

Hydromechanik

Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2006/2007

M. Manhart

Technische Universität München

Oktober 2006

Vorwort

Dieses Skript dient als begleitende Unterlage zur Vorlesung Hydromechanik für das 3. Semester des Studienganges Bauingenieurwesen und Umweltingenieurwesen an der Technischen Universität München. Der Verfasser bittet um Nachsicht und Rückmeldung, wenn sich der eine oder andere Druckfehler eingeschlichen hat.

München, 16.10.2007

Michael Manhart

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Einführung	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Einheiten und Symbole	2
1.3	Zustandsgrößen	3
1.4	Transporterscheinungen aufgrund der Brownschen Molekularbewegung	4
1.5	Kompressibilität und Ausbreitung von Druckstörungen (Schallgeschwindigkeit)	5
1.6	Oberflächenspannung.	6
1.7	Besondere Eigenschaften des Wassers	7
1.7.1	Dichte von Wasser	9
1.7.2	Viskosität von Wasser	9
1.7.3	Wärmekapazität von Wasser	9
1.7.4	Physikalische Eigenschaften von Wasser	10
1.8	Aufgaben zu Kapitel 1	11
1.9	Verwendete Zeichen	12
2	Hydrostatik	13
2.1	Druck	13
2.2	Gleichgewicht am differentiellen Element	14
2.3	Bezugsdruck	15
2.4	Statische Druckverteilung im Schwerfeld	15

2.4.1	Veränderliche Dichte	17
2.5	Druckkraft auf ebene Flächen	19
2.5.1	Gesamtkraft	19
2.5.2	Kraftangriffspunkte	20
2.6	Aufteilung in x- und z-Richtung	22
2.6.1	Druckfiguren	23
2.6.2	Fußpunktgerade	23
2.7	Auftrieb	24
2.8	Bewegte Bezugssysteme	25
2.8.1	Konstant beschleunigte Behälter	27
2.8.2	Rotierende Behälter	28
2.9	Verwendete Zeichen	31
3	Kinematik	32
3.1	Beschreibung von Feldern	32
3.2	Lagrange - Euler	33
3.3	Lokale, konvektive und substantielle Ableitung	34
3.4	Verformungen	35
3.4.1	Rotationsanteil	36
3.4.2	Deformationsanteil	37
3.4.3	Geschwindigkeitsgradiententensor	38
3.4.4	Divergenz	39
3.5	Ausgezeichnete Linien im Strömungsfeld	40
3.6	Volumenstrom und Durchfluss	41
3.7	Stromfunktion	43
4	Potentialtheorie	45
4.1	Lösung der Potentialgleichung.	47
5	Kinetik	50

5.1	Bewegungsgleichung von Cauchy	50
5.2	Konstitutive Gleichung	54
5.2.1	Druck und viskose Spannungen	54
5.3	Navier-Stokes-Gleichung	56
5.4	Impulssatz	56
5.5	Bernoulli-Gleichung	60
5.5.1	Anwendungen der Bernoulli-Gleichung	61
6	Strömungen in Rohrleitungen	63
6.1	Schubspannungsverteilung	64
6.2	Energie- und Drucklinie	66
6.3	Reibungswiderstand	67
6.3.1	Sonstige Verluste	70
6.4	Energieplan	71
7	Stationäre Gerinneströmungen	73
7.1	Begriffe in der Gerinnehydraulik	74
7.2	Gleichförmige Bewegung: Normalabfluss	75
7.3	Fließformeln	76
7.4	Fließzustand und Grenzverhältnisse	78
7.4.1	Konstanter spezifischer Abfluss	78
7.4.2	Konstante Energiehöhe	80
7.4.3	Grenzverhältnisse	80
7.4.4	Beispiel: Abfluss über eine Sohlstufe	81
7.4.5	Stationär-Ungleichförmige Strömung	82
7.5	Verwendete Zeichen	84

Kapitel 1

Allgemeine Einführung

1.1 Einleitung

Die **Hydromechanik** ist Teil der Mechanik, welche in die beiden Bereiche **Festkörpermechanik** und **Fluidmechanik** unterteilt wird. Als Fluide werden dabei Flüssigkeiten und Gase bezeichnet. Während sich die Hydromechanik dem Namen nach der Mechanik des Wassers verschreibt, sind ihre Grundlagen, die hier gelehrt werden, allgemein auf alle Flüssigkeiten und Gase anwendbar.

Bindeglied zwischen der Festkörpermechanik und der Fluidmechanik ist die **Rheologie**. Die Rheologie ist die Lehre von der Deformation und dem Fließen von Stoffen. In der Fluidmechanik wird unterschieden in die **Fluidstatik**, die Lehre von den Fluiden in Ruhe, und die **Fluiddynamik**, in welcher die Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und den dabei ausgeübten Kräften behandelt werden. Ähnlich wie in der Festkörpermechanik werden in der **Kinematik** Geschwindigkeiten ohne Einwirkung von Kräften betrachtet.

Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Fluiden und Festkörpern ist die Fließfähigkeit. Beim Fluid führen bereits geringste Schubspannungen zu Verformungen. Nach dem Ende der Einwirkung erfolgt keine Rückkehr zur ursprünglichen Form. Fluide sind demnach nicht formstabil. Während Schubspannungen in Festkörpern von der Größe der Verformungen abhängen, ist bei den Fluiden dafür die Verformungsgeschwindigkeit maßgeblich. Fluide werden anhand unterschiedlichen Verhalten auf Druck in Flüssigkeiten und Gase untergliedert. Gegenüber den Flüssigkeiten haben Gase eine höhere Kompressibilität, sowie eine weit geringere Dichte.

In der Hydromechanik können mehrere Phasen am Strömungsvorgang beteiligt sein, man spricht dann von Mehrphasenströmungen. Die einzelnen Phasen können dabei in allen Aggregatzuständen auftreten. Beispiele für Zweiphasenströmungen

sind:

flüssig-flüssig:	Süßwasser-Salzwasser
flüssig-fest:	Wasser-Geschiebe im Fluss
flüssig-gasförmig:	Wasser-Luft.

Unter **Hydraulik** wird eine **angewandte Hydromechanik** für die technische Praxis im Bereich des Bauingenieurwesens verstanden. Ihre theoretischen Grundlagen kommen aus der Hydromechanik. Neben der Theorie dienen Experimente an physikalischen Modellen und die Anwendung numerischer Methoden (mathematische Modelle) zur Lösung von Strömungsproblemen.

Anwendungsgebiete der Hydromechanik im Bereich des Bauingenieurwesens sind vielfältig. Sie lassen sich am besten anhand der verwendeten Unterkapitel aufzeigen. Die **Rohrhydraulik** ist die Grundlage für die Bemessung von Versorgungsleitungen für den Transport von Wasser, Erdöl und Gas ebenso wie für den Anlagenbau in der Verfahrenstechnik. Spektakuläre Anwendungen sind die Hochdruckleitungen bei Wasserkraftwerken. Im Gegensatz zu den unter Druck durchflossenen Rohrleitungen werden in der **Gerinnehydraulik** Strömungen mit einer freien Oberfläche behandelt. Darunter sind Bäche und Flüsse als natürliche Gerinne ebenso zu verstehen wie die künstlichen Gerinne für die Be- und Entwässerung, Triebwasserkanäle und Gerinne im Bereich der Abwasserableitung und -behandlung.

Zunehmend an Bedeutung im Bereich der Wasserwirtschaft gewinnt die Behandlung von **Grundwasserströmungen** und den damit verbundenen Transporterscheinungen für natürliche und im Zusammenhang mit Altlasten weniger erwünschte Inhaltsstoffe. Diese Themen bleiben allerdings dem vertieften Studium der Hydromechanik vorbehalten. Die allgemeingültigen Grundlagen der Hydromechanik können auch zur Behandlung von Strömungsvorgängen mit anderen Fluiden herangezogen werden. Beispielhaft genannt seien hier die Luft zur Bewetterung von Stollen im Tunnelbau und der Transport von Beton in Rohrleitungen.

1.2 Einheiten und Symbole

Basiseinheiten auf der Grundlage des internationalen Einheitensystems (SI) Systeme International d'Unités:

Benennung	Symbol	Einheit
Länge	l	[m]
Masse	m	[kg]
Zeit	t	[s]
Temperatur	T	[K]

Die wichtigsten abgeleiteten Einheiten sind:

Benennung	Symbol	Einheit
Kraft	F	$[N] = \left[kg \cdot \frac{m}{s^2} \right]$
Druck	p	$[p] = \left[\frac{N}{m^2} \right]$

1.3 Zustandsgrößen

Dichte. Für den homogenen Körper ist allgemein die Dichte ρ der Quotient aus der Masse m und dem Volumen V .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{in} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad (1.1)$$

Druck. Der Druck p ist ein Maß für die von einem Fluid auf die Berandung ausgeübte Normalkraft bzw. für die Normalspannung im inneren des Fluids. Er ist durch den Quotienten zwischen Kraft und Fläche definiert.

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{in} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (1.2)$$

Temperatur. Die Temperatur T ist zusammen mit der Wärmekapazität ein Maß für die innere (thermische) Energie, die in einem Fluid gespeichert ist. Sie wird gegen einen Bezugspunkt gemessen. Wenn die Temperatur in Kelvin $[K]$ angegeben wird, dann ist der Bezugspunkt der absolute Nullpunkt. Die spezifische Wärmekapazität c_p gibt an, wieviel Energie einem Fluid zugeführt werden muss, um seine Temperatur um $1K$ zu erhöhen.

$$c_p = \frac{\text{Wärme}}{\text{Masse} \cdot \text{Temperatur}} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right] \quad (1.3)$$

Gesetz von Boyle-Mariotte. Für ideale Gase stehen diese drei Zustandsgrößen in einem linearen Zusammenhang.

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad (1.4)$$

Dabei ist T die absolute Temperatur und R die ideale Gaskonstante.

$$R = 848 \frac{J}{kgK}$$

Bei isothermer Zustandsänderung ergibt sich.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (1.5)$$

Für reale Gase wie z.B. Luft gilt dies näherungsweise.

1.4 Transporterscheinungen aufgrund der Brownschen Molekularbewegung

Man unterscheidet in Fluiden zwei unterschiedliche Transportvorgänge: Konvektion und Diffusion. Die Konvektion geschieht aufgrund des makroskopischen Geschwindigkeitsfeldes. Die Diffusion ist eine Folge der Brownschen Molekularbewegung und tritt auch in Festkörpern auf. Sie führt immer zu einem Ausgleich von Inhomogenitäten im betrachteten Volumen. Dabei können Temperaturverteilungen oder Massenkonzentrationen sowie Inhomogenitäten in der Geschwindigkeitsverteilung ausgeglichen werden. Der Grund für diesen Ausgleich ist die Beweglichkeit der Moleküle, die ihre Eigenschaften (Stoff, Temperatur, Geschwindigkeit) mit sich tragen und im Raum "verteilen".

Massendiffusion. Bezeichnet man mit C die Konzentration, so ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen dem Massenfluss q_c und dem Gradienten der Konzentration (Ficksches Gesetz) mit dem molekularen Diffusionskoeffizienten k_c .

$$q_c = -k_c \nabla C \quad (1.6)$$

Wärmeleitung. Der lineare Zusammenhang zwischen Wärmefluss und Temperaturgradient wird als Fouriersches Gesetz bezeichnet, mit dem Wärmeleitkoeffizienten k_t .

$$q = -k_t \nabla T \quad (1.7)$$

Übertragung von Impuls durch die Viskosität. Ebenso wie Wärme oder Masse durch die Brownsche Molekularbewegung übertragen wird, bzw. deren Inhomogenitäten ausgeglichen werden, kann auch Impuls übertragen werden. Die Moleküle tragen ihren Impuls mit sich. Wenn dann Moleküle mit kleinerem Impuls in eine Umgebung wandern, in der die umgebenden Moleküle einen größeren Impuls besitzen, führt dies zu einem Ausgleich der Größe Impuls zwischen den Molekülen. Der Impulsausgleich aufgrund der Molekularbewegung geschieht immer in

Richtung des Gradienten des makroskopischen Geschwindigkeitsfeldes. Fluide, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen Impulsfluss und Geschwindigkeitsgradienten besteht werden Newtonsche Fluide genannt. Ein auf die Fläche bezogener Impulsfluss wird als Spannung τ bezeichnet. Mit der dynamischen Viskosität μ (teilweise auch η benannt) ergibt sich für **Newtonsche Fluide** folgender linearer Zusammenhang.

$$\tau = \mu (\nabla v + \nabla v^t) \quad (1.8)$$

Im Rahmen dieser Vorlesung werden nur Newtonsche Fluide betrachtet. Die Viskosität (Zähigkeit) ist ein Maß für die innere Reibung in einem Fluid.

Für eine einfache Strömungssituation – der Strömung eines Flüssigkeitsfilms entlang einer ebenen glatten Platte – ergibt sich aufgrund der Viskosität und des Geschwindigkeitsgradienten normal zur Wand eine Widerstandskraft an der Wand.

$$F_w = \tau_w \cdot A \quad (1.9)$$

mit der Wandschubspannung

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.10)$$

1.5 Kompressibilität und Ausbreitung von Druckstörungen (Schallgeschwindigkeit)

Jedes Medium lässt sich in gewissem Maße durch Druckkräfte von außen zusammendrücken, es ist kompressibel. Die Kompressibilität ist dabei ein Maß für die relative Volumenänderung pro Druckänderung. Gase sind wesentlich stärker kompressibel als Flüssigkeiten. Der Reziprokwert der Kompressibilität ist der Elastizitätsmodul E , es gilt analog zum Hookeschen Gesetz

$$E = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad \text{bzw.} \quad \Delta p = -E \frac{\Delta V}{V} \quad (1.11)$$

Typische Werte für den E-Modul sind $E_{Wasser} = 2,1 \cdot 10^9 Pa$ für Wasser und $E_{Luft} = 1,5 \cdot 10^5 Pa$. Um bei Wasser eine prozentual ähnliche Volumenänderung hervorzurufen, benötigt man eine um das 10000-fache höhere Druckänderung, als bei Luft. Man kann Gleichung 1.11 umformen in

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{E}{\rho} \quad \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \quad (1.12)$$

und daraus die Wurzel ziehen, um eine Geschwindigkeit zu erhalten.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1.13)$$

Diese Geschwindigkeit c entspricht der Geschwindigkeit, mit der sich Druckänderungen in einem Medium fortpflanzen, der **Schallgeschwindigkeit**. Die Schallgeschwindigkeit ist abhängig von der Temperatur, als typische Werte gelten

$$c \approx 1449 \frac{m}{s} \quad \text{für Wasser bei } 10^\circ \text{ C}$$

$$c \approx 344 \frac{m}{s} \quad \text{für Luft bei } 20^\circ \text{ C}$$

1.6 Oberflächenspannung.

Die Oberflächenspannung ist eine Grenzflächenspannung an der Phasentrennfläche gegen Luft. Definiert wird die Oberflächenspannung zu

$$\sigma = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Fläche}} = \frac{N \cdot m}{m^2} = \frac{N}{m} \quad (1.14)$$

Ursache der Oberflächenspannung sind Adhäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen. Im Inneren heben diese sich gegenseitig auf, an der Trennfläche wirken stärkere Anziehung vom Inneren als von den Gasmolekülen von außen. Um vom Inneren an die Oberfläche zu kommen, muss der Kohäsionsdruck überwunden werden. Zur Vergrößerung der Oberfläche muss demnach Arbeit geleistet werden (Luftblasen).

Die Oberflächenspannung ist abhängig von der Kombination. Sie beträgt für folgende Grenzflächen in etwa:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.073 N/m \quad \text{für Wasser-Luft} \\ \sigma &= 0.02 \dots 0.003 N/m \quad \text{für Wasser+Tensid-Luft} \\ \sigma &= 0.073 N/m \quad \text{für Wasser-Öl} \end{aligned}$$

Die Oberflächenspannung ist von Bedeutung für Tropfen, Sprays, Blasen, Lufteintrag in Wasser und für Strömungseffekte in Kapillaren. Von praktischer Bedeutung ist z.B. die kapillare Steighöhe h_k für runde Kapillaren vom Durchmesser d_k

$$h_k = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot d_k} \quad (1.15)$$

Die kapillare Steighöhe ist zu beachten an der Grenze des Grundwasserkörpers zu den luftgefüllten Hohlräumen des Untergrunds im Bereich der Grundwasserhydraulik.

1.7 Besondere Eigenschaften des Wassers

Phasenübergang/Dampfdruck. Wie andere Stoffe auch, kann Wasser in drei unterschiedlichen Phasen auftreten: fest, flüssig und gasförmig. Bei der festen Phase spricht man von Eis, bei der gasförmigen von Dampf. In der flüssigen Phase beträgt der mittlere Molekülabstand $3 \cdot 10^{-8}m$. Welche Phase eingenommen wird, wird durch die Temperatur und den Druck bestimmt. Im Zustandsdiagramm kann man den jeweiligen Zustand ablesen.

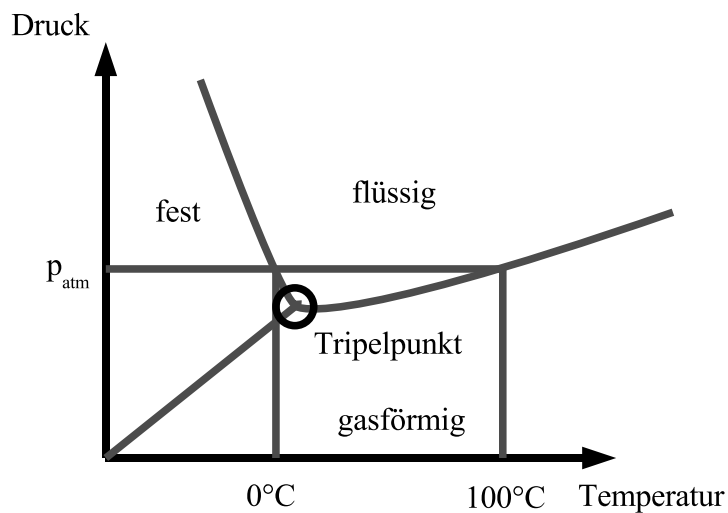


Abbildung 1.1: Zustandsdiagramm von Wasser.

Die einzelnen Phasenübergänge werden in folgendem Diagramm dargestellt:

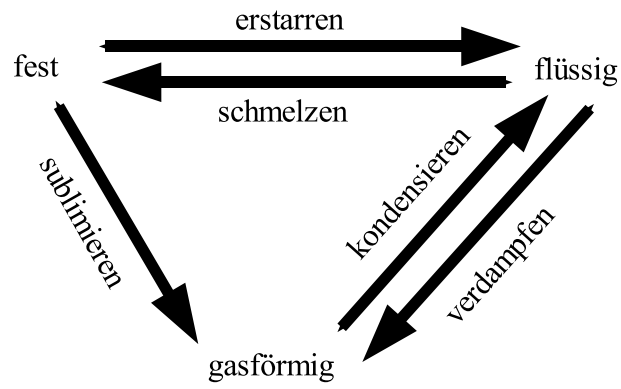


Abbildung 1.2: Phasenübergänge.

1.7.1 Dichte von Wasser

Im Allgemeinen ist die Annahme der Homogenität auch im Medium Wasser gerechtfertigt. In Ausnahmefällen (Dichteströmungen) sind Dichteunterschiede zu berücksichtigen. Die Dichte von Wasser ist in erster Linie temperaturabhängig $\rho = \rho(T)$. Für viele Vorgänge in der Natur entscheidend ist die Dichteanomalie des Wassers, das ein Dichtemaximum oberhalb des Gefrierpunktes aufweist. Dies hat zur Folge, dass sich z.B. in Seen bei Lufttemperaturen oberhalb und unterhalb des Gefrierpunktes von Wasser eine stabile Schichtung einstellen kann. Für $T = 4^\circ\text{C}$ beträgt für reines Wasser die größte Dichte $\rho = 999,97 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Für den Temperaturbereich von 0°C bis 100°C ist die Dichte von reinem Wasser in Tabelle 1.1 aufgelistet. Die Dichte wird allerdings sehr stark von gelösten und suspendierten Stoffen (Salz, suspendierte Teilchen in Flüssen als Schweb) beeinflusst. Die Tabellenwerte sind demnach Minimalwerte für die tatsächliche Dichte.

