meßbar sind, wird in der Literatur /4/ der Entwurf eines Störgrößenfilters, das Ähnlichkeit mit der Störgrößen-aufschaltung in der klassischen Regelungstechnik hat, vorgeschlagen. Da aber auch in der Praxis die Störgrößen i.a. nicht meßbar sind, wird die Problematik mit einem Rückgriff auf die klassische Regelungstechnik gelöst: über den Zustandsregelkreis (ob mit oder ohne Beobachter ist unerheblich) wird ein klassischer PI-Regler überlagert (vergleiche Bild 4.4.4).

Der I-Anteil im PI-Regler macht einerseits das Führungsgrößenfilter überflüssig und regelt andererseits, wie aus /1/ bekannt ist, bleibende Störungen aus.

Der Entwurf des PI-Reglers ist denkbar einfach: die mittels des Zustandsreglers optimierte Führungsübertragungsfunktion des geführten Zustandsregelkreises wird als Streckenübertragungsfunktion $G_S^*(s)$ des überlagerten Regelkreises mit PI-Regler aufgefaßt. (Ein eventuell eingesetzter Beobachter muß wegen des Satzes (4.3.1) bei der Berechnung von $G_S^*(s)$ nicht berücksichtigt werden!)

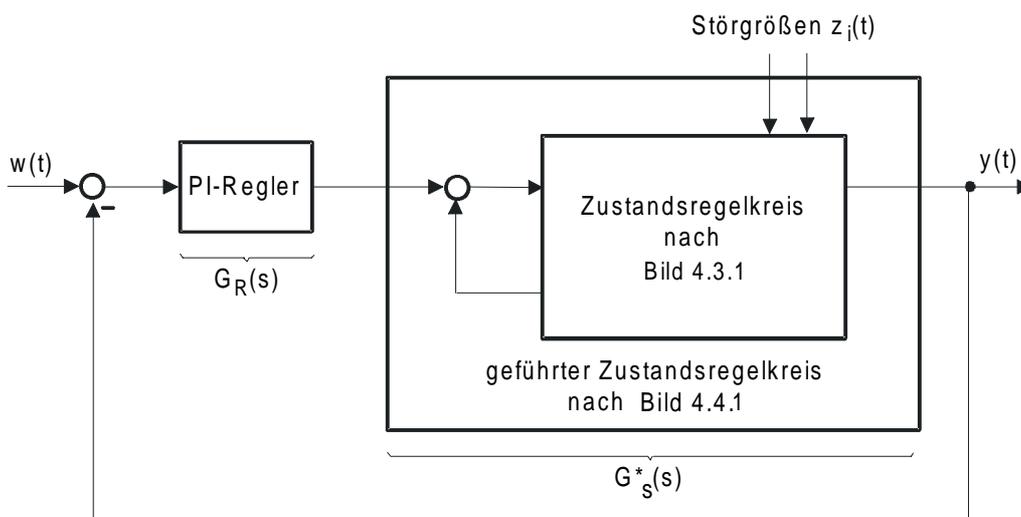


Bild 4.4.4: Zustandsregelkreis mit überlagertem PI-Regler

Für diese Ersatzregelstrecke läßt sich nach Satz (4.4.8) leicht die Übertragungsfunktion aufstellen:

$$G^*_S(s) = T_{YW}(s) = \frac{Z_S(s)}{N_{YW}(s)} ; \quad (4.4.9)$$

$Z_S(s)$: Zählerpolynom der ursprünglichen Regelstrecke $G_S(s)$;

$N_{YW}(s)$: Nennerpolynom des optimierten Zustandsregelkreises.

Mit der Übertragungsfunktion des PI-Reglers erhält man dann die Übertragungsfunktion des offenen überlagerten Regelkreises

$$L(s) = G_R(s) \cdot G^*_S(s) = \frac{V \cdot (1 + sT)}{s} \cdot \frac{Z_S(s)}{N_{YW}(s)} , \quad (4.4.10)$$

der mit den in /2/ vorgestellten Methoden optimiert werden kann.