Erwärmung über 4°C oder Abkühlung führt zur Volumenausdehnung. Ebenfalls von großer physikalischer Bedeutung ist die Unstetigkeit der Dichte beim Übergang zum festen Aggregatzustand (Eis). Diese Änderung ist mit einer Volumenvergrößerung von ca. 9% verbunden.

1.7.2 Viskosität von Wasser

Die Zähigkeit von Wasser, die, je nach Wandbeschaffenheit, einen Einfluss auf die Reibungsverluste von Strömungen hat, ist sehr stark von der Temperatur abhängig. Die zugehörigen Werte finden sich unter Tabelle 1.1.

1.7.3 Wärmekapazität von Wasser

Wasser hat mit ca. $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ eine vergleichsweise hohe spezifische Wärmekapazität, die geringfügig temperaturabhängig ist.

1.7.4 Physikalische Eigenschaften von Wasser

Temperatur	Dichte	dynamische Viskosität	kinematische Viskosität	Dampfdruck
T	ρ	η	ν	$h_d = \frac{p_d}{\rho g}$
$^{\circ}\text{C}$	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$x \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$	$x \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	m
0	0,999840	1,7921	1,7924	0,06
5	0,999964	1,5108	1,5189	0,09
10	0,999700	1,3077	1,3081	0,12
15	0,999101	1,1404	1,1414	0,17
20	0,998206	1,0050	1,0068	0,24
30	0,995650	0,8007	0,8042	0,43
40	0,992219	0,6560	0,6611	0,75
50	0,98805	0,5494	0,5560	1,25
60	0,98321	0,4688	0,4768	2,02
70	0,97779	0,4061	0,4153	3,17
80	0,97183	0,3565	0,3668	4,82
90	0,96532	0,3165	0,3279	7,14
100	0,95835	0,2838	0,2961	10,33

Tabelle 1.1: Physikalische Eigenschaften von Wasser

1.8 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1

Bei einem Scherversuch zwischen zwei parallelen Platten im Abstand d befinde sich das zu untersuchende Medium zunächst im spannungsfreien Zustand. Von der Zeit t_0 bis zur Zeit t_1 werde die örtlich und zeitlich konstante Schubspannung τ_0 aufgeprägt, danach sei das Medium wieder spannungsfrei. Skizzieren Sie die Verschiebung ξ als Funktion der Zeit t und berechnen Sie die maximale Verschiebung

- a) für ein Hooke-Medium mit dem Schubmodul G ,
- b) für ein Newtonsches Fluid mit der Zähigkeit η !

Aufgabe 1.2

In einem Becken befindet sich Wasser mit $T = 20^\circ\text{C}$. In dieses Becken wird ein dünnes Röhrchen eingetaucht, das an der Ober- und Unterseite offen ist. Das Wasser wird in diesem Rohr aufsteigen.

- a) Worauf beruht dieser Effekt?
- b) Welchen Durchmesser müsste das Röhrchen haben, damit die Wasserspiegeldifferenz zum Wasserspiegel des Beckens $h_k = 0,5$ m beträgt?
- c) In welchem Bereich der Hydraulik könnte dieser Effekt eine Rolle spielen?
- d) Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn das Becken nicht Wasser, sondern Quecksilber enthält?

Aufgabe 1.3

Wie groß ist der Überdruck in einem Regentropfen von 0,5 mm Durchmesser?

1.9 Verwendete Zeichen

Benennung	Zeichen	Einheit
Schallgeschwindigkeit	a	$\frac{m}{s}$
Kapillarrohr-Durchmesser	d_k	m
Elastizitätsmodul Wasser	E_W	$\frac{N}{m^2}$
Kraft	F	N
Erdbeschleunigung	g	$\frac{m}{s^2}$
kapillare Steighöhe	h_k	m
Masse	m	kg
Druck	p	$\frac{N}{m^2}$
Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$
Volumen	V	m^3
dynamische Zähigkeit	η	Pa · s
kinematische Zähigkeit	v	$\frac{m^2}{s}$
Dichte	ρ	$\frac{kg}{m^3}$
Oberflächenspannung	σ	$\frac{N}{m}$
Schubspannung	τ	$\frac{N}{m^2}$

Kapitel 2

Hydrostatik

Wie in der Festkörpermechanik können auch in der Fluidmechanik Zustände untersucht werden, die sich im Gleichgewicht befinden. Dies ist der Fall bei

- ruhenden Fluiden
- keiner Relativbewegung
- gleichförmiger Beschleunigung

Die Hydrostatik beschäftigt sich mit dem Kräftegleichgewicht in solchen Zuständen. Es treten keine Schubspannungen im Fluid auf und der Druck ist die einzige relevante Normalspannung. Hauptanwendung der Hydrostatik ist die Ermittlung von Kräften auf Bauwerke unter Einwirkung von Wasserdruck wie z.B. die Kraft durch Wasserdruck die auf eine Talsperre wirkt.

2.1 Druck

Der Druck entspricht einer Normalspannung die in alle Raumrichtungen gleich wirkt.

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A} \quad (2.1)$$

Der Druck ist eine skalare Größe und abhängig von der Position (x, y, z) im Raum.

$$p = f(x, y, z)$$

2.2 Gleichgewicht am differentiellen Element

Zunächst wird die Druckverteilung in einem ruhenden Fluid ermittelt. Wir leiten die Druckverteilung aus dem Kräftegleichgewicht am differentiellen Element her.

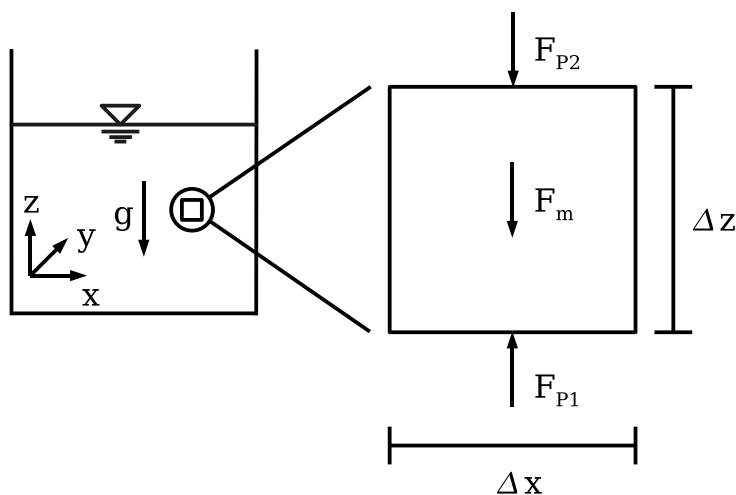


Abbildung 2.1: Kräftegleichgewicht am differentiellen Element.

An einem ruhenden Fluid greifen an einem differentiellen Element in z-Richtung die Massekraft F_m (Schwerkraft) und die Druckkräfte F_{p1} und F_{p2} an.

$$F_m = -m \cdot g = -\rho \cdot g \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$F_{p1} = p_1 \Delta x \Delta y$$

$$F_{p2} = -p_2 \Delta x \Delta y$$

Das System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der Kräfte verschwindet.

$$0 = \Sigma F_z$$

$$0 = F_m + F_{p1} + F_{p2}$$

$$0 = -\rho \cdot g \Delta x \Delta y \Delta z + p_1 \Delta x \Delta y - p_2 \Delta x \Delta y$$

Mit der Druckänderung Δp zwischen oberer und unterer Fläche $p_2 = p_1 + \Delta p$, ergibt sich daraus

$$0 = -\rho \cdot g \Delta x \Delta y \Delta z + (p_1 - p_1 - \Delta p) \Delta x \Delta y$$

$$0 = -\rho \cdot g \Delta z - \Delta p$$

Nach dem Grenzübergang $\lim \Delta z \rightarrow 0$ erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \quad (2.2)$$

Das bedeutet, dass unter hydrostatischen Bedingungen in vertikaler Richtung ein Druckgradient vorliegt, der der Schwerkraft entgegen wirkt. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe zu. In die beiden horizontalen Richtungen wirkt keine Beschleunigung. Somit herrscht in allen Punkten einer horizontalen Ebene der gleiche Druck.

2.3 Bezugsdruck

Gleichung 2.2 beschreibt die Druckänderung in vertikaler Richtung. Um den absoluten Wert des Druckes zu bekommen muss die Gleichung über z integriert werden. Für die Integrationskonstante gibt es grundsätzlich zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die sich durch den Bezugspunkt unterscheiden:

- absoluter Druck p_{abs}
Referenzdruck $p_0 = 0 \text{ Pa}$. Dieser Druck (Nullpunkt) tritt im Vakuum auf, d.h. dort wo keine Normalkraft auf die Berandung wirkt. Bei Anwendung des Gesetzes von Boyle-Mariotte muss unbedingt mit dem absoluten Druck gerechnet werden.
- relativer Druck p_{rel}
Referenzdruck ist der lokale atmosphärische Druck p_{atm} , der an der Wasseroberfläche herrscht. Diese Möglichkeit wird in den meisten Fällen angewandt.

$$p_{rel} = p_{abs} - p_{atm} \quad (2.3)$$

Der Standardatmosphärendruck ist definiert bei 15°C auf Meereshöhe $p_{atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

2.4 Statische Druckverteilung im Schwerfeld

In den meisten Fällen ist die Wassertiefe so gering, dass eine konstante Dichte angenommen werden kann. Integriert man Gleichung 2.2 unter dieser Annahme,

so erhält man

$$\int_{z_0}^z \frac{\partial p}{\partial z} dz = \int_{z_0}^z -\rho \cdot g dz$$

$$p(z) - p_0 = -\rho \cdot g \cdot (z - z_0)$$

$$p(z) = p_0 - \rho \cdot g \cdot (z - z_0) \quad (2.4)$$

Der Druck ist unter der Annahme einer konstanten Dichte eine lineare Funktion der Wassertiefe. Er nimmt linear mit der Wassertiefe zu. Die Randbedingung, dass an der Wasseroberfläche der atmosphärische Druck herrscht, liefert als Integrationskonstante $p_0 = p_{atm}$.

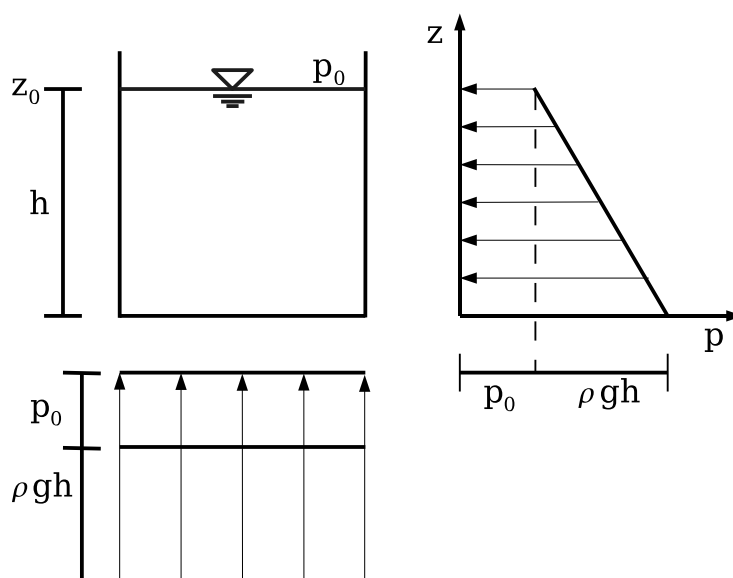


Abbildung 2.2: Druckverlauf in einem Behälter.

Der Wasserdruck nimmt linear mit der Überdeckung h zu und nimmt den Wert $\rho g h$ an. Dadurch lässt sich der anschauliche Begriff der *Druckhöhe* einführen. Durch Umformen der Gleichung (2.4) kann man aus der Druckgleichung eine Höhengleichung machen. Indem wir den Druck p durch ρg teilen, ändern wir die Einheit von Pascal [N/m^2] auf Meter m und bezeichnen die neue Größe als Druckhöhe. Da wir durch die Dichte von Wasser teilen, muss die korrekte Bezeichnung der Einheit [mWS] (Meter Wassersäule) lauten.

Bewegt man sich nun in dem in Abbildung 2.3 aufgezeichneten Behälter in der Vertikalen, so kann man feststellen, dass die Summe der auf ein bestimmtes Ni-

veau bezogenen geodätischen Höhe mit der Druckhöhe zusammen einen konstanten Wert ergibt. (Die rechte Seite der sich ergebenden Gleichung ist konstant.)

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + z = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + z_0 = \text{const.}$$

Die einzelnen Terme werden geodätische Höhe, Druckhöhe und piezometrische Höhe genannt.

$$\begin{aligned} z &\dots \text{geodätische Höhe} \\ \frac{p}{\rho \cdot g} &\dots \text{Druckhöhe} \\ \frac{p}{\rho \cdot g} + z &\dots \text{piezometrische Höhe} \end{aligned}$$

Die piezometrische Höhe ist in einer Flüssigkeitssäule mit konstanter Dichte eine konstante Größe.

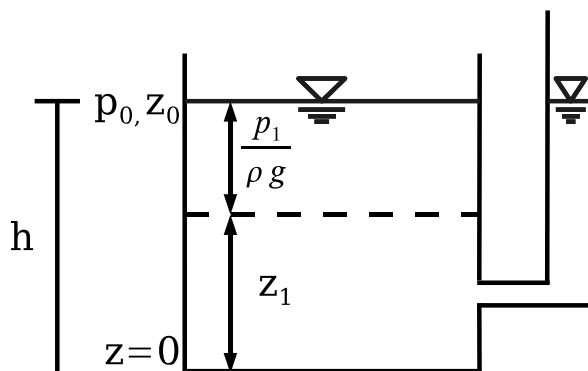


Abbildung 2.3: Piezometrische Höhe bei hydrostatischer Druckverteilung in einem Behälter.

$$h = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{p_1}{\rho g} + z_1$$

2.4.1 Veränderliche Dichte

Die Annahme einer konstanten Dichte $\rho = \text{const.}$ ist nicht in allen Fällen gerechtfertigt. Bei folgenden Situationen muss mit einer veränderlichen Dichte gerechnet werden.

- Temperaturschichtung
- Salzgehalt
- Öl auf Wasser

Hat man z. B. einen Behälter mit Fluiden unterschiedlicher Dichten so ist ρ nicht mehr konstant und kann nicht mehr aus dem Integral über Gleichung (2.2) gezogen werden.

$$\int_{z_0}^z \frac{\partial p}{\partial z} dz = \int_{z_0}^z -\rho(z) \cdot g dz$$

Beispiel : Öl auf Wasser

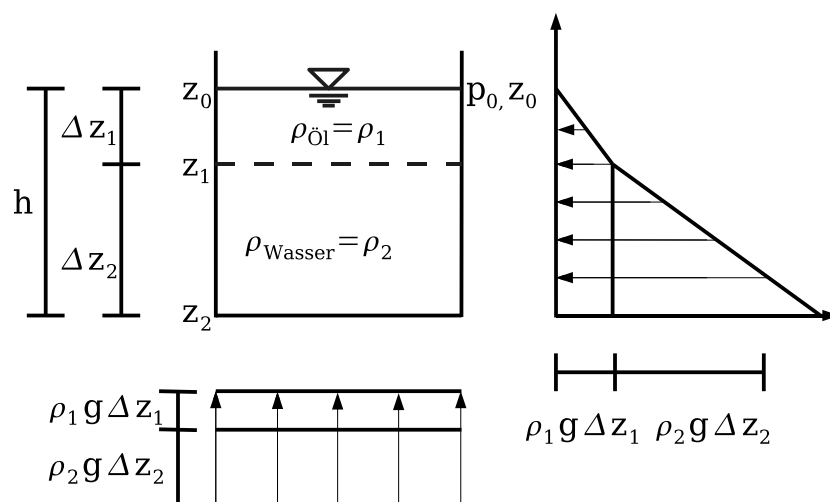


Abbildung 2.4: Druckverlauf in einem Behälter bei veränderlicher Dichte.

In diesem Fall genügt eine Aufteilung in zwei Bereiche.

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \\ &= - \int_{z_0}^{z_1} \rho_1 \cdot g dz - \int_{z_1}^{z_2} \rho_2 \cdot g dz \end{aligned}$$

Als Referenzdruck wird der Atmosphärendruck gewählt ($p_0 = 0$).

Für $z_0 \leq z \leq z_1$ gilt:

$$p(z) = \rho_1 g (z_0 - z)$$

Für $z_1 \leq z \leq z_2$ gilt:

$$p(z) = \rho_1 g (\Delta z_1) + \rho_2 g (z_1 - z)$$

2.5 Druckkraft auf ebene Flächen

Im Folgenden wird die Druckkraft betrachtet, die auf beliebig geneigte ebene Flächen wirkt. Der Druck ist eine differentielle Kraft die auf eine differentielle Fläche wirkt, $p = \frac{dF}{dA}$

$$d|F| = p \cdot d|A| = -\rho \cdot g \cdot (z - z_0) d|A|$$

Die gesamte Druckkraft auf eine Fläche ergibt sich folglich aus dem Integral über alle differentiellen Anteile. Dabei wollen wir sowohl die Gesamtkraft als auch deren Angriffspunkt ermitteln.

2.5.1 Gesamtkraft

Wir beginnen mit der Gesamtkraft auf eine Fläche, die um den Winkel α geneigt unter der Wasseroberfläche liegt. Wir benutzen dafür die Koordinate h als Tiefe unter der Wasseroberfläche, ζ bezeichnet die Koordinate entlang der ebenen Fläche. Sie beginnt an der oberen Kante der Fläche mit ζ_0 , die sich bei h_0 unter der Wasseroberfläche befindet (siehe Skizze).

Die Wassertiefe bestimmt sich als Funktion der Koordinate ζ aus

$$h = h_0 + \zeta \cdot \sin\alpha$$

Die Gesamtkraft bestimmt sich aus dem Integral:

$$\begin{aligned} F_{ges} &= \int_A p dA = \int_A \rho \cdot g \cdot h dA = \rho \cdot g \int_A h dA = \\ &= \underbrace{\rho \cdot g \cdot h_0 \cdot A}_{\text{const. Anteil}} + \rho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \int_A \zeta dA \end{aligned}$$

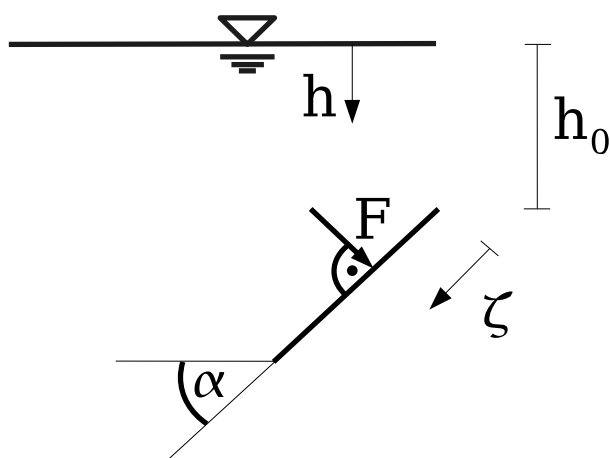


Abbildung 2.5: Gesamtkraft auf eine ebene Platte.

mit dem ersten Flächenmoment $\int_A \zeta dA$

$$\int_A \zeta dA = \zeta_S \cdot A$$

ergibt sich

$$F_{ges} = p_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A \quad (2.5)$$

ζ_S ... Schwerpunkt

A ... Fläche

h_S ... Tiefe des Schwerpunkts

p_S ... Druck im Flächenschwerpunkt

Die Gesamtkraft auf eine ebene Fläche bestimmt sich also aus dem Produkt der Fläche mit dem Druck am Flächenschwerpunkt.

2.5.2 Kraftangriffspunkte

Der Druck wirkt auf jedes infinitesimal kleine Flächenelement $p \cdot dA$. Der Angriffspunkt der daraus resultierenden Kraft ist der Flächenschwerpunkt dieses Elements.

Der Angriffspunkt für die Gesamtkraft wird nun über ein Momentengleichgewicht hergeleitet:

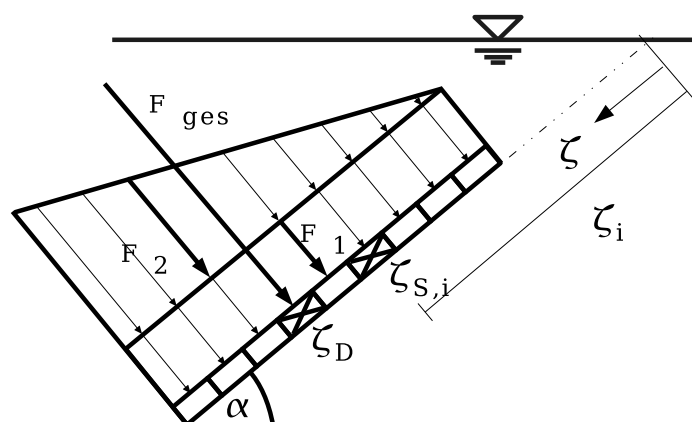


Abbildung 2.6: Kraftangriffspunkt.

$$\sum \text{Momente} = \text{Gesamtkraft} \cdot \text{Hebelarm}$$

Die Summe der angreifenden Momente setzen sich aus den einzelnen infinitesimalen Druckkräften zusammen. Wir müssen also über diese einzelnen Anteile integrieren.

Moment = \int infinitesimale Druckkräfte \cdot jeweiliger Hebelarm = Gesamtkraft \cdot Hebelarm

$$M = \int_A \zeta dF = \sum F_i \cdot \zeta_i = \zeta_D \cdot F$$

mit $dF = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA = \rho \cdot g \cdot \zeta \cdot \sin \alpha \cdot dA$

$$\zeta_D \cdot F = \int_A \rho \cdot g \cdot \zeta \cdot \sin \alpha \cdot \zeta \cdot dA$$

mit $F = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A$

$$\zeta_D = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha}{\rho \cdot g \cdot h_S \cdot A} \cdot \int_A \zeta^2 \cdot dA$$

mit $h_S = \zeta_S \cdot \sin \alpha$ folgt:

$$\zeta_D = \frac{1}{\zeta_S \cdot A} \cdot \int_A \zeta^2 \cdot dA = \frac{I_\xi}{\zeta_S \cdot A}$$

aus dem Satz von Steiner $I = I_S + \zeta_S^2 \cdot A$ folgt: $\zeta_D = \zeta_S + \frac{I_S}{\zeta_S \cdot A}$

ζ_S ...Schwerpunktskoordinate

h_S ...Wassertiefe am Schwerpunkt

I_ξ ...Flächenträgheitsmoment um die ξ -Achse - Koordinatenursprung

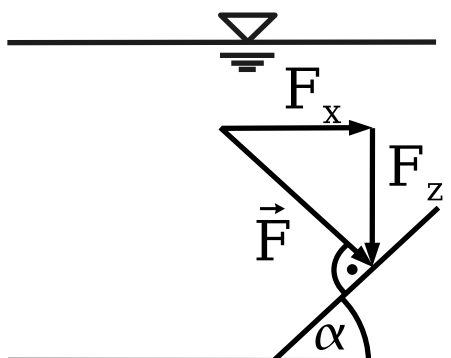
I_S ...Flächenträgheitsmoment um die ξ -Achse - Flächenschwerpunkt

2.6 Aufteilung in x- und z-Richtung

Für viele Aufgaben der Hydrostatik ist es zweckmäßig, die Druckkraft in die Kraftkomponenten der einzelnen Raumrichtungen aufzuteilen.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$



Im Folgenden betrachten wir zunächst die **Gesamtkraft** in die einzelnen Raumrichtungen. Danach leiten wir die **Angriffspunkte** her. Um die Gesamtkraft und den Angriffspunkt zu bestimmen benutzen wir die sogenannten **Druckfiguren**.

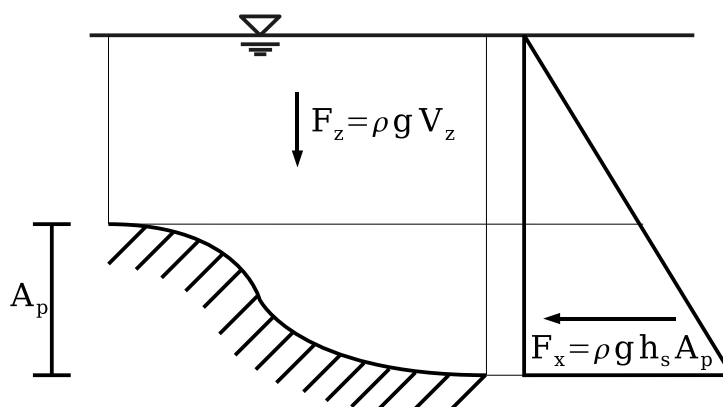


Abbildung 2.7: Beispiel einer Druckfigur.

2.6.1 Druckfiguren

Die Größe der Druckkraft in *horizontaler* Richtung ergibt sich aus dem Produkt des Druckes am Flächenschwerpunkt $p_S = \rho g h_S$ mit der projizierten Fläche A_p . Sie ist gleich dem Volumen der Druckfigur für die Kraft in x-Richtung.

$$F_x = \rho g h_s A_p \quad (2.6)$$

Die Größe der Kraft in *vertikaler* Richtung ergibt sich aus dem Volumen der Druckfigur für die Kraft in vertikaler Richtung. Sie ist gleich der Gesamtheit aller auf dem Bauteil lastenden infinitesimalen Flüssigkeitssäulen $\rho g h$.

$$F_z = \rho g V_z \quad (2.7)$$

2.6.2 Fußpunktgerade

Als Konstruktionshilfe für die resultierende Kraft in vertikaler Richtung kann die sogenannte Fußpunktgerade dienen. Sie wird hier an einem Beispiel demonstriert.

Die senkrecht auf die Wand wirkende Belastung wird nun in den horizontalen und vertikalen Anteil getrennt.

Durch Superposition der Auftrieb- und Auflast-Flächen wird ersichtlich, dass dem Fußpunkt der Wand eine besondere Bedeutung zukommt.

Mit der Fußpunktgerade erhält man die Überlagerung aus Auflasten und Auftrieben. Zunächst zieht man eine vertikale Gerade vom **Fußpunkt** bis zum Wasserspiegel. Ist die Fläche zwischen FPG und Berandung benetzt, so wirkt diese

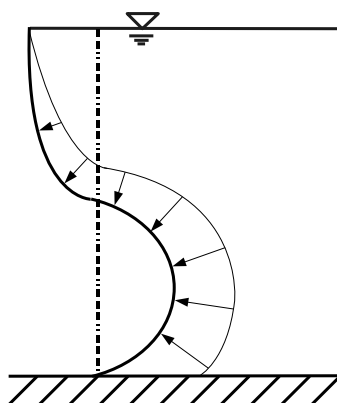


Abbildung 2.8: Belastung senkrecht auf eine Wand.

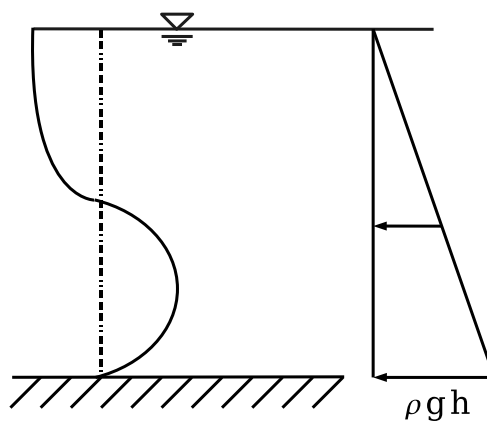


Abbildung 2.9: Horizontale Belastung.

als Auflast, wenn sie luftgefüllt ist, wirkt sie als Auftrieb. Diese Flächen müssen schließlich noch mit $\rho \cdot g$ multipliziert werden, um die Kraft pro Breitenmeter zu erhalten.

2.7 Auftrieb

Auf einem in Wasser getauchten Körper lastet die Flüssigkeitssäule $\rho \cdot g \cdot h$. An seiner Unterseite wirkt der Druck $\rho \cdot g(h + \Delta h)$. Dieser Druckunterschied wirkt auf der gesamten Fläche, sodass wir eine Auftriebskraft F_A erhalten.

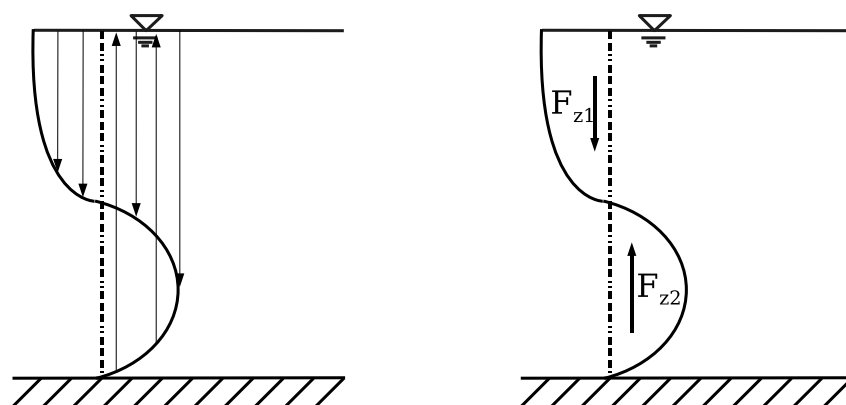


Abbildung 2.10: Vertikale Belastung.

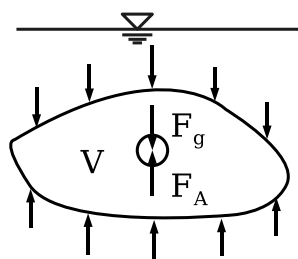


Abbildung 2.11: Auftrieb eines Körpers unter Wasser

$$F_A = \rho_w \cdot g \cdot V \tag{2.8}$$

2.8 Bewegte Bezugssysteme

Das Kapitel “Bewegte Bezugssysteme” kann, wenngleich es paradox klingt, thematisch dem Kapitel “Hydrostatik” zugeschlagen werden. Denn ein Beobachter, der sich mit dem Bezugssystem bewegt, wird das Fluid in Ruhe betrachten. Diese Überlegung liegt der Herleitung der Formeln für die Wasserspiegellagen in bewegten Gefäßen zugrunde. Es herrscht also ein Kräftegleichgewicht am differentiellen Element:

Die an einem Fluidelement angreifenden Kräfte sind die Druckkraft, die aus dem Druckgradienten hervorgeht und die Beschleunigung der Masse dieses Elements.

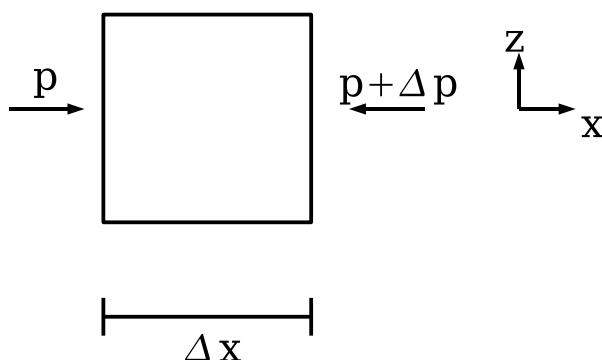


Abbildung 2.12: Änderung des Druckes in x.

Gleichung 2.2 kann ebenso für die x-Komponente aufgestellt werden:

$$d\vec{F} = dm \cdot \vec{a} \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \cdot a_x$$

In dreidimensionaler Betrachtung ergibt sich:

$$\nabla p = -\rho \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Niveauflächen des Druckes sind Flächen konstanten Druckes. Bewegt man sich also entlang einer Niveaufläche, so ist definitionsgemäß die Änderung des Druckes gleich null. Das heißt, dass das totale Differential entlang einer Niveaufläche verschwindet:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0$$

Damit können wir für die Niveauflächen in bewegten Bezugssystemen folgenden Zusammenhang aufstellen:

$$\rho \cdot a_x \cdot dx + \rho \cdot a_y \cdot dy + \rho \cdot a_z \cdot dz = 0 \quad (2.10)$$

Der freie Wasserspiegel ist immer eine Niveaulinie/fläche (Fläche gleichen Drucks). Am Wasserspiegel herrscht der Druck: $p = p_{atm} = const..$ Also ist die Druckände-

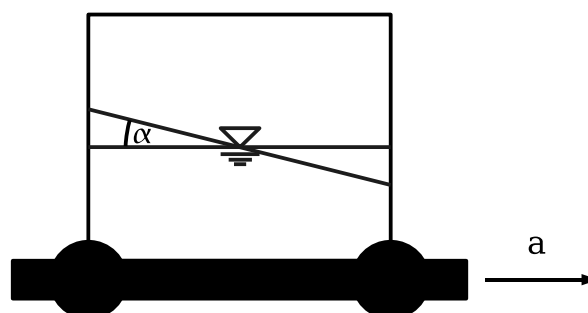


Abbildung 2.13: Konstant beschleunigter Behälter.

rung entlang dieser Linie/Fläche gleich null. Eine Niveaulinie steht immer senkrecht zur Beschleunigungsrichtung. Als Beispiel sei auf die Niveaulinie “Wasserspiegel” in einem ruhenden Behälter verwiesen. Hier wirkt lediglich die Erdbeschleunigung (vertikal), der Wasserspiegel ist horizontal, ergo senkrecht auf der Beschleunigung.

2.8.1 Konstant beschleunigte Behälter

Der im Schnitt dargestellte Wagen wird konstant beschleunigt. Man kann beobachten, dass der Wasserspiegel verkippt.

Die Erdbeschleunigung überlagert sich mit der in horizontaler Richtung wirkenden Komponente a_x . Wir erhalten für den Wasserspiegel

$$a_x dx - g dz = 0 \quad (2.11)$$

und die Wasserspiegellage

$$a_x \cdot x - g \cdot z + const. = 0 \quad (2.12)$$

Legt man den Koordinatenursprung in die Behältermitte auf die Position des ursprünglichen Wasserspiegels, erhält man für die Position des Wasserspiegels.

$$a_x \cdot x - g \cdot z = 0 \quad (2.13)$$

Der Druck an einer beliebigen Stelle in diesem Behälter kann nun folgendermaßen bestimmt werden. Wir suchen uns einen Punkt, für den der Druck bekannt ist.

Davon ausgehend, wird Gleichung 2.9 integriert. Wenn man sich z.B. den Wasserspiegel senkrecht über dem gesuchten Punkt wählt, so erhält man den Druck durch Multiplikation von Dichte und Erdbeschleunigung mit der vertikalen Überlagerung h an dieser Stelle:

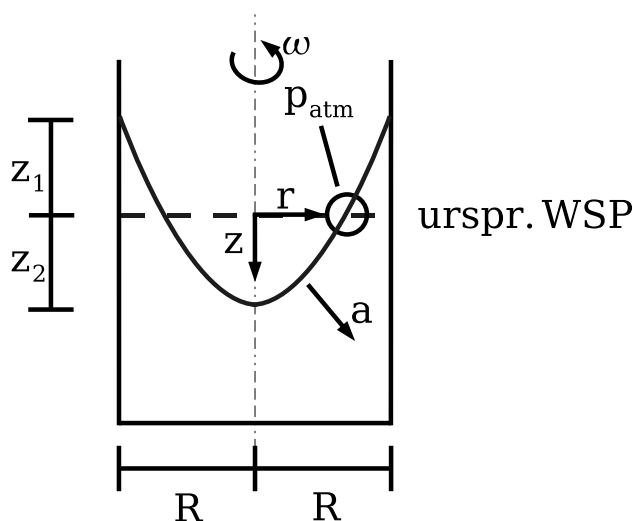
$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad (2.14)$$

Eine zweite Möglichkeit eröffnet sich wenn man von dem gesuchten Punkt das Lot auf die Wasseroberfläche fällt und diesen Punkt als Ausgangspunkt wählt. Die Überdeckung entlang des Lots muss dann mit dem gesamten Beschleunigungsvektor und der Dichte multipliziert werden

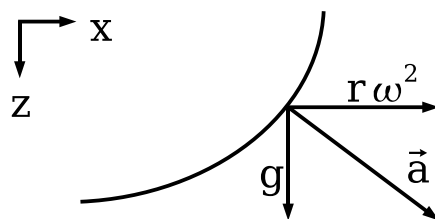
$$p = \rho \cdot |\vec{a}| \cdot h \cdot \cos \alpha \quad (2.15)$$

2.8.2 Rotierende Behälter

An dieser Stelle werden oben stehende Überlegungen auf rotierende Behälter angewendet. Die mathematische Beschreibung erfolgt sinnvollerweise in Zylinderkoordinaten.



Die Funktion für die Spiegellage wird wieder aus der Bedingung, dass sie senkrecht zur Beschleunigungsrichtung steht, gewonnen:



$$\begin{aligned}
 a_r dr + a_z dz &= 0 \\
 a_z &= g \\
 a_r &= \omega^2 \cdot r \\
 \omega^2 \cdot r \cdot dr + g \cdot dz &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} + g \cdot z + const. = 0$$

Teilt man die Gleichung nun durch g und schreibt dann für die Integrationskonstante z_2 erhält man:

$$z = -\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} + z_2 \tag{2.17}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante z_2 wählt man den Ursprung der z -Koordinate am Niveau des Wasserspiegels bei ruhendem Behälter. Auch bei rotierendem Behälter muss das Volumenintegral null ergeben. Allgemein ist das Volumenintegral über einen rotationssymmetrischen Behälter mit variabler Wasserspiegellage z_1 durch folgendes Integral gegeben:¹

$$V = \int_{z_2}^{z_1} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi dz = 0$$

¹Man beachte an dieser Stelle, dass die Jacoby-Determinante (r) bei der Volumenintegration über einen rotationssymmetrischen Körper eingefügt werden muss.

Wählt man $z_1 - z_2 = z$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} z \cdot r d\phi dr = 0 \\
 2\pi \int_0^R \left(-\frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_2 \right) r dr &= 0 \\
 \int_0^R \left(-\frac{\omega^2 r^3}{2g} + z_2 \cdot r \right) dr &= 0 \\
 \left[-\frac{\omega^2 \cdot r^4}{8g} + \frac{z_2 \cdot r^2}{2} \right]_0^R &= 0 \\
 -\frac{\omega^2 \cdot R^4}{8g} + \frac{z_2 \cdot R^2}{2} &= 0 \\
 z_2 &= \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4g}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Letztendlich erhält man für die Spiegellage in einem rotierenden Behälter:

$$z = -\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4g} \tag{2.19}$$

Damit ergibt sich für den Spiegelunterschied Δh zwischen Achse und Behälterwand:

$$\Delta h = z_2 - (-z_1) = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2g}$$

2.9 Verwendete Zeichen

Benennung	Zeichen	Einheit
Beschleunigung	a	$\frac{m}{s^2}$
Fläche	A	m^2
Kraft	F	N
Auftriebskraft	F_A	N
Massenkraft	F_m	N
Druckkraft	F_p	N
Druck	p	$\frac{N}{m^2}$
Absolutdruck	p_{abs}	$\frac{N}{m^2}$
Relativdruck	p_{rel}	$\frac{N}{m^2}$
Druckhöhe	$\frac{p}{\rho g}$	mWs
Erdbeschleunigung	g	$\frac{m}{s^2}$
geodätische Höhe	z	m
Wassertiefe	h	m
Dichte	ρ	$\frac{kg}{m^3}$
lokale Koordinate	ζ	
lokale Koordinate	ξ	
lokale Schwerpunktskoordinate	ζ_S	m
Volumen	V	m^3

Kapitel 3

Kinematik

Die Kinematik ist die Beschreibung der Fluidbewegung ohne Einbeziehung von Kräften. Dabei spielt es keine Rolle, ob Wasser, Öl, Luft, etc. betrachtet werden.