5 Zeitdiskrete Systeme im Zustandsraum

Auch zeitdiskrete Systeme lassen sich im Zeitbereich neben der von uns bevorzugten rekursiven Differenzgleichung auch als Zustandsmodell in Form einer sog. Vektordifferenzgleichung mathematisch modellieren

$$\begin{aligned} \underline{x}(k + 1) &= \underline{\phi}(T) \cdot \underline{x}(k) + \underline{h}(T) \cdot u(k) ; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \\ y(k) &= \underline{c}' \cdot \underline{x}(k) . \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

Wenn das zeitdiskrete Zustandsmodell (ähnlich wie bei der Ableitung der Sprunginvarianz-Transformation in /1/) durch Vorschaltung eines Haltegliedes aus einem kontinuierlichen System der Form (2.0.2) entstanden ist,

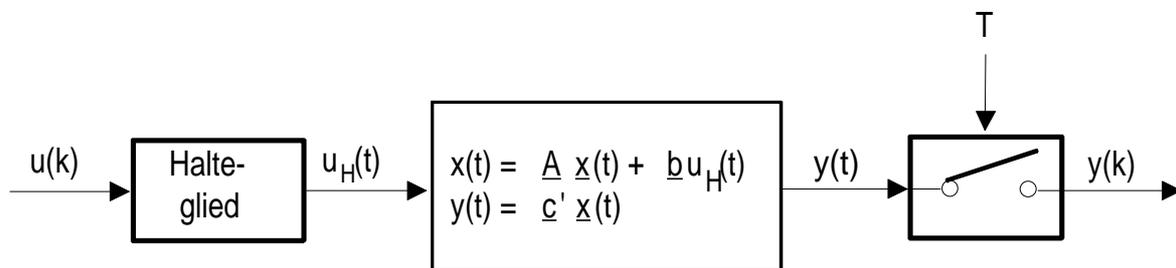


Bild 5.0.1: Zur Entstehung des zeitdiskreten Systemmodells (5.0.1) aus einem kontinuierlichen Systemmodell

wobei das Eingangssignal $u_H(t)$ jeweils über die Abtastzeit konstant gehalten wird, so berechnen sich die Parametermatrizen $\underline{\phi}(T)$ und $\underline{h}(T)$ aus

$$\underline{\phi}(T) = \underline{\phi}(t) \Big|_{t=T} \quad (5.0.2)$$

und

$$\underline{h}(T) = \int_0^T \underline{\phi}(\tau) d\tau \cdot \underline{b} \quad (5.0.3)$$

mit

$$\underline{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \cdot \{ \phi(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \cdot \{ s \cdot \underline{E} - \underline{A} \}^{-1} , \quad (5.0.4)$$

wobei \underline{A} , \underline{b} und \underline{c}' die Parametermatrizen des ursprünglichen kontinuierlichen Zustandsmodells sind.

Auch für das zeitdiskrete Systemmodell läßt sich eine geschlossene Lösung

$$y(k) = \underline{c}' \cdot \underline{\phi}^k(T) \cdot \underline{x}(0) + \sum_{i=1}^k \underline{c}' \cdot \underline{\phi}^{i-1}(T) \cdot \underline{h}(T) \cdot u(k - i) \quad (5.0.5)$$

und eine Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \underline{c}' \cdot (z \cdot \underline{E} - \underline{\phi}(T))^{-1} \cdot \underline{h}(T) \quad (5.0.6)$$

angeben. $G(z)$ ist identisch mit der Übertragungsfunktion, die aus $G(s)$ mittels der Sprunginvarianz-Transformation /1/ berechnet wurde, wenn $G(s)$ die Übertragungsfunktion von (2.0.2) ist.

Wie für kontinuierliche Systeme lassen sich auch für zeitdiskrete Systemmodelle der Form (5.0.1) Normalformen des Zustandsmodells berechnen, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit prüfen sowie Zustandsregler und Zustandsbeobachter entwerfen.

Ersetzt man zum Zwecke dieser Berechnungen in den entsprechenden vorangehenden Kapiteln die kontinuierlichen Systembeschreibungen

$$\begin{array}{ll} (2.0.2) & \text{gegen} \quad (5.0.1) \text{ und} \\ (2.0.14) & \text{gegen} \quad (5.0.6), \end{array}$$

kann man alle angegebenen Berechnungsverfahren auch für zeitdiskrete Systeme verwenden.

Aus Zeitgründen können wir weder die in diesem Kapitel kurz vorgestellten Beziehungen ableiten, noch näher auf zeitdiskrete Systemeigenschaften und Regelkreise im Zustandsraum eingehen. Ausführliche Erläuterungen zu diesem Thema befinden sich in /3/ und /4/.