3.1 Beschreibung von Feldern

In diesem Kontext werden Fluide als Kontinuum betrachtet. Strömungen sind in der Regel dreidimensional und zeitabhängig. Deshalb benötigt man das mathematische Handwerkszeug, um dreidimensionale zeitabhängige Felder im Rahmen der Kontinuumshypothese vollständig zu beschreiben. Als beschreibende Größen (Variablen) kennen wir:

- skalare Größen:
Druck p , Dichte ρ , Temperatur T , dynamische Viskosität μ , kinematische Viskosität ν .

- vektorielle Größen:
Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, Beschleunigungsvektor \vec{a} ,
Druckgradient ∇p .

- tensorielle Größen:
Spannungstensor $\tau = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$,

Geschwindigkeitsgradiententensor $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Der Gradient einer skalaren Größe ϕ ist definiert als

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial t \\ \partial z/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}; \vec{a} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial t \\ \partial w/\partial t \end{pmatrix}$$

Das totale Differential ist definiert als (hier z.B. des Druckes):

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt$$

bei stationären Strömungen verschwindet die Zeitableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

3.2 Lagrange - Euler

Bezüglich des Referenzsystems gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Betrachtungsweisen: Lagrange'sche und Euler'sche Betrachtung.

1. Lagrange:

Bei der Lagrange'schen Betrachtungsweise bewegt man sich mit dem betrachteten Fluidelement mit. Man verfolgt dieses Fluidelement in der Zeit. Das führt auf folgende Beschreibung der Strömungsgrößen dieses Elements.

$$\vec{X}(t); \quad \vec{U}(t) = \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t}; \quad \vec{a}(t) = \frac{\partial^2 \vec{X}(t)}{\partial t^2}$$

2. Euler:

Bei der Euler'schen Betrachtungsweise wird das gesamte Geschwindigkeitsfeld im Raum beschrieben. Das geschieht normalerweise von einem raumfesten Standpunkt aus. Diese Betrachtungsweise führt auf eine Beschreibung der Strömungsgrößen als Feld im gesamten Raum.

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$$

3.3 Lokale, konvektive und substantielle Ableitung

Im Folgenden wird beschrieben, wie man zwischen Euler und Lagrange hin- und her wechseln kann. In den späteren Kapiteln wird zum Beispiel das Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Element in der Lagrange-Formulierung hergeleitet. Mit dem Begriff der substantiellen Ableitung können wir dann die entsprechende Gleichung in der Euler-Formulierung herleiten.

Wir betrachten dazu die Temperaturänderung, die ein sich bewegender Betrachter (Lagrange) wahrnimmt, wenn er sich in einem zeitlich und räumlich variablen Temperaturfeld $T(x, y, z, t)$ bewegt. Die Temperaturänderung ΔT , die der Betrachter wahrnimmt, wird als substantielle Ableitung D/Dt bezeichnet. Sie setzt sich nach der Kettenregel der Differentialrechnung zusammen aus lokaler Änderung $\frac{\partial}{\partial t}$ und konvektiver Änderung $\vec{u} \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{DT}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{lokale Ableitung}} + \underbrace{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{konvektive Ableitung}}$$

Das lässt sich am Besten im Eindimensionalen verdeutlichen. Der Betrachter bewegt sich von Punkt (1) nach Punkt (2). Die Änderung, die er sieht, ergibt sich durch die Bewegung als $dx \partial T / \partial x$. Während der Bewegung hat sich aber die Temperatur um einen bestimmten Betrag dT erhöht. Die dadurch für den Betrachter spürbare Erwärmung dT addiert sich natürlich dazu. Die Summe wird als substantielle Ableitung der Temperatur bezeichnet.

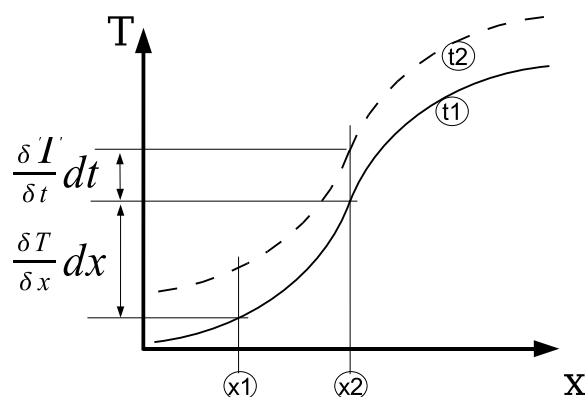


Abbildung 3.1: Zur Illustration der substantiellen Ableitung.

Man kann die substantielle Ableitung auch für vektorielle Größen verwenden. Die

Beschleunigung eines Fluidteilchens ergibt sich aus der substantiellen Ableitung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

In Vektorschreibweise:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

3.4 Verformungen

Im Gegensatz zur Festkörpermechanik spielt in der Fluidmechanik nicht der Betrag der Verformung, sondern die Verformungsgeschwindigkeit eine wesentliche Rolle. Die Verformungsgeschwindigkeit gibt an, mit welcher Rate ein Fluidteilchen gestreckt, rotiert oder geschert wird.

Festkörper	Fluid
Spannung ist abhängig vom Betrag der Verformung	Spannung ist abhängig von der Verformungsgeschwindigkeit

Als Beispiel sei hier die Strömung durch eine konvergente Düse betrachtet (Abb. 3.2). Während des Durchgangs durch die Düse wird das Fluid beschleunigt. Dadurch werden die einzelnen Fluidteilchen in Strömungsrichtung gestreckt sowie quer dazu gestaucht.

Ein Fluidteilchen erfährt dabei drei Arten von räumlichen Änderungen:

1. Translation
2. Rotation
3. Deformation

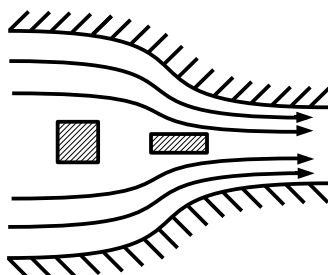


Abbildung 3.2: Verformung eines Fluidteilchens beim Durchgang durch eine konvergente Düse.

Im folgenden wird beschrieben, durch welche Größen die einzelnen Anteile an diesen räumlichen Änderungen beschrieben werden können. Der translatorische Anteil wird ganz einfach durch den Strömungsvektor am Ort des Schwerpunkts des Fluidteilchens beschrieben. Der rotatorische und der deformatorische Anteil werden durch den Geschwindigkeitsgradiententensor beschrieben.

3.4.1 Rotationsanteil

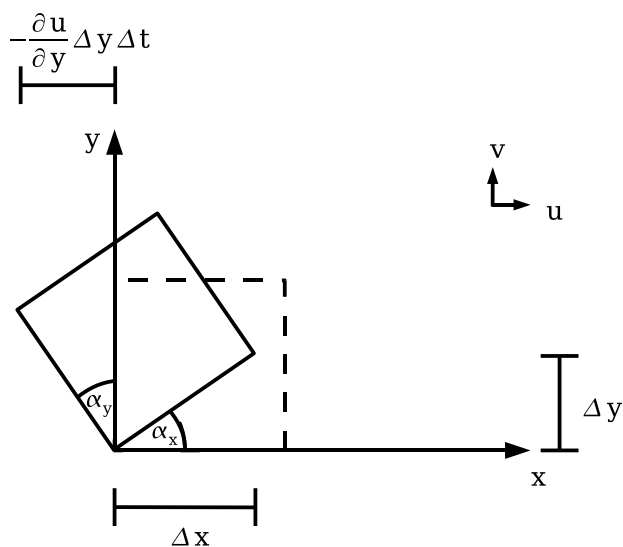


Abbildung 3.3: Zur Herleitung der Rotationsrate in einem Fluidelement.

Die Rotationsrate entspricht der Drehgeschwindigkeit, d.h. der Winkeländerung/Zeit $= d\alpha_i/dt$. In einer Zeiteinheit Δt hat sich das Fluidelement um den Mittelwert der

beiden Winkel α_x und α_y gedreht. Der Winkel α_x ergibt sich zu

$$\alpha_x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \underbrace{\Delta x \cdot \Delta t}_{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta t$$

Analog dazu der Winkel α_y

$$\alpha_y = \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \underbrace{\Delta y \cdot \Delta t}_{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta t$$

Die Netto-Rotationsrate um die z -Achse ergibt sich aus dem algebraischen Mittelwert der beiden Winkeldeformationsraten und wird als Drehung ω_z bezeichnet.

$$\omega_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.2)$$

Die Rotationsraten um die anderen beiden Raumachsen lassen sich analog dazu herleiten.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Der Drehvektor $\vec{\omega}$ ist durch diese drei Komponenten definiert.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Die Strömung ist rotationsfrei, falls gilt $\vec{\omega} = 0$.

3.4.2 Deformationsanteil

Die Deformationsrate kann aus mehreren Komponenten bestehen, der Scherung, der Streckung, Stauchung und einer Volumenänderung (bei kompressiblen Fluiden). Wir betrachten zunächst die Scherung. Die Scherrate wird analog zur Rotationsrate hergeleitet, nur dass beim Winkel α_y auf das Vorzeichen geachtet werden muss. Die Scherung e_{12} in der x - y -Ebene ergibt sich damit zu

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

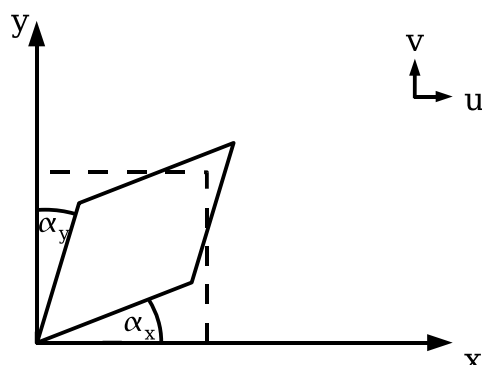


Abbildung 3.4: Zur Herleitung der Scherrate in einem Fluidelement.

bzw. in Komponentenschreibweise

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T). \quad (3.4)$$

3.4.3 Geschwindigkeitsgradiententensor

Sowohl die Drehung, als auch die Deformationen werden durch bestimmte Anteile des Tensors der Geschwindigkeitsgradienten dargestellt. Eine Analyse zeigt, dass die Rotation sich aus dem **antisymmetrischen** Teil und die Deformation sich aus dem **symmetrischen** Teil des Geschwindigkeitsgradiententensors darstellen lässt.

Der Geschwindigkeitsgradiententensor lautet ausgeschrieben.

$$\text{grad} \vec{v} = \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Dieser Tensor wird in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten.

$$\nabla \vec{v} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T)$$

Der symmetrische Anteil beschreibt die Deformationsrate, wobei die Streckung bzw. Stauchung in der Diagonalen und die Scherung außerhalb der Diagonalen steht. Die Spur, d.h. die Summe der Diagonalelemente ergibt die Volumenänderung (Divergenz). Im Zweidimensionalen lautet der symmetrische Anteil ausge-

schrieben

$$\frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Der antisymmetrische Anteil beschreibt die Drehung, d.h. er besteht aus den einzelnen Komponenten des Drehvektors:

$$\frac{1}{2}(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$$

Im Dreidimensionalen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

3.4.4 Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Rate der Volumenänderung eines Fluidelements. Wird ein Element z.B. in x -Richtung gestreckt, so ändert sich sein Volumen Vol bei gleichbleibender Ausdehnung in den anderen beiden Koordinatenrichtungen zu

$$\Delta Vol = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \Delta y \Delta z \tag{3.7}$$

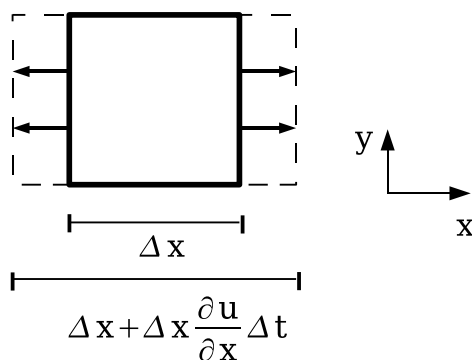


Abbildung 3.5: Zur Ableitung der Divergenz.

Dasselbe gilt für die y - und z -Richtungen. Im Dreidimensionalen beschreibt sich die auf das Volumen bezogene Rate der Volumenänderung, die Divergenz, als

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial \operatorname{Vol}}{\partial t} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.8)$$

In inkompressiblen Strömungen gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (3.9)$$

Diese Gleichung stellt die differentielle Form der **Kontinuitätsgleichung** für inkompressible Strömungen dar.

3.5 Ausgezeichnete Linien im Strömungsfeld

- Bahnlinien \rightarrow zurückgelegter Weg eines Fluidteilchens
- Streichlinien \rightarrow verbindet alle Teilchen die einen bestimmten Punkt durchlaufen haben
- Stromlinien \rightarrow stehen zu einem bestimmten Zeitpunkt parallel zum Geschwindigkeitsvektor

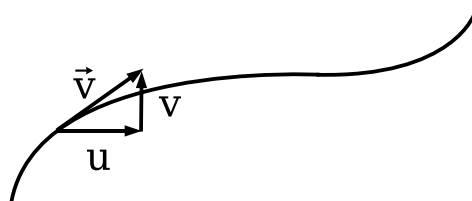


Abbildung 3.6: Stromlinie mit Geschwindigkeitsvektor.

Der in einer Zeiteinheit Δt zurückgelegte Weg $d\vec{s}$ ergibt sich zu

$$d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$$

Daraus ergeben sich folgende Beziehungen

$$dx = u \cdot dt$$

$$dy = v \cdot dt$$

bzw.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

Bei stationären Strömungsfeldern ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$) sind Strom-, Streich- und Bahnlinien identisch.

3.6 Volumenstrom und Durchfluss

Eine Stromröhre besteht aus mehreren Stromlinien, wobei der Strömungsvektor immer parallel zu den Stromlinien und damit auch parallel zur Achse der Stromröhre liegt. Dadurch kann über die Berandung einer Stromröhre kein Fluid ausfließen. Damit lässt sich eine Stromröhre sehr gut zur Bestimmung von Durchflüssen

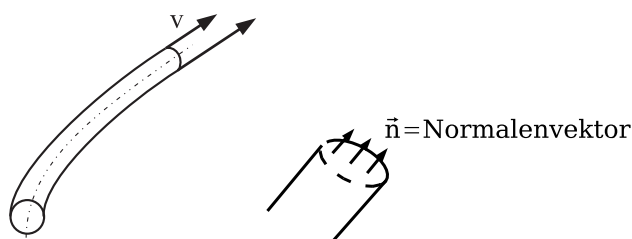


Abbildung 3.7: Stromröhre.

verwendet. Der Durchfluss bzw. Volumenstrom \dot{V} durch eine Stromröhre ergibt sich aus dem Integral über die Geschwindigkeitskomponente, die senkrecht zur Stirnfläche liegt

$$\dot{V} = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (3.10)$$

Beispiel :

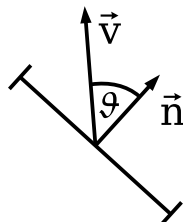


Abbildung 3.8: Zum Skalarprodukt zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Normalenvektor auf die durchströmte Fläche.

Die Komponente senkrecht zur Fläche ergibt sich zu $|\vec{v}| \cos \theta$. Folglich ergibt sich als Volumenstrom \dot{V} bzw. Durchfluss Q

$$\dot{V} = \int_A |\vec{v}| \cos \theta dA = Q \left[\frac{m^3}{s} \right] \quad (3.11)$$

Der Massenstrom:

$$\dot{m} = \rho \cdot Q \left[\frac{kg}{s} \right] \quad (3.12)$$

Ihre Anwendung erfährt die Definition des Durchflusses bei der Anwendung der **Kontinuitätsgleichung** (Erhaltung der Masse) in ihrer integralen Form. Als Beispiel sei hier die Strömung durch eine konvergente Düse betrachtet.

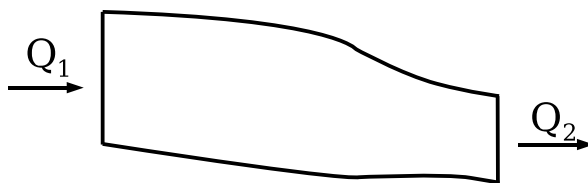


Abbildung 3.9: Zur Anwendung der Kontinuitätsgleichung.

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{bzw.} \quad v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

A_1, A_2 ...senkrecht Durchflossene Fläche

v_1, v_2 ...über Querschnitt gemittelte Geschwindigkeiten

3.7 Stromfunktion

- Anwendung falls Strömung zweidimensional und inkompressibel ist
- wird aus Kontinuitätsgleichung hergeleitet
- Fluid bewegt sich auf Stromlinien
- im stationären Fall gilt : Stromlinie = Bahnlinie
- Anwendung in der Potentialtheorie

Die Stromfunktion ist eine im allgemeinen dreidimensionale Funktion, die die Stromlinien definiert. Hier beschränken wir uns auf die Stromfunktion für zweidimensionale und inkompressible Strömungen. Die Stromfunktion wird aus der Kontinuitätsgleichung hergeleitet. Zunächst definiert man die Stromfunktion Ψ dergestalt, dass gilt:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.13)$$

Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.14)$$

Aus der Definition der Stromlinien wissen wir, dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{u}{v} \\ v dx &= u dy \end{aligned}$$

Setzt man darin die Definition der Geschwindigkeiten (Gleichung 3.13) ein, so erhält man

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

bzw.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \quad (3.15)$$

Das heißt, entlang einer Stromlinie ist die Stromfunktion konstant ($d\Psi = 0$ bzw. $\Psi = \text{const.}$). Die Stromlinien sind demnach die Linien konstanter Stromfunktion.

Ihre Anwendung findet die Stromfunktion in der Potentialtheorie, die im nächsten Kapitel besprochen wird.

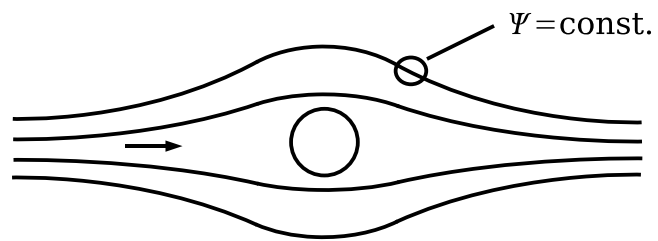


Abbildung 3.10: $\Psi = \text{const.}$ entlang einer Stromlinie.

Kapitel 4

Potentialtheorie

Mit der Potentialtheorie steht eine lineare Theorie zur Verfügung mit der unter vereinfachenden Annahmen Strömungsfelder berechnet werden können. Im Kontext dieses Skripts wird angenommen, dass die Strömung

- zweidimensional
- inkompressibel ($div\vec{v} = 0$)
- reibungsfrei ($\mu = 0$) und
- drehungsfrei ($rot\vec{v} = 0$)

ist. Aus der Drehungsfreiheit ($rot\vec{v} = 0$) folgt, dass das Geschwindigkeitsfeld als Gradient eines Potentials (Geschwindigkeitspotentials) $\Phi[m^2/s]$ dargestellt werden kann.

$$\vec{v} = \nabla\Phi \quad (4.1)$$

bzw.

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

Setzt man diese Beziehungen in die Kontinuitätsgleichung (3.9) ein, so erhält man mit unterschiedlichen Schreibweisen:

$$div\vec{v} = \nabla \cdot (\vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi = 0$$

Der Operator Δ wird als Laplace-Operator bezeichnet. Ausgeschrieben lautet die Gleichung dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}_{\Delta\Phi} = 0 \quad (4.2)$$

Ebenso existiert eine Stromfunktion Ψ . Sie wurde im vorhergehenden Kapitel eingeführt und für sie gilt:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Die Stromfunktion genügt ebenfalls einer Laplace-Gleichung. Diese folgt aus der Bedingung $\text{rot} \vec{v} = 0$.

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}}_{\Delta \Psi} = 0 \quad (4.3)$$

Die Stromlinien ($\Psi = \text{const.}$) stehen in jedem Punkt des Strömungsfeldes senkrecht auf den Potentiallinien ($\Phi = \text{const.}$). Entlang der Potentiallinien findet keine Massenbewegung statt. Stromlinien können als Berandung eines Körpers interpretiert werden.

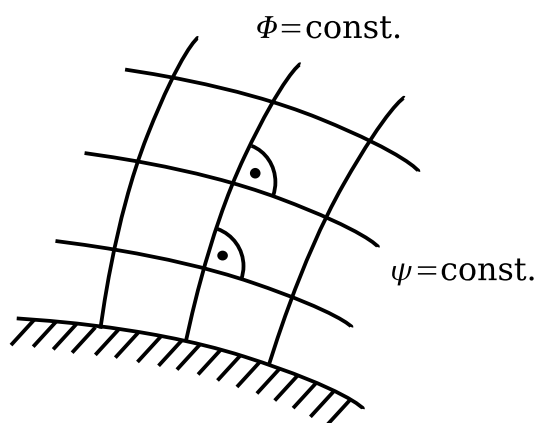


Abbildung 4.1: Stromlinien ($\Psi = \text{const.}$) und Potentiallinien ($\Phi = \text{const.}$) stehen in jedem Punkt des Strömungsfeldes senkrecht zueinander.

Anwendungen. Die Potentialtheorie wurde entwickelt, um analytische Lösungen für Strömungsfelder zu erhalten, bei denen die oben genannten Annahmen der Reibungs- und Drehungsfreiheit einigermaßen gerechtfertigt sind. Dies trifft z.B. auf den Außenbereich einer Tragflügelumströmung zu. Darauf aufbauend wurden einfache numerische Verfahren entwickelt (z.B. das 'Panel'-Verfahren).

In der Hydromechanik bzw. Hydraulik findet die Potentialtheorie ihre Hauptanwendung bei der Berechnung von *Grundwasserströmungen*. Eine Grundwasserströmung ist in der Regel eine Strömung durch ein poröses Medium, die auf-

grund der geringen Durchlässigkeit durch Druckunterschiede getrieben wird. Dadurch erhält sie ihren Potentialcharakter. Nach dem Gesetz von Darcy ergibt sich in einem porösen Medium für die Filtergeschwindigkeit v_f , der Durchlässigkeit $k_f[m/s]$ und dem Gefälle der piezometrischen Höhe $\frac{\partial h}{\partial s}$ folgender Zusammenhang:

$$v_f = -k_f \frac{\partial h}{\partial s} \quad (4.4)$$

Das Gefälle der piezometrischen Höhe ist mit dem Gefälle der Standrohrspiegelhöhen gleichzusetzen.

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (4.5)$$

Die mit der negativen Durchlässigkeit multiplizierte Standrohrspiegelhöhe h ergibt dann das Geschwindigkeitspotential Φ .

$$\Phi = -k_f h$$

4.1 Lösung der Potentialgleichung.

Lösungsverfahren im Rahmen der Potentialtheorie berechnen zuerst das Potential Φ und dann daraus die Geschwindigkeiten. Da die Laplace-Gleichung (4.2) linear ist, lassen sich Lösungen durch Superposition (Überlagerung) einzelner Elementarlösungen erzeugen. Dabei verwenden wir folgende vier Elementarlösungen:

- Parallelströmung
- Quellen- bzw. Senkenströmung
- Potentialwirbel
- Dipol

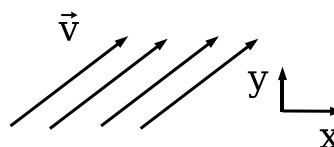
Parallelströmung

$$\Phi(x, y) = u_0 \cdot x + v_0 \cdot y$$

$$\Psi(x, y) = u_0 \cdot y - v_0 \cdot x$$

$$u(x, y) = u_0$$

$$v(x, y) = v_0$$



Quell- und Senkenströmung

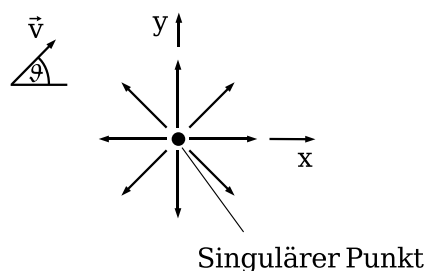
Q ist die Ergiebigkeit der Quelle. Falls $Q > 0$ ist, handelt es sich um eine Quelle, falls $Q < 0$ um eine Senke.

$$\Phi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \vartheta = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

$$u(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$



Die Quell- bzw. Senkenströmung hat im Koordinatenursprung einen singulären Punkt, in dem die Bedingung $\text{div} \vec{v} = 0$ verletzt ist. Im restlichen Strömungsfeld ist diese Strömung jedoch quell- bzw. senkenfrei.

Potentialwirbel

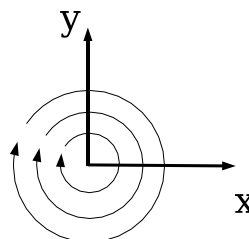
Γ ist die Zirkulation. Falls $\Gamma > 0$, ist der Wirbel rechtsdrehend.

$$\Phi(x,y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

$$\Psi(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v(x,y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$



Ebenso, wie bei der Quell-/Senkenströmung, besitzt der Potentialwirbel im Zentrum eine Singularität, in der die Bedingung $\text{rot} \vec{v}$ verletzt ist. Im restlichen Strömungsfeld gilt jedoch die Bedingung der Rotationsfreiheit. Würde man einen Festkörper in das Strömungsfeld bringen, so würde er sich kreisförmig um den Koordinatenursprung bewegen ohne sich dabei um die eigene Achse zu drehen.

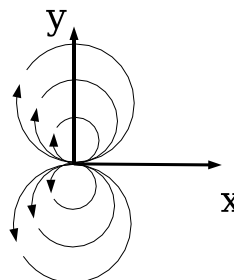
Dipol

$$\Phi(x,y) = \frac{mx}{x^2 + y^2}$$

$$\Psi(x,y) = -\frac{my}{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = m\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v(x,y) = -m\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$



Kapitel 5

Kinetik

Die Kinetik beschäftigt sich mit der Bewegung von Fluiden unter Berücksichtigung der einwirkenden Kräfte und Spannungen. Hier hat man je nach Fragestellung unterschiedliche Zugangsweisen. Wir gehen zunächst von einer Betrachtung am differentiellen Element aus und leiten eine allgemeine Gleichung für das Kräftegleichgewicht zwischen Beschleunigung, Massenkräften und anliegenden Spannungen her, die allgemein für Kontinua gilt (Bewegungsgleichung von Cauchy). Unter Einbeziehung einer 'konstitutiven' Gleichung, d.h. einer Beziehung zwischen Deformationsrate und Spannungszustand im Fluid, werden die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen erhalten, die die grundlegenden Gleichungen für die Beschreibung der Kinetik von Fluiden darstellen.

5.1 Bewegungsgleichung von Cauchy

Nach dem zweiten Gesetz von Newton ändert sich der Impuls durch die Einwirkung von Kräften

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (5.1)$$

bzw. die Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse x Beschleunigung

$$F = m \cdot a.$$

Auf ein Fluidelement wirken 3 unterschiedliche Kräfte ein:

1. Körperkräfte (Massenkräfte) \vec{F}_B (z.B. Gravitation)

2. Oberflächenkräfte \vec{F}_S (Spannungen: Normal- und Scherspannungen, z.B. Druck)
3. Linienkräfte \vec{F}_L (z.B. Oberflächenspannung)

Im Folgenden vernachlässigen wir Linienkräfte, da sie normalerweise nur als Randbedingungen auftreten (z.B. bei Gas/Flüssigkeit-Grenzflächen). Wir betrachten die Kräftebilanz an einem infinitesimalen Fluidelement.

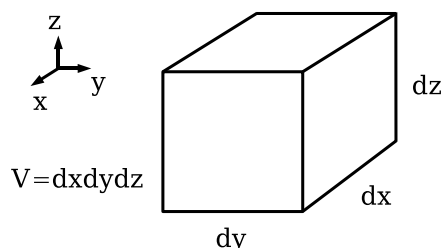


Abbildung 5.1: Dreidimensionales Fluidelement.

Beschleunigung. Die zeitliche Änderung des Impulses $m\vec{v}$ ergibt sich nach:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt}; \quad (\text{mit } m=\text{const.}) \quad m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\rho V}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{Beschleunigung}} \quad (5.2)$$

Die Beschleunigung $d\vec{v}/dt$ bezieht sich auf ein Fluidelement in Lagrange-Betrachtungsweise. Wir müssen deshalb die sogenannte *substantielle* Beschleunigung betrachten. Das Fluidelement 'sieht' zwei Arten von Beschleunigung: die *lokale* und die *konvektive* Beschleunigung:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{lokale}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}_{\text{konvektive Beschleunigung}}$$

Massenkräfte. Als Massenkräfte (Körperkräfte) wirken Feldkräfte, z.B. durch Gravitation oder Beschleunigung des Bezugssystems (Rotation). Sie lassen sich als Gradient einer Potentials schreiben, z.B. des Gravitationspotentials.

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -\nabla \Pi \cdot \rho V \\ &= -\nabla(gz) \cdot \rho V \end{aligned}$$

Oberflächenkräfte. Die Oberflächenkräfte sind Kontaktkräfte, die an der Oberfläche eines Fluidelements wirken. Sie lassen sich in Normal- und Tangentialkräften zerlegen.

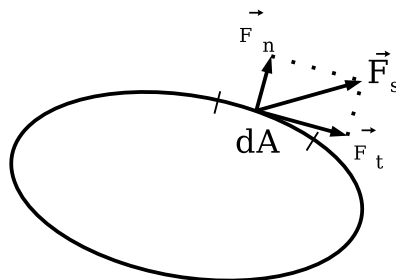
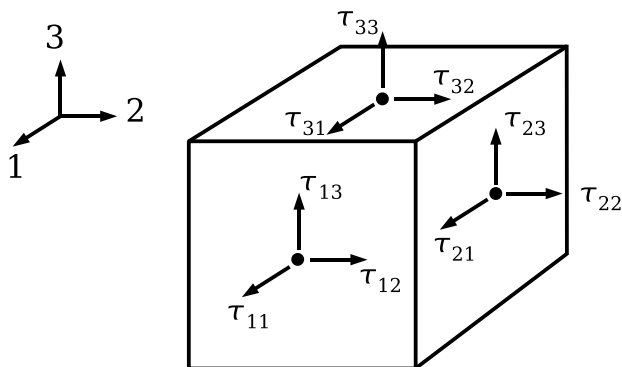


Abbildung 5.2: Oberflächenkräfte an einem Fluidelement.

Die Kräfte ergeben sich aus den angreifenden Spannungen mit

$$\tau_n = \frac{dF_n}{dA}; \quad \tau_s = \frac{dF_s}{dA}$$

Im Folgenden betrachten wir den Spannungstensor, um den Beitrag der Spannungen zur Kräftebilanz in Gleichung (5.1) zu erhalten.



Die Normalspannungen sind dabei: τ_{11} , τ_{22} und τ_{33} .
Die Schubspannungen sind: τ_{12} , τ_{13} , τ_{21} , τ_{23} usw.

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Der Schubspannungstensor ist symmetrisch. Das lässt sich aus dem Gleichgewicht der Schubspannungen ermitteln, wenn man das Drehmoment um den Mittelpunkt eines Fluidelements betrachtet.

Wir leiten nun die **Bewegungsgleichung von Cauchy** im Zweidimensionalen aus dem Kräftegleichgewicht in x-Richtung her. Im Zweidimensionalen lautet der Spannungstensor $\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$. Wir betrachten dazu ein zweidimensionales Volumenelement nach Abbildung 5.3. Im Zentrum wirken die Spannungen τ_{11} , τ_{12} , τ_{21} und τ_{22} . Entwickelt man diese Spannungen in einer Taylorreihe und berücksichtigt nur das erste Glied, so greift z.B. an der Seite in positiver x-Richtung die Spannung $\tau_{11} + \frac{dx}{2} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x}$ an.

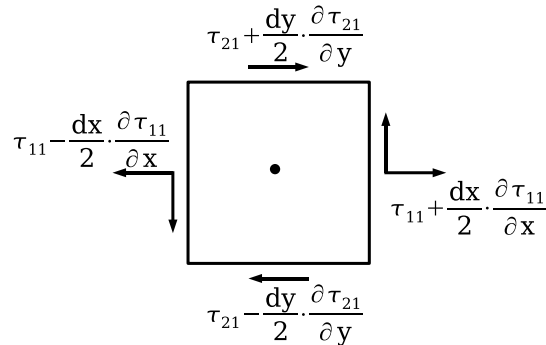


Abbildung 5.3: An einem zweidimensionalen Element in x-Richtung angreifende Spannungen.

Die Summe aller in x-Richtung angreifenden Kräfte lassen sich demnach aus den Spannungen ableiten:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \left(\tau_{11} + \frac{dx}{2} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} \right) \cdot \underbrace{dydz}_{\text{Fläche}} - \left(\tau_{11} - \frac{dx}{2} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} \right) dydz \\ &\quad + \left(\tau_{21} - \frac{dy}{2} \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \right) dx dz - \left(\tau_{21} + \frac{dy}{2} \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \right) dz dx \\ &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} \cdot dx dy dz + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} dx dy dz \end{aligned}$$

Das Kräftegleichgewicht nach Gleichung (5.1) schreibt sich unter Verwendung

von Gleichung (5.2) als

$$\rho \cdot V \frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \right) \cdot V \quad \text{bzw.} \quad \rho \frac{Du}{Dt} = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} \right)$$

Die komplette **Bewegungsgleichung von Cauchy** lautet im dreidimensionalen

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\rho \vec{g} + \nabla \underline{\tau} \quad (5.3)$$

bzw. ausgeschrieben unter Verwendung von $\nabla() = \frac{\partial}{\partial x}() + \frac{\partial}{\partial y}() + \frac{\partial}{\partial z}()$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\rho g + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \end{aligned}$$

Die Cauchy-Gleichung beschreibt das Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Element eines Kontinuums. Sie gilt sowohl in der Festkörper- als auch in der Fluidmechanik.

5.2 Konstitutive Gleichung

Das Problem bei der Lösung der Bewegungsgleichung von Cauchy besteht darin, dass für 9 Unbekannte (drei Geschwindigkeitskomponenten und 6 Spannungskomponenten) nur drei Gleichungen zur Verfügung stehen. Wir haben es hier also mit einem nicht geschlossenen Gleichungssystem zu tun. Dieses System kann geschlossen werden, wenn uns eine Beziehung zur Verfügung steht, die die Spannungen als Funktion der Geschwindigkeiten ausdrückt. Eine solche Beziehung nennt man **konstitutive Gleichung**.

5.2.1 Druck und viskose Spannungen

Der Spannungstensor besteht aus zwei Anteilen

- Druck p

- viskose Spannungen σ

Der Druck p ist eine Normalspannung, die in alle drei Raumrichtungen gleich stark wirkt, d.h. er ist isotrop. Dabei ist der Druck unabhängig von den Geschwindigkeitsgradienten oder der Viskosität. Wie im Kapitel Hydrostatik beschrieben, wird man bei Systemen, die sich in Ruhe befinden räumlich variable Drücke messen können. Er wird deshalb vom Spannungstensor abgespalten und separat behandelt.

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= -p + \sigma_{11} \\ \tau_{22} &= -p + \sigma_{22} \\ \tau_{33} &= -p + \sigma_{33}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Die viskosen Spannungen σ_{ij} dagegen sind von der Deformationsrate des Fluids abhängig. Bei **Newton'schen Fluiden** sind die viskosen Spannungen proportional zu den jeweiligen Geschwindigkeitsgradienten, genauer zu den Elementen e_{ij} des symmetrischen Anteils des Tensors der Geschwindigkeitsgradienten. Das entspricht einer einfachen linearen Beziehung, die mit einer Proportionalitätskonstanten ausgedrückt werden kann. Diese Proportionalitätskonstante heißt **dynamische Viskosität** μ (Zähigkeit)¹.

Der symmetrische bzw. deformatrische Anteil des Geschwindigkeitsgradiententensors lautet

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

bzw. in Tensornotation

$$\underline{e} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$$

Der Tensor der viskosen Spannungen lautet mit der dynamischen Viskosität μ als Proportionalitätskonstanten

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}\tag{5.5}$$

bzw. in Tensornotation

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{e}\tag{5.6}$$

Für Newtonsche und inkompressible Fluide ergibt sich damit als gesamter Spannungstensor

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\tag{5.7}$$

bzw. in Tensornotation

$$\underline{\tau} = -p\underline{I} + 2\mu \underline{e}\tag{5.8}$$

¹Die dynamische Zähigkeit wird in der Literatur oft auch mit dem griechischen Buchstaben η bezeichnet. Sie ist nicht zu verwechseln mit der **kinematischen Viskosität** $\nu = \mu/\rho$.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{23} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

5.3 Navier-Stokes-Gleichung

Setzt man nun die konstitutive Gleichung (5.7) in die Cauchy-Gleichung (5.3) ein, so erhält man die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Strömungen Newton'scher Fluide:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\rho \vec{g} + \nabla [-p \cdot \underline{I} + \mu(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)] \quad (5.9)$$

Sie bildet zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (3.9) die Grundlage der Fluidmechanik inkompressibler Strömungen. Aus ihr können die nachfolgend beschriebenen Anwendungen – Impulssatz und Bernoulligleichung – durch Vereinfachungen hergeleitet werden. Komplette Ausgeschrieben für die drei Geschwindigkeitskomponenten lautet sie.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

Hierbei wurde a) angenommen, dass die z-Richtung vertikal von der Erdoberfläche wegzeigt und somit die Erdbeschleunigung in negative z-Richtung wirkt, b) die kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho$ verwendet und c) der viskose Term unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung vereinfacht wird.

5.4 Impulssatz

Der Impulssatz stellt eines der wesentlichen Werkzeuge dar, mit denen ingenieurmäßige Problemstellungen gelöst werden können. Er erlaubt die Abschätzung von

Kräften, die auf die Strömung einwirken, ohne die Strömung im Detail zu kennen.

Der Impulssatz wird durch eine Integration der Navier-Stokes-Gleichung über ein geschlossenes Kontrollvolumen hergeleitet. Da bei der Anwendung dieses Prinzip nicht mehr zwischen den einzelnen Spannungskomponenten (Druck, viskose Spannungen, Normal- oder Scherspannungen) unterschieden werden kann, sondern nur die resultierenden Gesamtkräfte betrachtet werden, leiten wir den Impulssatz direkt aus der Cauchy Gleichung (5.3) her. Wir betrachten dazu ein geschlossenes Kontrollvolumen nach Abbildung 5.4. Das Kontrollvolumen besteht aus einer konvergenten Düse, die von links nach rechts durchströmt wird.