Literaturverzeichnis

- /1/** Ottens, M.
Grundlagen der Systemtheorie
Vorlesungsskript
Technische Fachhochschule Berlin, Fachbereich VI
- /2/** Ottens, M.
Einführung in die Regelungstechnik
Vorlesungsskript
Technische Fachhochschule Berlin, Fachbereich VI
- /3/** Unbehauen, H.:
Regelungstechnik II
ab 5., durchgesehene Auflage, 1989
Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- /4/** Föllinger, O.:
Regelungstechnik
ab 6., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, 1990
Hüthig Buch Verlag, Heidelberg
- /5/** Zurmühl, R.; Falk, S.:
Matrizen und ihre Anwendungen
ab 5. Auflage
Teil 1: Grundlagen, 1984
Teil 2: Numerische Methoden, 1986
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, ..., Tokyo
- /6/** Stöcker, H. (Hrsg.):
Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren
1. Auflage, 1992
Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main
- /7/** Ottens, M.
Praktische Verfahren zur experimentellen Systemidentifikation
Vorlesungsskript
Technische Fachhochschule Berlin, Fachbereich VI

Anhang A1

Lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren

- **Lineare Gleichungssysteme**

Lineare Gleichungssysteme sind Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}, \quad (\text{A1.1})$$

wobei die a_{ik} und die b_i bekannte und die x_k unbekannte Größen sind.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des wichtigsten Spezialfalles linearer Gleichungssysteme mit $m = n$, d.h. es liegen keine über- oder unterbestimmten Systeme vor (siehe dazu /4, 5, 6/):

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}. \quad (\text{A1.2})$$

(A1.2) kann in Matrixschreibweise wie folgt dargestellt werden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\underline{b}}. \quad (\text{A1.3})$$

Ist der Vektor $\underline{b} = \underline{0}$, spricht man von einem homogenen Gleichungssystem, ist $\underline{b} \neq \underline{0}$ von einem inhomogenen.

Das Gleichungssystem ist für $\underline{b} \neq \underline{0}$ lösbar

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}, \quad (\text{A1.4})$$

wenn die Determinante $\det \underline{A} \neq 0$ ist. Ist $\underline{b} = \underline{0}$ (homogenes System), dann muß auch $\underline{x} = \underline{0}$ sein (triviale Lösung).

Ein homogenes Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ kann dann nur eine Lösung $\underline{x} \neq \underline{0}$ haben, wenn die Determinante gleich Null ist:

$$\det \underline{A} = 0 \quad (\text{A1.5})$$

- **Eigenwerte und Eigenvektoren**

Jeder quadratischen Matrix \underline{A} ist ein sog. charakteristisches Polynom zugeordnet. Bezeichnet man die unabhängige Variable dieses Polynoms mit s , ergibt sich das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ aus

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(s \cdot \underline{E} - \underline{A}) = \\ &= s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 . \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ werden auch als Eigenwerte s_i der Matrix \underline{A} bezeichnet.

Unter einem sog. Eigenvektor $\underline{v} \neq \underline{0}$ der Matrix \underline{A} versteht man einen $n \times 1$ -Vektor, der folgende Gleichung erfüllt

$$\underline{A} \cdot \underline{v}_i = s_i \cdot \underline{v}_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A1.7})$$

Bringt man (A1.7) auf die allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems (vergleiche A1.3)

$$\begin{aligned} 0 &= s_i \cdot \underline{v}_i - \underline{A} \cdot \underline{v}_i \\ (\underline{s}_i \cdot \underline{E} - \underline{A}) \cdot \underline{v}_i &= 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

erkennt man, daß es sich um ein homogenes, lineares Gleichungssystem handelt.

Damit eine Lösung existiert, muß nach (A1.5) $\det (s_i \cdot \underline{E} - \underline{A}) = 0$ sein. Dies ist auch der Fall, da nach (A1.6) die Eigenwerte s_i die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s) = \det (s \cdot \underline{E} - \underline{A})$ sind.

Mit (A1.8) läßt sich zu jedem Eigenwert s_i ein dazugehöriger Eigenvektor \underline{v}_i berechnen. In der Theorie linearer Vektorräume, die wir hier aus Zeitgründen nicht besprechen können, kommt diesen beiden Begriffen eine anschauliche Bedeutung zu. Während der Eigenvektor eine Richtung im Vektorraum angibt, skaliert der Eigenwert diese Richtung (Betrag dieses Vektor).

Daß ein Eigenvektor nur einen Richtungscharakter hat, erkennt man an folgendem: wenn \underline{v}_i ein Lösungsvektor von (A1.8) ist, ist auch $k \cdot \underline{v}_i$ mit $k = \text{konst.}$ ein Lösungsvektor, der (A1.8) erfüllt. Da die Richtung eines Vektors aber nur vom Verhältnis seiner Komponenten (Elemente) abhängt, ist diese Lösungsvielfalt für seine Aussagekraft über eine Richtung unerheblich.

Man kann weiterhin zeigen, daß die zu verschiedenen Eigenwerten s_i gehörenden Eigenvektoren voneinander linear unabhängig sind /5/. Wenn dies der Fall ist, kann man eine zur Matrix \underline{A} gehörende Matrix der Eigenvektoren \underline{V} bilden

$$\underline{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.9})$$

die wegen $\det \underline{V} \neq 0$ immer invertierbar ist.