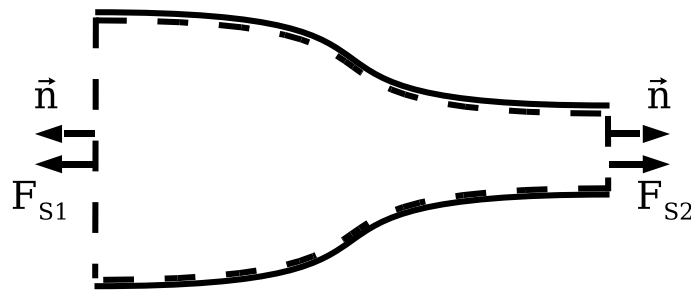


Abbildung 5.4: Zur Integration der Cauchy-Gleichung über ein Kontrollvolumen.

Wir integrieren nun Gleichung (5.3) über dieses Kontrollvolumen (K.V.). Zunächst wird die substantielle Ableitung auf der linken Seite der Gleichung in lokale und konvektive Beschleunigung aufgespalten

$$\int_{K.V.} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \int_{K.V.} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{K.V.} \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} dV$$

Danach wenden wir den Integralsatz von Gauss an, um das Volumenintegral über die konvektive Beschleunigung in ein Oberflächenintegral umzuwandeln. In der lokalen Beschleunigung ziehen wir die Zeitableitung aus dem Integral.

$$\int_{K.V.} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{K.V.} \rho \vec{u} dV + \underbrace{\int_{K.O.} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Kontrolloberfläche}}$$

\vec{n} ist dabei der nach außen zeigende Normalenvektor auf die durchströmte Fläche. Diese Vektorgleichung kann auch in Zeigerschreibweise geschrieben werden

$$\int_{K.V.} \rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{K.V.} \rho u_i dV + \int_{K.O.} \rho u_i u_j n_j dA \quad (5.10)$$

Die gesamte Änderung des Impulses im Kontrollvolumen setzt sich aus zwei Anteilen zusammen

- Änderung des Impulses im Inneren des K.V.: $\frac{dM_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{K.V.} \rho u_i dV$
- Impulsfluss über die durchströmten Oberflächen des K.V.: $\dot{M}_i = \int_{K.O.} \rho u_i u_j n_j dA$

Zur Veranschaulichung des Impulsflusses betrachten wir ein durchströmtes Oberflächenelement nach Abbildung 5.5 Die Geschwindigkeit \vec{v} transportiert eine be-

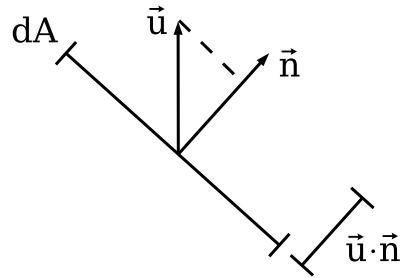


Abbildung 5.5: Zum Fluss über ein durchströmtes Flächenelement.

liebige Größe durch dieses Flächenelement. Wieviel von dieser Größe durch das Flächenelement fließt hängt dabei davon ab, wie groß der Betrag der Geschwindigkeit und wie groß der Winkel zur Flächennormalen \vec{n} ist. Daher bilden wir das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{n}$ zwischen Geschwindigkeitsvektor und Flächennormalen, das die Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die Flächennormale ergibt. Der Massenfluss (Transport von ρ) durch das Flächenelement ergibt sich z.B. durch

$$\dot{m} = \int_A \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

Der Transport von x-Impuls $I_1 = \rho u$ ergibt sich zu

$$\dot{M}_1 = \int_A \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_A \rho u (u \cdot n_1 + v \cdot n_2 + w \cdot n_3) dA$$

Für stationäre Strömungen gilt

$$\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV = 0; \quad \frac{dM_i}{dt} = 0$$

Die **Anwendung des Impulssatzes** wird erst dann handlich, wenn man eine gleichförmige Strömung über den Querschnitt A annimmt. D.h. man nimmt an, dass \vec{u} über den betrachteten Querschnitt konstant ist mit dem Betrag $|v|$. Des weiteren legen wir den Kontrollquerschnitt so, dass die Geschwindigkeit \vec{u} senkrecht zum

betrachteten Querschnitt liegt. Unter diesen Annahmen vereinfacht sich der Impulsfluss \dot{M} senkrecht zum durchströmten Querschnitt zu

$$\dot{M} = \int_A \rho |v| |v| dA = \rho \cdot Q \cdot v$$

oder wenn der Betrag des Geschwindigkeitsvektors einfach mit v bezeichnet wird:

$$\dot{M} = \rho Q v$$

Dabei steht unter den getroffenen Annahmen die Größe $\rho Q v$ immer senkrecht auf der durchströmten Fläche und zeigt nach außen.

Da die daraus resultierende Gesamtkraft ein Vektor ist, gilt demnach für senkrecht gleichförmig durchströmte Flächen bei stationären Verhältnissen folgende vektorielle Kräftebilanz, wobei F_i für alle anderen angreifenden Kräfte steht:

$$\rho Q v_i = \sum F_i \quad (5.11)$$

Die angreifenden Kräfte lassen sich in zwei Anteile unterscheiden:

1. Volumenkräfte

$$F_G \quad \text{Eigengewicht}$$

2. Oberflächenkräfte

- Druck auf durchströmte Flächen

$$F_p = - \int_A p \cdot \vec{n} dA$$

- Oberflächenkräfte, die von der festen Berandung auf das Kontrollvolumen ausgeübt werden: F_O . Dabei wird nicht näher spezifiziert, ob es sich dabei um Druck- oder viskose Kräfte handelt.

Damit gilt folgende Kräftebilanz:

$$\dot{M}_i = F_{G,i} + F_{p,i} + F_{O,i}$$

Die Anteile, die an den durchströmten Flächen angreifen, werden zusammengefasst und als Stützkraft F_S bezeichnet.

$$F_{S,i} = -\dot{M}_i + F_{p,i} \quad (5.12)$$

Sie ist vom Betrag her

$$F_S = p \cdot A + \rho \cdot Q \cdot v$$

und wirkt immer senkrecht auf die Fläche, ins Kontrollvolumen hinein. Die Kraft F_R , die auf die Berandung wirkt ist demnach

$$F_{R,i} = -F_{O,i} = F_{G,i} + F_{S,i} \quad (5.13)$$

5.5 Bernoulli-Gleichung

Die Bernoulli-Gleichung stellt das zweite wesentliche Werkzeug für ingenieurmäßige Aufgaben dar. Mit ihr lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen Geschwindigkeiten und Drücke in Strömungen abschätzen. Sie stellt eine Energiegleichung dar, die die Bilanz über die potentielle, kinetische und die Energie, die im Druck steckt, erstellt. Die Annahmen, die für die Anwendung der Bernoulli-Gleichung gelten sind:

- Reibungsfreiheit
- Rotationsfreiheit
- stationäre Verhältnisse

Unter der Annahme der Reibungsfreiheit wird aus der Navier-Stokes-Gleichung die Euler-Gleichung

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla(g \cdot z) \quad (5.14)$$

Um die Bernoulli-Gleichung herzuleiten, betrachten wir die Euler-Gleichung für die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Erdoberfläche (w -Komponente). Da wir nur stationäre Strömungen betrachten, gilt $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$. Deshalb bleibt auf der linken Seite von Gleichung (5.14) nur die konvektive Beschleunigung, die folgendermaßen umgeformt wird

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= u \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -u(2\omega_y) + v(2\omega_x) + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -u(2\omega_y) + v(2\omega_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial uu}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial vv}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial ww}{\partial z} \\ &= -u(2\omega_y) + v(2\omega_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{(u^2 + v^2 + w^2)}_{=k^2} \end{aligned}$$

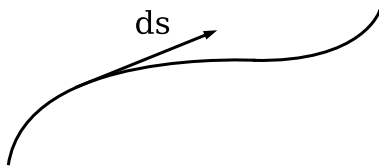
In drehungsfreien Strömungen verschwinden die Terme, die ω enthalten. Setzt man nun diesen Ausdruck in die Eulergleichung 5.14 ein, ergibt sich für die w -Komponente in inkompressiblen Strömungen:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} k^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial gz}{\partial z}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \right)}_{\text{Bernoulli-Funktion}} = 0$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2} k^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z$ wird Bernoulli-Funktion genannt. Unter den genannten Voraussetzungen Reibungs- und Drehungsfreiheit, stationäre und inkompressible Strömung ist die Bernoulli-Funktion nicht nur in z -Richtung konstant, sondern a) entlang einer Stromlinie und b) auch quer zu den Stromlinien. Für Stromlinien schreibt sich dann die Gleichung



$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \right) = 0 \quad (5.15)$$

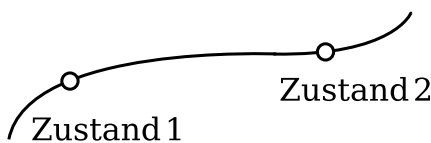
$$\frac{1}{2} k^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = const. \quad (5.16)$$

5.5.1 Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

Die Anwendung der Bernoulli-Gleichung erlaubt es, zwei unterschiedliche Strömungszustände entlang einer Stromlinie zu vergleichen. Daraus kann man dann wichtige Änderungen des Strömungszustandes abschätzen.

Integration entlang einer Stromlinie. Wenn man die Bernoulli-Gleichung entlang einer Stromlinie integriert, erhält man mit v_s als Geschwindigkeitskomponente entlang der Stromlinie

$$\frac{|v_s|_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{|v_s|_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho}$$



$$\text{Zustand 1} = \text{Zustand 2}$$

Man kann die Bernoulli-Gleichung in der Dimension einer Energie schreiben

$$\frac{\rho}{2} \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + p = \text{const.}$$

oder auch in der Dimension 'Länge', indem man durch ρg teilt.

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} = H$$

Damit führt man die **Energiehöhe** H ein, die sich aus drei Anteilen zusammensetzt.

$$\left. \begin{array}{l} z \dots \text{Ortshöhe} \\ \frac{p}{\rho g} \dots \text{Druckhöhe} \end{array} \right\} \text{piezometrische Höhe}$$

$$\frac{v^2}{2g} \dots \text{Geschwindigkeitshöhe}$$

Kapitel 6

Strömungen in Rohrleitungen

Man versteht unter dem Begriff Rohrströmung die Strömung in einer Rohrleitung unter Druck und ohne freien Wasserspiegel. Rohrleitungen treten in vielen technischen Anwendungen auf, z.B. in der Trinkwasserversorgung, im Kraftwerksbau, bei Öl-Pipelines, in der chemischen Industrie usw. Im Folgenden betrachten wir stationäre Rohrströmungen inkompressibler und Newton'scher Fluide in Kreisrohren.

In einem Kreisrohr wird die Geometrie der Strömung durch den Durchmesser d und die Länge l des Rohrabschnittes bestimmt. Wir nehmen dabei an, dass die Länge der Rohrleitung wesentlich größer ist, als ihr Durchmesser $l \gg d$ (Abbildung 6.1). Deshalb kann man ohne Einschränkung annehmen, dass sich das in dem Rohr ausbildende Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ ¹ in x -Richtung nicht ändert $\partial u / \partial x = 0$.

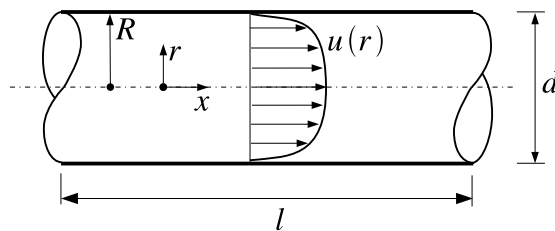


Abbildung 6.1: Strömung in einem Kreisrohr.

Aufgrund der Haftbedingung an der Rohrwand gilt $u(R) = 0$. Da die über die Querschnittsfläche gemittelte Geschwindigkeit v ungleich Null ist, muss an der

¹Wir sprechen hier vom zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofil.

Wand ein Geschwindigkeitsgradient anliegen. Dadurch entsteht an der Wand eine Schubspannung, die sogenannte Wandschubspannung bzw. Wandreibung τ_w . Ihr Betrag ist

$$\tau_w = \left| \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right|. \quad (6.1)$$

Diese Schubspannung muss durch eine treibende Kraft überwunden werden, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Diese treibende Kraft kann z.B. durch einen Druckgradienten aufgebracht werden (Abbildung 6.2).

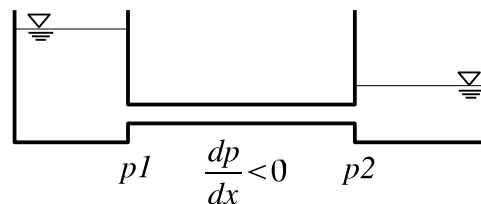


Abbildung 6.2: Druck als treibende Kraft in einer Rohrströmung.

Im Folgenden werden wir zunächst die Schubspannungsverteilung im Rohr herleiten, bevor wir auf empirische Beziehungen zum Verhältnis zwischen Wandreibung, Geschwindigkeit und Rohrgeometrie eingehen.

6.1 Schubspannungsverteilung

Um die Verteilung der Schubspannung in einer Rohrströmung zu berechnen betrachten wir ein zylindrisches Kontrollvolumen. Wir stellen das Kräftegleichgewicht in Richtung der Rohrachse (s -Richtung) auf. Dazu betrachten wir die Druckkraft, die Massenkraft und die Reibungskraft an der Mantelfläche des zylindrischen Kontrollvolumens.

Die resultierende Druckkraft F_D ergibt sich aus dem Druckunterschied zwischen den beiden Stirnflächen p_1 und p_2 ($\Delta p = p_2 - p_1$), jeweils mit der Stirnfläche multipliziert.

$$F_{D,s} = \underbrace{r^2 \pi}_{\text{Stirnfläche}} (p_1 - p_2) = -r^2 \pi \Delta p \quad (6.2)$$

Die Massenkraft F_G, s ergibt sich aus dem Anteil der Massenkraft, der in s -Richtung zeigt $F_G \sin \alpha$. Der Sinus des Winkels α ergibt sich per Definitionem aus $\sin \alpha =$

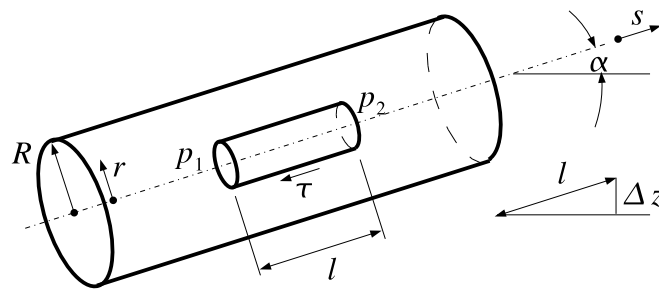


Abbildung 6.3: Zur Schubspannungsverteilung in einer Rohrströmung.

$\Delta z/l$, wobei Δz die Änderung der geodätischen Höhe (Ortshöhe) der Rohrachse mit der Länge l bezeichnet.

$$F_{G,s} = - \underbrace{r^2 \pi l}_{\text{Volumen}} \cdot \rho g \cdot \frac{\Delta z}{l}$$

An der Mantelfläche des Kontrollvolumens greift die Schubspannung τ an. Mit der Fläche multipliziert ergibt sie die Widerstandskraft F_W .

$$F_{W,s} = - \underbrace{2\pi r l}_{\text{Mantelfläche}} \cdot \tau$$

Bildet man die Bilanz erhält man:

$$\begin{aligned} F_{G,s} + F_{W,s} + F_{D,s} &= 0 \\ -r^2 \pi l \cdot \rho g \cdot \frac{\Delta z}{l} - 2\pi r l \cdot \tau - r^2 \pi \Delta p &= 0 \\ 2\pi r l \tau &= -r^2 \pi (\Delta p + \rho g \Delta z) \\ \tau &= -\frac{r}{2l} \cdot (\Delta p + \rho g \Delta z) \end{aligned}$$

Nach dem Grenzübergang $l \rightarrow 0$ erhält man schließlich:

$$\tau = -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (6.3)$$

Die Schubspannung $\tau(r)$ ist eine lineare Funktion des Radius r . In der Achse gilt

$\tau = 0$. Und an der Wand gilt:

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\frac{R}{2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \\ &= -\frac{R}{2} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} (p + \rho g z)}_{\text{Gradient des piezometrischen Druckes}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.2 Energie- und Drucklinie

Da sich die Wandschubspannung τ_w in Fließrichtung nicht ändert ($du/ds = 0$, siehe oben), bleibt auch der Gradient des piezometrischen Druckes konstant. Wenn man den piezometrischen Druck durch ρg teilt erhält man die piezometrische Höhe $p/\rho g + z$. Und damit ergibt sich das wichtige Ergebnis, dass sich entlang der Rohrachse in Fließrichtung ein **konstantes Gefälle in der Druckhöhe** einstellt. Dieses ist gleich dem **Gefälle der Energiehöhe**, da die Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ in Fließrichtung konstant bleibt (siehe Abbildung 6.4).

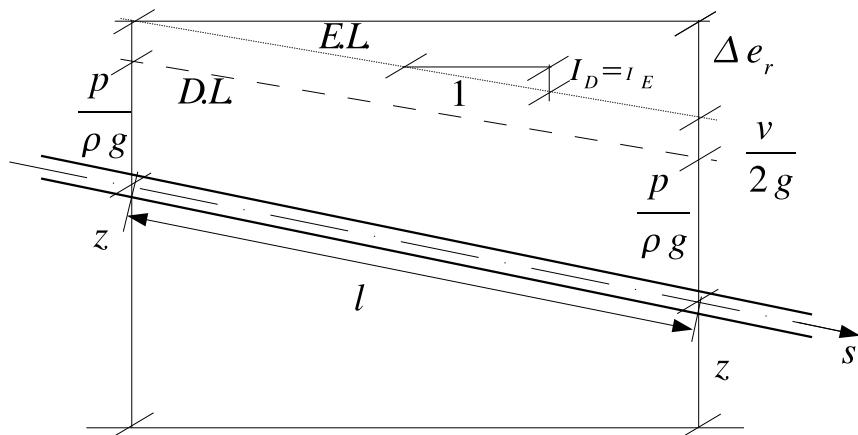


Abbildung 6.4: Gefälle der Energie- und Druckhöhen in einer Rohrströmung.

Das Gefälle der Drucklinie I_D ist gleich dem Gefälle der Energielinie I_E .

$$I_D = I_E = \frac{\Delta e_r}{l} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$$

Die Energiehöhe an der Position (2) ist um den Betrag Δe_r kleiner, als diejenige an der Position (1).

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta e_r$$

Da gilt $v_1 = v_2$, lässt sich dasselbe auch für die Druckhöhe (piezometrische Höhe) feststellen.

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta e_r$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob die Ortshöhe unter oder teilweise auch über der Drucklinie liegt. In diesem Fall, wird der auf den atmosphärischen Druck bezogene Druck negativ werden. In Abbildung 6.5 ist so eine Situation stark überhöht dargestellt. Die Leistungsfähigkeit bzw. der Verlust an Energiehöhe ist davon unberührt. Er skaliert nur mit der Länge der Rohrleitung, gemessen entlang der Rohrachse.

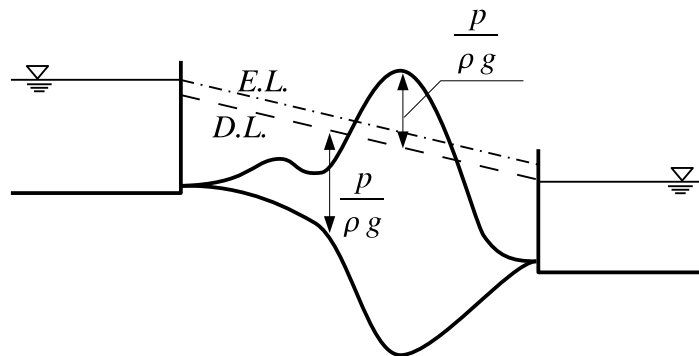


Abbildung 6.5: Gefälle der Energie- und Druckhöhen in einer Rohrströmung.

6.3 Reibungswiderstand

Die Verlusthöhe wird traditionsgemäß auf die Geschwindigkeitshöhe bezogen. Nach Einführung eines dimensionslosen Reibungsbeiwerts λ wird sie mit dem Ansatz von **Darcy-Weisbach** dargestellt.

$$\Delta e_r = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.5)$$

Die Wandschubspannung wird mit dem Reibungsbeiwert folgendermaßen erhalten.

$$\tau_w = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho v^2}{2} \quad (6.6)$$

Der Reibungsbeiwert ist eine Funktion zweier dimensionsloser Parameter $\lambda = f(Re, k_s/d)$:

- der Reynoldszahl Re

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\text{Trägheits-Kräfte}}{\text{viskose Kräfte}} \quad (6.7)$$

- der auf den Durchmesser bezogenen Wandrauhigkeit $r_s = k_s/d$. Sie wird auch als relative Sandrauhigkeit bezeichnet.

Für laminare Strömungen durch glatte Rohre kann man den Reibungsbeiwert als Funktion der Reynoldszahl durch eine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung bestimmen.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{für laminare Strömungen}) \quad (6.8)$$

Dabei können Rohrströmungen mit Reynoldszahlen $Re \leq 2300$ als laminar angesehen werden. Der Überschlag von laminar zu turbulent geschieht ca. bei einer Reynoldszahl von $Re \approx 2300$. Für Rohrströmungen gilt demnach

$$\begin{aligned} Re_{crit} &\approx 2300 \\ Re &> Re_{crit} \rightarrow \text{turbulent} \\ Re &< Re_{crit} \rightarrow \text{laminar} \end{aligned}$$

Bei höheren Reynoldszahlen wird die Strömung turbulent, wobei keine geschlossene analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mehr möglich ist. Man ist dann auf experimentell ermittelte Werte angewiesen. Durch zahlreiche Versuche (z.B. Nikuradse, 1926) wurden die Reibungsbeiwerte bei verschiedenen Reynoldszahlen Re und Wrelativen Sandrauhigkeiten $r_s = k_s/d$ ermittelt. Sie werden im Diagramm nach Moody (1944) dargestellt (Abb. 6.6).

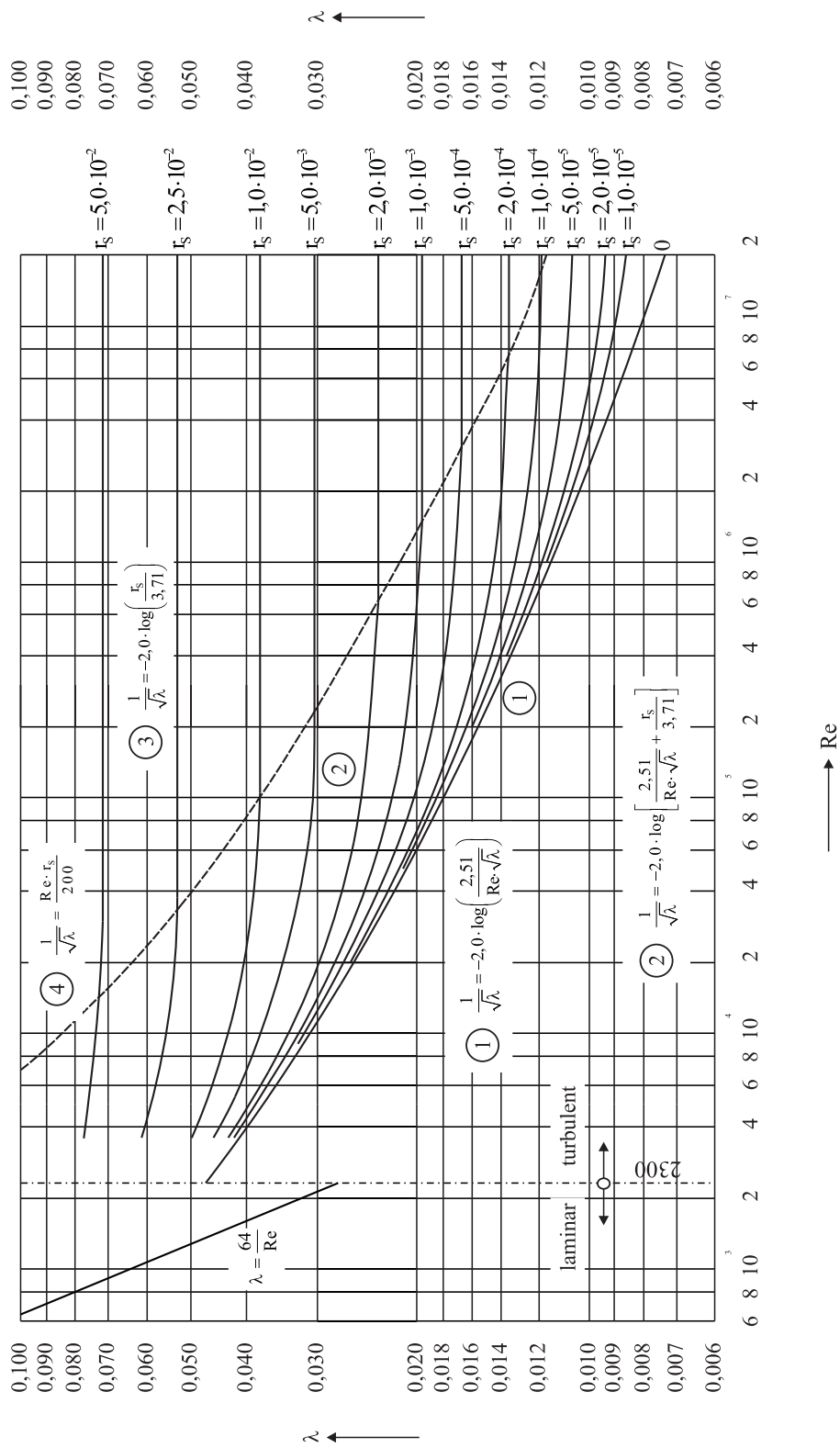


Abbildung 6.6: Reibungsbeiwerte für Rohrströmungen als Funktion der Reynoldszahl und relativen Wandrauhheit (Moody-Diagramm).

Man beachte die starke Zunahme des Reibungskoeffizienten beim Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung. Für die bezogene Rauheit ist zu beachten, dass man mit sogenannten “äquivalenten” Sandrauheiten arbeiten muss. Diese “äquivalenten” Rauheiten wurden für unterschiedliche Rohrmaterialien bestimmt und mit den Referenzdaten von Nikuradse abgeglichen. In Tabelle 6.1 werden für ausgewählte Rohrmaterialien die äquivalenten Sandrauheiten angegeben. Für weitere Angaben wird auf die entsprechenden Handbücher verwiesen.

Tabelle 6.1: Äquivalente Sandrauheit für ausgewählte Rohrmaterialien (Auswahl).

Werkstoff bzw. Rohrart	Zustand	$k_s [mm]$
Kupfer, Messing, gezogen oder gepresst, Glas	technisch glatt	0.00135 - 0.00152
Kunststoff	neu	0.0015-0.0070
Stahl, nahtlos gezogen	typische Walzhaut	0.02 - 0.06
Stahl, geschweißt	neu	0.05 - 0.1
	leicht angerostet oder verkrustet	0.04 - 0.5
	stark angerostet oder verkrustet	2 - 3
Gusseisen	neu	0.1-0.5
	alt oder verkrustet	1 - 5
	städt. Kanalisationen	ca. 1.2
Beton	neu, Glattstrich	0.1-0.8
	rau	1 - 5
	alt, schlechter Zustand	2-28

6.3.1 Sonstige Verluste

In Rohrleitungen entstehen Verluste nicht nur durch die Wandreibung, sondern auch durch Umlenkungen, Verengungen, Erweiterungen, Ein- und Auslauf, Vereinigungen, Verzweigung usw. Diese Einzelverluste Δe_z sind in der Regel proportional zum Quadrat der mittleren Durchflussgeschwindigkeit bzw. zur Geschwindigkeitshöhe. Sie werden in der Rohrhydraulik durch örtliche Verlustbeiwerte gekennzeichnet und folgendermaßen berücksichtigt.

$$\Delta e_z = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.9)$$

Treten in einem Rohrleitungssystem mehrere solcher Einzelverluste auf, so werden sie in der Summe berücksichtigt. Damit ergibt sich der Gesamtverlust an Energiehöhe in einem Rohrleitungssystem zu:

$$\Delta e = \Delta e_r + \sum \Delta e_z = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.10)$$

Die Beiwerte sind immer von der jeweiligen konstruktiven Gestaltung abhängig. So geht die Spannweite der Beiwerte für Einlaufverluste von $\zeta_e = 0.05$ für abgerundete bis zu $\zeta_e = 0.5$ für scharfkantige Ausführungen.

Beim Auslauf in einen großen Behälter geht durch die Verwirbelung die gesamte kinetische Energie der Rohrströmung verloren. Deshalb ist hier ein $\zeta_a = 1.0$ anzusetzen (siehe Abb. 6.7).

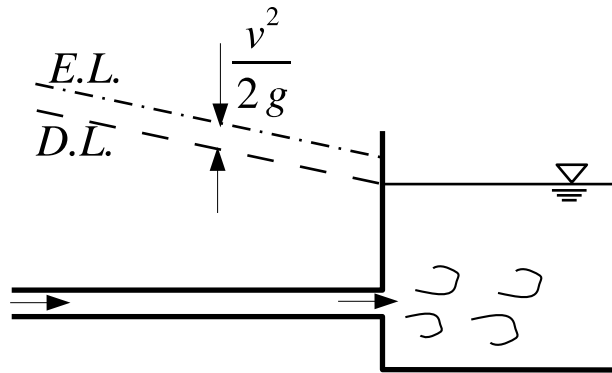


Abbildung 6.7: Auslaufverlust bei Einmündung in einen großen Behälter.

6.4 Energieplan

Für einen Energieplan für ein Rohrleitungssystem gelten folgende Grundsätze:

- bei konstantem Durchmesser d ist die Geschwindigkeitshöhe konstant. Daraus folgt, dass die Drucklinie parallel zur Energielinie verläuft. Deren Abstand ist $v^2/2g$.
- Einzelverluste werden mit einem Sprung in der Energielinie berücksichtigt.
- Bei einer Durchmesseränderung ergibt sich ein Sprung in der Energiehöhe (aufgrund des Verlustes), in der Geschwindigkeitshöhe (aufgrund der

Geschwindigkeitsänderung) und der Druckhöhe (als Konsequenz daraus). Weiterhin ändert sich das Gefälle der Energielinie.

- Die Neigung der Energielinie wird durch die Reibungsverluste im Rohr bestimmt (mittlere Geschw., Reibungskoeffizient λ , Durchmesser).
- Die richtige Anbindung der Druck- bzw. Energielinien ist zu beachten. Beim Einlauf aus großen Behältern mit Freispiegel startet die Energielinie auf der Höhe des Freispiegels minus dem Einzelverlust. Beim Auslauf in große Behälter wird das Niveau der Drucklinie durch den Freispiegel bestimmt.
- Der maximale Unterdruck, der ohne Abreißen der Wassersäule erreicht werden kann, beträgt erfahrungsgemäß $7.5mWS$.

Ein Beispiel für einen Energieplan wird in Abbildung 6.8 gegeben.

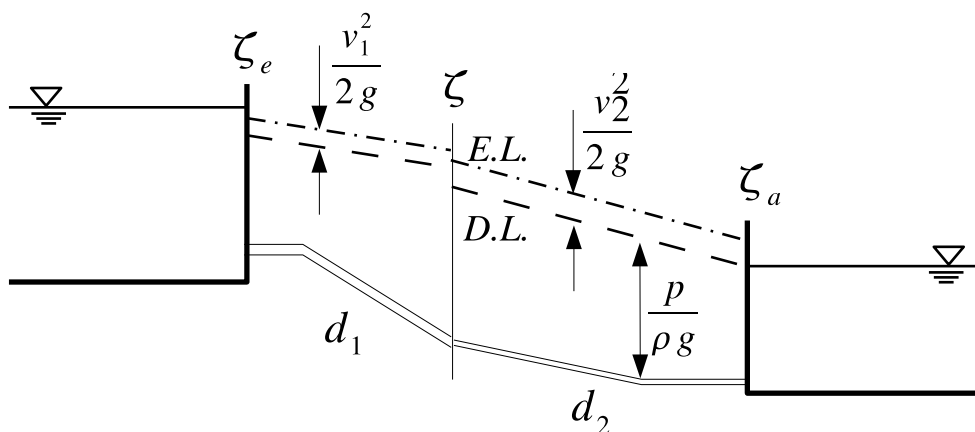


Abbildung 6.8: Energieplan eines Rohrleitungssystems mit Durchmesserwechsel, Ein- und Auslaufverlusten.

Kapitel 7

Stationäre Gerinneströmungen

Unter einer Gerinneströmung versteht man eine Strömung, bei der ein dichteres Fluid (z.B. Wasser) von einem darüber liegenden leichteren Fluid (z.B. Luft) durch eine Phasentrennfläche getrennt ist und durch Schwerkrafteinfluss in einem offenen Querschnitt fließt. Der wichtigste Fall von Gerinneströmungen sind Wasserströmungen mit freier Oberfläche, die sich z.B. in Flüssen und Kanälen ausbilden. Normalerweise kann die Dynamik der Luftströmung und ihr Einfluss auf die Wasserströmung vernachlässigt werden. An der Phasentrennfläche, der freien Oberfläche, wirkt als wesentliche Randbedingung der Atmosphärendruck. Er kann aufgrund seiner geringen Änderung mit der Ortshöhe meist als konstant angenommen werden. Demnach ist der Wasserspiegel, in einer Gerinneströmung identisch mit der Drucklinie im Energieplan.

Unter einer stationären Gerinneströmung versteht man eine Gerinneströmung, bei der lokal keine zeitlichen Änderungen der Fließtiefe sowie des Durchflusses beobachtet werden. Stationäre Gerinneströmungen besitzen keine *zeitliche Variation* $\partial/\partial t = 0$.

Unter gleichförmigem Abfluss versteht man eine Gerinneströmung, bei der die *räumliche Variation* verschwindet, $\partial/\partial x = 0$. D.h. hier beobachten wir in Fließrichtung konstante Gerinnequerschnitte, Wassertiefe und Durchflüsse bzw. Geschwindigkeiten. Dieser Zustand stellt sich unter dem sogenannten *Normalabfluss* ein.

7.1 Begriffe in der Gerinnehydraulik

In der Gerinnehydraulik spielt der Begriff der Fließtiefe (bzw. Wassertiefe) y eine wesentliche Rolle. Sie wird als die in der Vertikalen gemessene Entfernung zwischen dem Wasserspiegel und der Gerinnesohle bezeichnet.

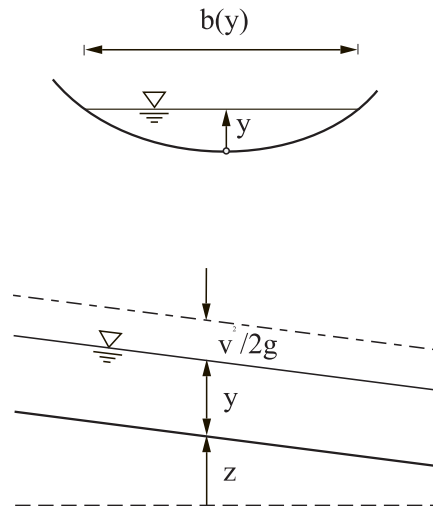


Abbildung 7.1: Quer- und Längsschnitt durch ein Gerinne.

Die Durchflussfläche A ist mit der Fließtiefe y veränderlich. Sämtliche Querschnittskenngrößen zur Beschreibung des Strömungsfeldes sind daher abhängig von der Fließtiefe. Dies sind neben der Querschnittsfläche $A = A(y)$ die Wasserspiegelbreite $b = b(y)$ und der benetzte Umfang $U = U(y)$. Von großer Bedeutung ist der *hydraulische Radius* R , das Verhältnis zwischen Querschnittsfläche und benetztem Umfang.

$$R = \frac{A}{U} = R(y)$$

Für breite Gerinne, d.h. fast alle natürliche Gerinne, gilt $b \gg y$ und damit geht $R \rightarrow y$.

Die Reynoldszahl wird in offenen Gerinne mit dem vierfachen hydraulischen Radius definiert

$$Re = \frac{v \cdot 4R}{\nu}$$

Das Sohlgefälle wird mit I_s bezeichnet und errechnet sich mit dem Neigungswinkel ε zu $I_s = \Delta z / \Delta x = \sin \varepsilon$. Der Vertikalabstand zwischen Sohle und Wasserspiegel beträgt $h = y \cos \varepsilon$.

7.2 Gleichförmige Bewegung: Normalabfluss

Im Allgemeinen können bei einer Gerinneströmung die drei Gefälle, Energieliniengefälle I_E , Spiegelliniengefälle I_W und Sohlengefälle I_S unterschiedlich sein. Wenn alle drei Gefälle gleich sind, dann spricht man von gleichförmiger Gerinneströmung unter Normalabfluss. Dieser Zustand kann nur unter Gleichgewicht zwischen der Oberflächenkraft aufgrund der Reibungsverluste an der Sohle und der Massenkraft aufgrund des Sohlgefälles auftreten. Dieser Zusammenhang wird wie folgt dargestellt:

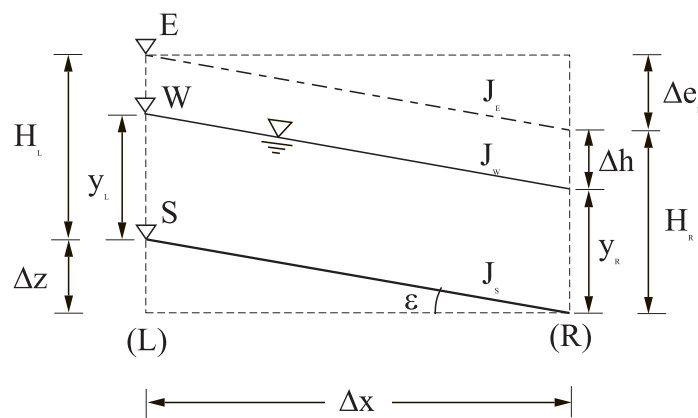


Abbildung 7.2: Stationär-Gleichförmige Strömung in einem Gerinne.

Ein Vergleich der Energiehöhen links und rechts ergibt:

$$\begin{aligned}
 H_L + \Delta z &= H_R + \Delta e_R \\
 \Delta z + y_L + \frac{v^2}{2g} &= y_R + \frac{v^2}{2g} + \Delta e_R
 \end{aligned}$$

Da die Fließtiefe sowie die mittlere Geschwindigkeit nach Voraussetzung unveränderlich sind, gilt

$$\Delta z = \Delta e_R \quad (7.1)$$

Und damit

$$I_E = I_W = I_S \quad (7.2)$$

Mit der Lauflänge L ergibt sich das Gefälle der Energielinie zu $I_E = \Delta e_R / \Delta x$.

7.3 Fließformeln

Zur Bestimmung des Energiehöhenverlustes aufgrund der Wandreibung Δe_R wird wie bei den Rohrströmungen vorgegangen. Das Energieliniengefälle I_E wird durch empirisch ermittelte Beiwerte aus der mittleren Fließgeschwindigkeit v , dem hydraulischen Radius R und der Wandrauheit bestimmt. Dazu werden in der Praxis zwei Ansätze verwendet: a) die Fließformel nach Darcy-Weisbach und b) die Fließformel nach Manning-Strickler.

a) Darcy-Weisbach. Der allgemeine Ansatz nach Darcy-Weisbach wird analog zur Rohrhydraulik angegeben:

$$\Delta e_R = \Delta x \cdot I_E = \lambda \frac{\Delta x}{4R} \frac{v^2}{2g} \quad (7.3)$$

Daraus ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit zu

$$v = \left(\frac{8g}{\lambda} \right)^{1/2} R^{1/2} I_E^{1/2} \quad (7.4)$$

Den Reibungsbeiwert λ erhält man aus dem Moody-Diagramm. Dabei muss man mit folgenden Definitionen arbeiten:

$$Re = \frac{v \cdot 4R}{\nu}; \quad \frac{k_s}{4R}$$

Die Rauheitslänge k_s entspricht der äquivalenten Sandrauheit. Ein paar typische Werte sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Dabei ist darauf zu achten, dass sich der Beiwert mit der Wassertiefe ändert, da die Rauheit auf den hydraulischen Radius bezogen wird, der ja von der Wassertiefe abhängt.

b) Manning-Strickler. Eine Alternative ist die Fließformel nach Manning-Strickler.

$$v = k_{St} R^{2/3} I_E^{1/2} \quad (7.5)$$

Diese Formel wird traditionell im Bereich sehr rauer Gerinne angewendet und hat sich in einer Vielzahl von Feldmessungen bewährt. Für glatte Gerinne wird besser die Formel von Darcy-Weisbach verwendet. Der wesentliche Unterschied zur Formel nach Darcy-Weisbach besteht im unterschiedlichen Exponenten des hydraulischen Radius und in der Tatsache, dass der Strickler-Beiwert nicht von der Fließtiefe abhängt. Der Strickler-Beiwert k_{St} ist nicht dimensionslos, er hat die Einheit $[m^{1/3}/s]$. Deswegen ist es zwingend erforderlich, die Dimensionen $[m/s]$ für die Geschwindigkeit und $[m]$ für den hydraulischen Radius zu verwenden. Ausgewählte Werte für den Strickler-Beiwert sind in Tabelle 7.2 aufgelistet.

Gerinnetypen	$k_s [mm]$
Ebene Fließgewässersohlen	
Sand, Kies	$d_{k,90}$
Grobkies, Schotter	60 - 200
Sohlenpflasterung	30 - 50
Vorländer, Böschungen	
Ackerboden	20 - 250
Ackerboden mit Kulturen	250 - 800
Rasen	60
Gras und Stauden	130 - 400

Tabelle 7.1: Rauheiten k_s von offenen Gerinnen für die Benutzung in der Fließformel nach Darcy-Weisbach. Kleine Auswahl.

Gerinnetypen	$k_{St} [m^{1/3}/s]$
Erdkanäle	
mit festem Sand	50
Feinkies	45
Sand, Lehm oder Kies, stark bewachsen	20 - 25
Natürliche Wasserläufe	
Flußbetten mit fester Sohle, ohne Unregelmäßigkeiten	40
Flußbetten mit mäßigem Geschiebe	33-35
Flußbetten verkrautet	30-35
Flußbetten, stark geschiebeführend	28

Tabelle 7.2: Strickler-Beiwerte k_{St} . Kleine Auswahl.

7.4 Fließzustand und Grenzverhältnisse

In offenen Gerinnen gibt es zwei verschiedene Strömungszustände¹, “strömend” und “schießend”. Beim strömenden Abfluss ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, beim schießenden Abfluss ist sie größer. Welche Konsequenzen das auf die gesamte Dynamik der Strömung hat und wie die beiden Zustände aus den Gleichungen hergeleitet werden können, wird im Folgenden beschrieben.

Ausgangspunkt ist die Bernoulligleichung, Dabei ist zu beachten, dass in der Gerinnehydraulik die Energiehöhe immer relativ zur Gerinnesohle angegeben wird. Weiterhin betrachten wir hier nur Rechteckgerinne mit der Breite B . Wir betrachten den auf die Breite bezogenen Durchfluss $q = Q/B$ (spezifischer Abfluss). Die Energiehöhe H ergibt sich zu (Bernoulli):

$$H = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{q^2}{y^2 2g} \quad (7.6)$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung dritter Ordnung zwischen Wassertiefe, Durchfluss und Energiehöhe dar. Diese Gleichung ist nicht eindeutig in der Wassertiefe, sodass hier eine eingehende Diskussion erfolgt. Wir unterscheiden zwei Fälle: a) die Beziehung zwischen Energiehöhe und Wassertiefe bei konstantem Abfluss, sowie b) die Beziehung zwischen Abfluss und Wassertiefe bei konstanter Energiehöhe.

7.4.1 Konstanter spezifischer Abfluss

Wir beginnen die Diskussion mit einer Betrachtung der möglichen Lösungen von Gleichung (7.6) bei konstant gehaltenem spezifischem Abfluss q . Zunächst ist einmal festzustellen, dass für die Grenzfälle $y \rightarrow \infty$ und $y \rightarrow 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } y \rightarrow \infty & \text{ gilt } H \rightarrow y \\ \text{für } y \rightarrow 0 & \text{ gilt } H \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Es muss also eine Wassertiefe existieren, für die die Energiehöhe minimal wird. Dieser Zusammenhang ist im Energiediagramm ($H - y$ -Diagramm) dargestellt.

Die minimale Energiehöhe ergibt sich an dem Punkt, an dem die Ableitung dH/dy

¹Unabhängig davon, ob die Strömung laminar oder turbulent ist.

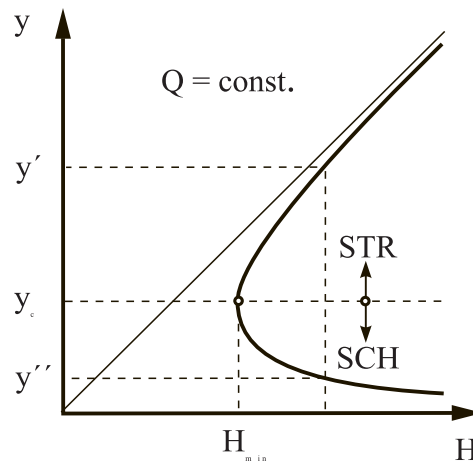


Abbildung 7.3: H-y Diagramm für $q=\text{const.}$.

verschwindet:

$$\frac{dH}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0, \text{ woraus folgt } \frac{q^2}{gy^3} = 1 \quad (7.7)$$

Die so genannte kritische Wassertiefe y_c , bei der die minimale Energiehöhe erreicht wird, ergibt sich damit zu

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.8)$$

bei diesem Zustand erhält man die kritische Geschwindigkeit v_c aus Gleichung (7.7) und

$$v_c = \frac{q}{y_c} \quad \left(\text{entspricht } \frac{Q}{A} \right)$$

zu

$$\frac{v_c^2 \cdot y_c^2}{g \cdot y_c^3} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{v_c^2}{g \cdot y_c} = 1 \quad (7.9)$$

Mit der Froude-Zahl Fr

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot y}} \quad (7.10)$$

erhält man also die kritische Geschwindigkeit bzw. die Grenzverhältnisse bei einer Froude-Zahl $Fr = 1$.

$$Fr = \frac{v_c}{\sqrt{g \cdot y_c}} = 1 \quad (7.11)$$

Die Froude-Zahl beschreibt das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner Wellen $c = \sqrt{gy}$. Kritische Verhältnisse sind erreicht, wenn die Strömungsgeschwindigkeit genau der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit entspricht. Ist sie kleiner, spricht man von “Strömen”, ist sie größer, spricht man von “Schießen”. Im schießenden Zustand können sich keine Wellen und damit auch keine Information stromauf bewegen.

$$Fr < 1 \rightarrow \text{Strömen}$$

$$Fr > 1 \rightarrow \text{Schießen}$$

7.4.2 Konstante Energiehöhe

Um die Lösungen der Gleichung (7.6) für eine konstant gehaltene Energiehöhe H zu diskutieren, formen wir sie um in

$$y^3 - Hy^2 + \frac{q^2}{2g} = 0.$$

Daraus lässt sich ableiten

$$q = \sqrt{2g} \sqrt{Hy^2 - y^3}.$$

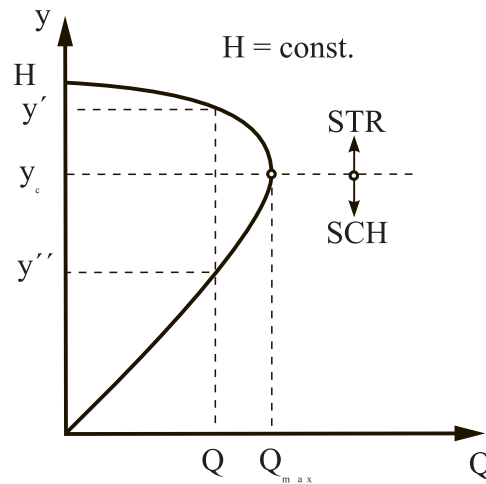
Für diese Gleichung existieren nur Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel $Hy^2 - y^3$ positiv ist. Das heißt, dass gelten muss $y < H$. Zusätzlich gilt für $y \rightarrow 0$ folgt $q \rightarrow 0$. Das hierfür gültige $q - y$ -Diagramm sieht folgendermaßen aus:

Es gibt wieder einen kritischen Zustand, für den der Abfluss bei konstanter Energiehöhe maximal wird. Dieser Zustand wird mit den Grenzverhältnissen y_c und v_c identifiziert. Liegt die Wassertiefe darüber, so spricht man von “Strömen”, liegt sie darunter von “Schießen”. Für $q < q_{max}$ ergeben sich zwei mögliche Fließzustände. Ein bestimmter Durchfluss kann bei gegebener Energiehöhe mit zwei unterschiedlichen Wassertiefen erfolgen. Man spricht dabei von *korrespondierenden* Wassertiefen.

7.4.3 Grenzverhältnisse

Im Folgenden werden einige Beziehungen für die Grenzverhältnisse abgeleitet. Aus der Bedingung $v_c = \sqrt{gy_c}$, das heißt bei einer Froude-Zahl von $Fr = 1$ erhält man

$$y_c = \frac{v_c^2}{g}. \quad (7.12)$$


 Abbildung 7.4: q-y Diagramm für $H=\text{const.}$..

Wenn man dies in die Bernoulligleichung (7.6) einsetzt erhält man

$$H_{\min} = \frac{v_c^2}{g} + \frac{v_c^2}{2g} = 3 \frac{v_c^2}{2g}, \quad (7.13)$$

d.h., im kritischen Zustand ist die Energiehöhe dreimal die Geschwindigkeitshöhe.

$$\frac{v_c^2}{2g} = \frac{1}{3} H_{\min} \quad (7.14)$$

Konsequenterweise beträgt dann die Wassertiefe $2/3$ der Energiehöhe.

$$y_c = \frac{2}{3} H_{\min} \quad (7.15)$$

7.4.4 Beispiel: Abfluss über eine Sohlstufe

Wir betrachten den Fall einer Gerinneströmung über eine Sohlstufe. Die Energiehöhe im Oberwasser sei H_0 , die Sohlstufe gleich w . Der Abfluss kann unter zwei unterschiedlichen Bedingungen erfolgen: 1) strömender Abfluss im Oberwasser und 2) schießender Abfluss im Oberwasser.

Bei strömendem Abfluss im Oberwasser wird die Wassertiefe im Verlauf der Sohlstufe abnehmen. Durch die Erhöhung der Sohle nimmt die Energiehöhe vom Ober- zum Unterwasser um den Betrag der Sohlstufe ab.

$$H_u = H_0 - w \quad (7.16)$$

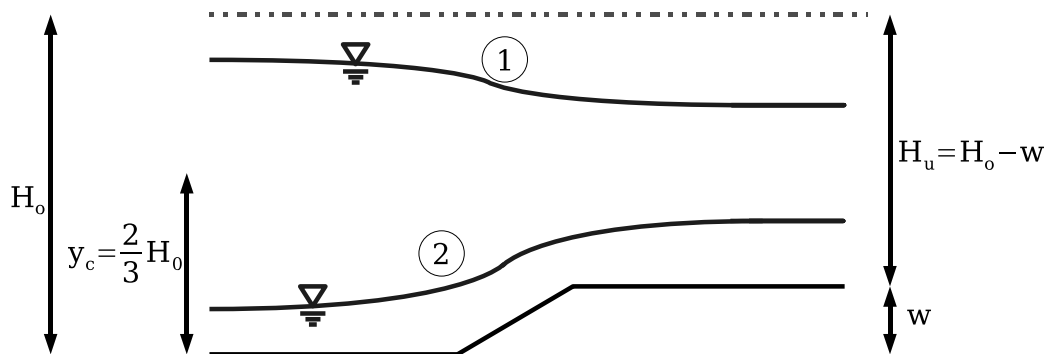


Abbildung 7.5: Abfluss über eine Sohlstufe.

Man bewegt sich dabei von Zustand (1) im $H - y$ -Diagramm in Richtung abnehmender Energiehöhe. Dabei nimmt die Wassertiefe ab. Die maximale Sohlstufe, ergibt sich aus

$$w_{max} = H_0 - H_{min} \quad (7.17)$$

Bei höheren Sohlstufen erfolgt ein Aufstau im Oberwasser, so lange, bis die Energiehöhe im Oberwasser gerade ausreicht, um auf der Sohlstufe die minimale Energiehöhe H_{min} zu erreichen.

Bei schießendem Abfluss im Oberwasser wird man sich von Zustand (2) im $H - y$ -Diagramm nach links zu kleineren Energiehöhen bewegen. Die Wassertiefe nimmt dabei zu. Die maximale Sohlstufe ist wieder durch Gleichung (7.17) gegeben. Übersteigt die Sohlstufe diesen Betrag, so wird ein Aufstau erfolgen. Dieser Aufstau geht einher mit einem Wechselsprung im Oberwasser, d.h. einem Übergang vom schießenden in den strömenden Zustand.

7.4.5 Stationär-Ungleichförmige Strömung

Im Kontext dieser Vorlesung soll nicht auf die Einzelheiten der stationär-ungleichförmigen Gerinneströmung eingegangen werden. Die folgenden Ausführungen runden jedoch die Gerinnehydraulik ab und fördern das Verständnis.

Aus der Diskussion der Froude-Zahl geht hervor, dass sich Störungen im Strömen nach Ober- und Unterstrom, im Schießen nur nach Unterstrom ausbreiten können. An der Übergangsstelle erhalten wir also eine Unstetigkeit, die man als Wechselsprung bezeichnet. Der Übergang vom Schießen zum Strömen erfolgt durch die Verwirbelungen mit großem Energieverlust. Eine mathematische Beschreibung des Phänomens kann nur mit dem Impulssatz geschehen. Setzt man die Stützkräf-

te links und rechts des Wechselsprungs an und vernachlässigt die Reibung an der Sohle, dann kann man die Gleichung

$$\rho \cdot Q \cdot v_L + \int p_L dA_L = \rho \cdot Q \cdot v_R + \int p_R dA_R$$

nach der Fließtiefe links, bzw. rechts auflösen. Man erhält für ein Rechteckgerinne mit durchgehender Sohle:

$$y_L = \frac{y_R}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_R^2} - 1 \right) \quad \text{bzw.} \quad y_R = \frac{y_L}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_L^2} - 1 \right) \quad (7.18)$$

Für andere Querschnittsformen oder Sohlstufen muss der Impulssatz, wie bisher, angesetzt werden.

7.5 Verwendete Zeichen

Benennung	Zeichen	Einheit
Fläche	A	m^2
Gerinnebreite	B	m
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit	c	$\frac{m}{s}$
Reibungsverluste	Δe_r	m
Froude-Zahl	Fr	—
Erdbeschleunigung	g	$\frac{m}{s^2}$
Energiehöhe	H	m
Minimale Energiehöhe	H_{min}	m
Energieliniengefälle	I_E	—
Wasserspiegelgefälle	I_W	—
Sohlengefälle	I_S	—
Äquivalente Sandrauheit	k_s	m
Strickler-Beiwert	k_{St}	$\frac{m^{1/3}}{s}$
Durchfluss	Q	$\frac{m^3}{s}$
Durchfluss pro Breitenmeter	q	$\frac{m^3}{s \cdot m}$
Hydraulischer Radius	R	m
Reynoldszahl	Re	—
Benetzter Umfang	U	m
Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$
Kritische Fließgeschwindigkeit	v_c	$\frac{m}{s}$
Schwellenhöhe	w	m
Fließtiefe	y	m
Grenztiefe	y_c	m
Geodätische Höhe	z	m
Höhendifferenz	Δz	m
Reibungsbeiwert	λ	—

Kapitel 8

Dimensionsanalyse/Ähnlichkeit

8.1 geometrische Ähnlichkeit

→ Längen müssen maßstabsgerecht abgebildet werden

8.2 dynamische Ähnlichkeit

dimensionslose Form der Navier-Stockes Gleichung

Navier-Stockes Gleichung für w-Komponente :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g}_{\text{Druckgradient}} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)}_{\text{viskose Spannung}} \quad (8.1)$$

Refferenzgrößen : u, l

$$x' = \frac{x}{l}; \quad y' = \frac{y}{l}; \quad z' = \frac{z}{l}; \quad t' = \frac{t \cdot u}{l}; \quad u' = \frac{u}{u}; \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho u^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z'} - \frac{g \cdot l}{u^2} + \frac{\nu}{u \cdot l} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \\ &= - \frac{\partial p'}{\partial t'} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Froude-Zahl : } Fr = \frac{u}{\sqrt{g \cdot l}} \quad \left[\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}} \right]$$

$$\text{Reynolds-Zahl : } Re = \frac{u \cdot l}{\nu} \quad \left[\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}} \right]$$

Dynamische Ähnlichkeit nur dann, wenn Fr und Re in Modell und Natur identisch sind.

8.3 Buckingham-Pi-Theorem

Anzahl der dimensionslosen Parameter m $m = u - r$

Anzahl der Problembeschreibenden Parameter n

Rang der Dimensionsmatrix r

normalerweise Anzahl der Dimensionen (Einheiten) die auftreten

Beispiel : Rohrströmung

$$\Delta p = f(u, D, l, \rho, \mu, k_s) \rightarrow f(\Delta p, u, D, l, \rho, \mu, k_s) = 0$$

7 beschreibende Parameter : n

$$\psi \left(\underbrace{u, D, \rho}_r, \underbrace{\frac{\Delta p}{\rho u^2}, \frac{l}{D}, \frac{k_s}{D}, \frac{\mu}{\rho u D}}_m = \frac{1}{Re} \right) = 0$$

$$\Delta e_r = \frac{\lambda \cdot l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{bzw. } \Delta p = \frac{\lambda l}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2; \quad \lambda = f \left(Re, \frac{k_s}{D} \right)$$

Beispiel : Einzelverluste

$$\Delta e_r = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Beispiel : Widerstandskoeffizient von umströmten Körpern

$$F_w = c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u^2$$

Beispiel : Euscher

$$D_{\text{original}} = 2,0m; \quad \text{halbgefüllt } : y = 1,0m$$

$$u_0 = 1 \frac{m}{s}, \quad Q_0 = u_0 \cdot A = 1,57 \frac{m^3}{s}$$

$$Re_{\text{original}} = \frac{u_0 \cdot y}{\nu} = \frac{1 \frac{m}{s} \cdot 1m}{1 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 10^6$$

$$Fr_{\text{original}} = \frac{u_0}{\sqrt{g \cdot y}} = \frac{1 \frac{m}{s}}{\sqrt{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 1m}} \approx 0,32$$

Modell : 1 : 4

$$D_{\text{Modell}} = 0,5m; y_{\text{Modell}} = 0,25m$$

$$Fr_{\text{Modell}} = 0,32 \rightarrow u_{\text{Modell}} = 0,32 \cdot \sqrt{9,81 \cdot 0,25} \approx 0,50 \frac{m}{s}$$

$$Re_{\text{Modell}} = 125000$$

⇒ beide Kennzahlen können nicht erfüllt werden !